

MATEMATIK

Göteborgs Universitet

Tentamen i Partiella differentialekvationer, MVE695

2025-08-18, kl. 14.00-18.00

Hjälpmedel: Endast medföljande formelblad.

Examinator: Andreas Rosén

Under skrivningstiden nås examinator via telefon 0317725365.

Totalt antal skrivningspoäng är 50. Till dessa läggs bonuspoäng. Betygsgränser: 20 poäng för betyget 3, 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget 5, inklusive bonus.

Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara välskrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.

Lösningsförslag och besked om rättning och granskning lämnas via kursens hemsida.

1. (a) Bestäm den allmänna lösningen $u(x, y)$ till

$$x u'_x - y u'_y = u, \quad x, y > 0.$$

(5p)

- (b) Finn partikulärlösningen till ovan PDE som uppfyller villkoret

$$u(x, 1/x^2) = x \ln(x+1) - x \ln x, \quad \text{för alla } x > 0.$$

(2p)

2. Betrakta randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & \text{i } D, \\ \partial_\nu u = g, & \text{på } \partial D, \end{cases}$$

för en funktion $u(x, y)$ på ett område $D \subset \mathbf{R}^2$. Funktionerna $f = f(x, y)$ och $g = g(x, y)$ är kända.

- (a) Finn en variationsformulering av randvärdesproblemet, det vill säga variationsekvationer och funktionsrum. (3p)
- (b) Visa att variationsekvationerna och randvärdeproblemet har samma lösningar. (3p)
- (c) Avgör, med motivering, om randvillkoret $\partial_\nu u = g$ är naturligt eller väsentligt. (2p)
3. (a) Finn alla egenfunktioner till $-\Delta = -\partial_x^2$ på intervallet $(0, \pi/2) \subset \mathbf{R}$ med blandade Neumann/Dirichlet-randvillkor $u'(0) = 0$, $u(\pi/2) = 0$. (3p)
- (b) Finn, som en egenfunktionsserie, den allmänna lösningen till vågekvationen $u''_{tt}(t, x) = u''_{xx}(t, x)$ för $t > 0$, $0 < x < \pi/2$, med Neumann/Dirichlet-randvillkor $u'_x(t, 0) = 0$, $u(t, \pi/2) = 0$, för alla $t > 0$. (4p)

Var god vänd!

4. Finn de två funktioner $u_1(t)$, $u_2(t)$ som löser systemet

$$\begin{cases} u_1'(t) = -\frac{1}{2}u_1(t) + \frac{5}{2}u_2(t), \\ u_2'(t) = \frac{5}{2}u_1(t) - \frac{1}{2}u_2(t), \end{cases}$$

av ordinära differentialekvationer för $t \in \mathbf{R}$, med startvillkor $u_1(0) = 1$, $u_2(0) = 0$. (7p)

5. Låt $D \subset \mathbf{R}^2$ vara ett område i planet.

(a) Definiera vad som menas med en Greenfunktion $G(y, x)$, med pol i x , för D . (2p)

(b) Bevisa att $G(x, y) = G(y, x)$ för alla $x, y \in D$. (5p)

6. (a) Förklara vad det innebär att en lösning $u(t, x)$ till vågekvationen är tidsharmonisk, med frekvens ω . (2p)

(b) Härled/förklara relationen mellan vågekvationen och Helmholtz ekvation. (3p)

(c) Klassificera var och en av vågekvationen och Helmholtz ekvation, såsom elliptisk/parabolisk/hyperbolisk. (2p)

7. (a) Betrakta den tidsberoende Schrödingerekvationen $i\hbar\partial_t u = -\hbar^2/(2m)\Delta u$ för vågfunktionen $u(t, x_1, x_2, x_3)$ för en fri partikel, från icke-relativistisk kvantmekanik. Här är $\hbar > 0$ Plancks konstant och m är partikelns massa. Finn lösningsformeln för startvärdesproblemet

$$\begin{cases} i\hbar\partial_t u = -\hbar^2/(2m)\Delta u, & t > 0, \\ u = g(x_1, x_2, x_3), & t = 0, \end{cases}$$

på $\mathbf{R}^3$. (4p)

(b) Avgör om Schrödingerekvationen är reversibel och hur stor dess utbredningshastighet är. (3p)

Formelblad MVE695

Heat equation:

$$H_t(x) = (4\pi kt)^{-n/2} e^{-|x|^2/(4kt)}$$

Laplace equation:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \ln |x| \quad \Phi(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}$$

Wave equation:

$$R_t(x) = \begin{cases} 1/(2c) \\ 0 \end{cases} \quad R_t(x) = \begin{cases} (2\pi c)^{-1}(c^2 t^2 - |x|^2)^{-1/2} \\ 0 \end{cases}$$
$$\langle R_t, \phi \rangle = (4\pi c^2 t)^{-1} \int_{|x|=ct} \phi(x) dS(x)$$

