

MATEMATIK

Göteborgs Universitet

Tentamen i Partiella differentialekvationer, MVE695

2025-04-15, kl. 14.00-18.00

Hjälpmedel: Endast medföljande formelblad.

Examinator: Andreas Rosén

Under skrivningstiden nås examinator via telefon 0317725365.

Totalt antal skrivningspoäng är 50. Till dessa läggs bonuspoäng. Betygsgränser: 20 poäng för betyget 3, 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget 5, inklusive bonus.

Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara välskrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.

Lösningsförslag och besked om rättning och granskning lämnas via kursens hemsida.

1. (a) Bestäm den allmänna lösningen $u(x, y)$ till

$$2x u'_x - y u'_y = u + y^2, \quad x, y > 0.$$

(5p)

- (b) Finn partikulärlösningen till ovan PDE som uppfyller randvillkoret

$$u(1, y) = e^{-y}, \quad \text{för alla } y > 0.$$

(2p)

2. Finn lösningen $u(t, x)$, $t > 0$, $0 < x < \pi$, till PDE-problemet

$$\begin{cases} u'_t = 2u''_{xx}, & t > 0, 0 < x < \pi, \\ u'_x = 0, & x = 0 \text{ och } x = \pi, \\ u(0, x) = x, & t = 0, \end{cases}$$

genom lämplig egenfunktionsutveckling.

(7p)

3. (a) Finn Poissonkärnan $P(y; x_1, x_2)$ för övre halvplanet

$$D = \{(x_1, x_2) ; x_2 > 0\},$$

det vill säga den funktion P definierad för $y \in \mathbf{R}$ och $x = (x_1, x_2) \in D$ sådan att

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P(y; x) g(y) dy$$

är den harmoniska funktion i D som har randvärden $u(y, 0) = g(y)$.

(5p)

- (b) Beräkna lösningen till Dirichletproblemet

$$\begin{cases} \Delta u(x_1, x_2) = 0, & x_2 > 0, \\ u(x_1, 0) = 1, & 0 < x_1 < 1, \\ u(x_1, 0) = 0, & x_1 < 0 \text{ eller } x_1 > 1. \end{cases}$$

(2p)

Var god vänd!

4. Låt $D \subset \mathbf{R}^2$ vara ett begränsat område med slät randkurva ∂D .

- (a) Förklara noggrannt vilka funktioner u som tillhör Sobolevrummet $H^1(D)$, och vad Sobolevnormen $\|u\|_{H^1(D)}$ är. (2p)
- (b) Visa att det finns en konstant $C < \infty$ sådan att olikheten

$$\int_{\partial D} |u(x)|^2 ds(x) \leq C \|u\|_{H^1(D)}^2$$

gäller för alla funktioner $u(x)$ i D som är släta upp till ∂D . Du får använda att det finns ett kontinuerligt deriverbart vektorfält $V(x)$ i $\mathbf{R}^2$ sådant att $V(x)$ är en normalvektor till ∂D i varje punkt $x \in \partial D$. (5p)

5. Beräkna den svaga Laplace-derivatan

$$\Delta \ln(x_1^2 + x_2^2)$$

utifrån definitionen av svag derivata. (7p)

6. (a) Beräkna Fouriertransformen $\widehat{R}_t(\xi)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, av Riemannfunktionen $R_t(x)$, $x = (x_1, x_2)$, i planet $\mathbf{R}^2$. Ledning: R_t , och därmed också $\widehat{R}_t$, är radiella funktioner. (6p)

- (b) Förklara hur man ser på Riemannfunktionen om Huygens princip gäller i $\mathbf{R}^2$. (2p)

7. (a) Formulera den starka formen av maximumprincipen för harmoniska funktioner. (2p)

- (b) Låt $u(x_1, x_2)$ vara en funktion i området $D \subset \mathbf{R}^2$ givet av $x_1^2 + 7x_2^2 > 13$ som löser

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{i } D, \\ u = 1 & \text{på } \partial D, \\ u \rightarrow \infty & \text{då } x \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Visa att $\partial_\nu u \geq 0$ på hela ∂D , där ν betecknar enhetsnormalvektorn på ∂D som pekar in i D . (5p)

Formelblad MVE695

Heat equation:

$$H_t(x) = (4\pi kt)^{-n/2} e^{-|x|^2/(4kt)}$$

Laplace equation:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \ln |x| \quad \Phi(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}$$

Wave equation:

$$R_t(x) = \begin{cases} 1/(2c) \\ 0 \end{cases} \quad R_t(x) = \begin{cases} (2\pi c)^{-1}(c^2 t^2 - |x|^2)^{-1/2} \\ 0 \end{cases}$$
$$\langle R_t, \phi \rangle = (4\pi c^2 t)^{-1} \int_{|x|=ct} \phi(x) dS(x)$$

Helmholtz equation:

$$\Phi_k(x) = -\frac{i}{4}(J_0(k|x|) + iY_0(k|x|)) \quad \Phi_k(x) = -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}$$