Helmholtz equation:

$$\Phi_k(x) = -\frac{i}{4}(J_0(k|x|) + iY_0(k|x|)) \quad \Phi_k(x) = -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}$$

① (a) Karakteristisk ekv: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln y = -\ln x + C$$

$$e^C = xy$$

Lämpligt variabelbyte: $\begin{cases} s = x \\ t = xy \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 1 \cdot \frac{\partial u}{\partial s} + y \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \cdot \frac{\partial u}{\partial s} + x \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$$

PDEn $\Rightarrow$

$$x \left(\frac{\partial u}{\partial s} + y \frac{\partial u}{\partial t} \right) - y \left(x \frac{\partial u}{\partial t} \right) = u$$

$$s \cdot \frac{\partial u}{\partial s} = u \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{1}{s} u = 0$$

Integrerande faktorn $\exp(-\ln s) = \frac{1}{s}$

$$\left(\frac{1}{s} u \right)'_s = 0$$

$$u(s, t) = s \cdot C(t)$$

Svar: Allmän lösning $u(x, y) = x \cdot C(xy)$

(b) $u(x, \frac{1}{x^2}) = x \cdot C(\frac{1}{x}) = x \ln(1 + \frac{1}{x})$

Sätt $\alpha = \frac{1}{x}$:

$$C(\alpha) = \ln(1 + \alpha)$$

Svar: Partikulärlösning

$$u(x, y) = x \cdot \ln(1 + xy)$$

② (a) Mult. PDE med testfunktion φ och integrers:

$$\int_D (-\Delta u + u) \cdot \varphi \, dx = \int_D f \cdot \varphi \, dx$$

$$\text{Green} \Rightarrow - \int_D \underbrace{\nabla u \cdot \nabla \varphi}_{\substack{\text{gränsvillkor} \\ \text{= 0}}} \, dx + \int_D \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_D u \cdot \varphi \, dx = \int_D f \cdot \varphi \, dx$$

$$\text{bilagade } (u, \varphi)\text{-termen: } a(u, \varphi) = \int_D (\nabla u \cdot \nabla \varphi + u \varphi) \, dx$$

Linjära R-termer: $L(\varphi) = \int_D f \cdot \varphi dx + \int_{\partial D} g \cdot \varphi ds$

2

Inga randvillkor behövs för $\varphi \Rightarrow$
 funktionsrum $V = H^1(D)$.

Svar: Variationselv.:

$$\int_D (\nabla u \cdot \nabla \varphi + u \varphi) dx = \int_D f \cdot \varphi dx + \int_{\partial D} g \cdot \varphi ds$$

Funktionsrum: $u, \varphi \in H^1(D)$.

(b) I (e) visades u lösa BVP $\Rightarrow$

u löser variationselv.

Antag nu att $u \in H^1(D)$ och

$$\forall \varphi \in H^1(D): \int_D (\nabla u \cdot \nabla \varphi + u \varphi) dx = \int_D f \varphi dx + \int_{\partial D} g \varphi ds \quad (*)$$

Green $\Rightarrow$

$$\int_D \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\partial D} \nabla u \cdot \nu \varphi ds - \int_D \Delta u \cdot \varphi dx$$

$$(*) \Leftrightarrow \int_D (\Delta u + f - u) \varphi dx = \int_{\partial D} (\nabla u \cdot \nu - g) \varphi ds, \quad \forall \varphi \in H^1(D)$$

Ts. först $\varphi \in H_0^1(D)$, se

$$\int_D (\Delta u + f - u) \varphi dx = 0$$

Om $x \in D$ och $\varphi \rightarrow \delta_x$ svagt visar detta

$$\Delta u(x) + f(x) - u(x) = 0.$$

$\therefore -\Delta u + u = f$ i hela D .

Se enl. (*):

$$0 = \int_{\partial D} (\nabla u \cdot \nu - g) \varphi ds, \quad \forall \varphi \in H^1(D).$$

Om $x \in \partial D$ och $\varphi \rightarrow \delta_x$ svagt visar detta att

$$\nabla u(x) \cdot \nu - g(x) = 0$$

$\therefore \nabla u = g$ på hela ∂D

Detta visar att u löser BVP.

(c) Randvillkaret är naturligt eftersom det inte förekommer i def. av $V = H^1(D)$.

③ (a) Eigenfunktioner sökes s.a.

3

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda u(x), & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ u'(0) = 0, & u(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x) = A \cos(\sqrt{\lambda} x) + B \sin(\sqrt{\lambda} x)$$

$$u'(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$u(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow \cos(\sqrt{\lambda} \cdot \frac{\pi}{2}) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda} = 2n+1, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

Svar: egenfunktionerna är

$$\cos((2n+1)x), \quad n=1, 2, \dots$$

(b) Vi söker lösningar på formen

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{u}_t(n) \cdot \cos((2n+1)x)$$

PDEn $\Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \partial_t^2 \hat{u}_t(n) \cdot \cos((2n+1)x) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{u}_t(n) (-(2n+1)^2) \cos((2n+1)x)$$

Identifikation av Fouriers koeff. $\Rightarrow$

$$\partial_t^2 \hat{u}_t(n) + (2n+1)^2 \hat{u}_t(n) = 0, \quad \forall n.$$

För fixt n har denna ODE lösning

$$\hat{u}_t(n) = A_n \cos((2n+1)t) + B_n \sin((2n+1)t)$$

Svar: $u(t, x) =$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos((2n+1)t) + B_n \sin((2n+1)t)) \cdot \cos((2n+1)x)$$

④ Eigenvärde / vektorer för

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{sökes}$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} - \lambda & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1+2\lambda)^2 - 25 = 0$$

$$4\lambda^2 + 4\lambda - 24 = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 2, \lambda = -3$$

egenvektorer:

$$\lambda = 2: \left(\begin{array}{cc|c} -5/2 & 5/2 & 0 \\ 5/2 & -5/2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -3: \left(\begin{array}{cc|c} 5/2 & 5/2 & 0 \\ 5/2 & 5/2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Diagonalisering:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_T \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}}_D \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}}_{T^{-1}}$$

$$u' = Au = TDT^{-1}u \Leftrightarrow v' = Dv \text{ för } v = T^{-1}u$$

$$\begin{cases} v_1' = 2v_1 \\ v_2' = -3v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1(t) = c_1 e^{2t} \\ v_2(t) = c_2 e^{-3t} \end{cases}$$

$$u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Svar: } u(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow u_1(t) = \frac{1}{2}(e^{2t} + e^{-3t}), \quad u_2(t) = \frac{1}{2}(e^{2t} - e^{-3t})$$

⑤ (a) Se becken defin. 7.1.1

(b) Se becken prop. 7.1.4

⑥ (a) Att $u(t, x)$ är tidsharmonisk betyder att
 $u(t, x) = \operatorname{Re}(v(x) e^{-i\omega t})$

där $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ är en komplexvärd amplitud.

(b) Antag att $u(t, x)$ är en tidsharmonisk
lång vågvektions

$$\partial_t^2 u = c^2 \Delta u$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(v(x) (-i\omega)^2 e^{-i\omega t}) = \operatorname{Re}(\Delta v \cdot e^{-i\omega t})$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}((c^2 \Delta v + \omega^2 v) e^{-i\omega t}) = 0, \quad \forall t, x$$

$$\Leftrightarrow c^2 \Delta v + \omega^2 v = 0, \quad \forall x$$

Med värdet $k = \omega/c$ löser v Helmholtz eqn

$$\Delta v + k^2 v = 0.$$

(6) Vågekvationen för $u(t, x)$ är hyperbolisk, 3
 då koefficientmatrisen för principaldelen
 $c^2 \Delta u - \partial_t^2 u$ är $\begin{bmatrix} -1 & c^2 & 0 \\ 0 & c^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix}$ och har ett e -värd < 0
 och de andra > 0 .

Helmholtz ekv. för $v(x)$ är elliptisk, då
 koef.-matrisen för principaldelen Δu är
 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ och har alla e -värden > 0 .

(7) (a) Schrödingerekv. är vågekv.

$\partial_t u = k \Delta u$, men med en imaginär
 värmeledningskonstant $k = i \frac{\hbar}{2m}$

Enligt formelboken är värmekärnan

$$H_k(x) = \frac{1}{(4\pi i k t)^{3/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4 i k t}}$$

och lösningen till IVP:n är

$$u(t, x) = H_k(x) * g(x), \text{ dvs}$$

Svar: $u(t, x) = \frac{1}{(4\pi i \frac{\hbar}{2m} t)^{3/2}} \iint_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{|x-y|^2}{4 i \frac{\hbar}{2m} t}} g(y) dy$

(b) Med $k = i \frac{\hbar}{2m}$ imaginär ser vi att
 $|e^{-\frac{|x-y|^2}{4 i \frac{\hbar}{2m} t}}| = 1$ för alla $t \in \mathbb{R}$.

så Lösningssformeln är giltig för $t > 0$ såväl
 som $t < 0$, förutsatt $\iint_{\mathbb{R}^3} |g(y)| dy < \infty$.

Vidare påverkar alla startvärden $g(x)$
 värdet $u(t, x)$.

Svar: Schrödingerekv. är reversibel,
 och har oändlig utbreddningshastighet.