① (a) Karakteristisk ekv:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{2x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dx}{2x}$$

$$\ln y = -\frac{1}{2} \ln x + C$$

$$xy^2 = e^C$$

Längst variabelbyte: $\begin{cases} s = x \\ t = xy^2 \end{cases}$

Kedjeregeln $\Rightarrow$

$$u'_x = 1 \cdot u'_s + y^2 \cdot u'_t$$

$$u'_y = 0 \cdot u'_s + 2xy \cdot u'_t$$

Insatt i PDEn $\Rightarrow$

$$2x(u'_s + y^2 u'_t) - y(2xy u'_t) = u + y^2$$

$$2s \cdot u'_s = u + t$$

$$u'_s - \frac{1}{2s} u = \frac{t}{2s^2}$$

Integrerande faktor: $e^{-\frac{1}{2} \ln s} = \frac{1}{\sqrt{s}}$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{s}} u \right)'_s = \frac{t}{2s^{5/2}}$$

$$u(s, t) = \sqrt{s} \left(-\frac{t}{3s^{3/2}} + C(t) \right)$$

Allmän lösning:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -\frac{xy^2}{3x} + \sqrt{x} \cdot C(xy^2) \\ &= -\frac{1}{3} y^2 + \sqrt{x} \cdot C(xy^2) \end{aligned}$$

(b) $x=1 \Rightarrow$

$$u(1, y) = -\frac{1}{3} y^2 + C(y^2) = e^{-y}, \quad \forall y > 0$$

$$y^2 = \alpha \Rightarrow$$

$$C(\alpha) = \frac{1}{3} \alpha + e^{-\sqrt{\alpha}}, \quad \forall \alpha > 0$$

Partikulär lösning:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -\frac{1}{3} y^2 + \sqrt{x} \left(\frac{1}{3} xy^2 + e^{-\sqrt{xy^2}} \right) \\ &= \frac{1}{3} (x^{3/2} - 1) y^2 + \sqrt{x} e^{-y\sqrt{x}} \end{aligned}$$

② Vi har Neumanns randvärden för $D = (0, \pi)$,
 så tillåtna egenfunktioner är
 $\cos(kx)$, $k = 0, 1, 2, \dots$

②

Ansetts:

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_t(k) \cos(kx)$$

Insättning i givna ODEer:

$$\sum_k \partial_t \hat{u}_t(k) \cdot \cos kx = \sum_k \hat{u}_t(k) (-2k^2) \cos(kx)$$

$$\therefore \forall k: \partial_t \hat{u}_t(k) = -2k^2 \hat{u}_t(k)$$

$$\Rightarrow \hat{u}_t(k) = e^{-2k^2 t} \hat{u}_0(k)$$

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_0(k) e^{-2k^2 t} \cos(kx)$$

Startdata kräver

$$\sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_0(k) \cdot \cos(kx) = x, \quad 0 < x < \pi.$$

Ortogonalitet $\Rightarrow$

$$\hat{u}_0(k) \int_0^{\pi} \cos^2 kx \, dx = \int_0^{\pi} x \cdot \cos kx \, dx$$

$$k=0 \Rightarrow \hat{u}_0(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{\pi}{2}$$

$$k \geq 1 \Rightarrow \hat{u}_0(k) \cdot \frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi} x \cdot \cos kx \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{k} x \sin kx \right]_0^{\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \sin kx \, dx$$

$$= \frac{1}{k^2} [\cos kx]_0^{\pi} = \frac{1}{k^2} ((-1)^k - 1)$$

$$= \begin{cases} 0, & k \text{ jämn} \\ -\frac{2}{k^2}, & k \text{ udda} \end{cases}$$

Svar: $u(t, x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{k \text{ udda} \\ k \geq 1}} \frac{1}{k^2} e^{-2k^2 t} \cos kx$

③ (a) Enligt speglingssmetoden är en Greensfunktion för D , med pol i x , (formelblad)

$$G(y, x) = \frac{1}{2\pi} \ln |y - x| - \frac{1}{2\pi} \ln |y - x^*|$$

där $x^* = (x_1, -x_2)$ om $x = (x_1, x_2)$.

Greens 2:e formel $\Rightarrow$

$$\iint_D (\Delta_y G(y, x) u(y) - G(y, x) \Delta u) dy = \sum_x(y)$$

$$= \int_{\partial D} \left(\frac{\partial G}{\partial \nu_y}(y, x) u(y) - G \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds_y$$

$\overset{0}{=} \text{då } y \in \partial D$

$$\Rightarrow u(x) = \int -\frac{\partial G}{\partial y_2}(y, 0; x) g(y) dy_1$$

$$G = \frac{1}{4\pi} \ln((y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2) - \frac{1}{4\pi} \ln((y_1 - x_1)^2 + (y_2 + x_2)^2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial y_2} \Big|_{y_2=0} &= \frac{1}{4\pi} \frac{2(0 - x_2)}{(y_1 - x_1)^2 + x_2^2} - \frac{1}{4\pi} \frac{2(0 + x_2)}{(y_1 - x_1)^2 + x_2^2} \\ &= -\frac{1}{\pi} \frac{x_2}{(y_1 - x_1)^2 + x_2^2} \end{aligned}$$

$$\therefore u(x) = \int \underbrace{\frac{1}{\pi} \frac{x_2}{(y - x_1)^2 + x_2^2}}_{= P(y; x_1, x_2)} g(y) dy$$

(b) Dirichlet data är nu

$$g(y) = \begin{cases} 1 & y \in (0, 1) \\ 0 & y \notin (0, 1) \end{cases}$$

(a) $\Rightarrow$

$$u(x) = \int_0^1 \frac{1}{\pi} \frac{x_2}{(y - x_1)^2 + x_2^2} dy$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\arctan \frac{y - x_1}{x_2} \right]_{y=0}^1$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\arctan \frac{1 - x_1}{x_2} + \arctan \frac{x_1}{x_2} \right)$$

(4) (a) En funktion $u(x)$ definierad på D tillhör D om u och dess svaga derivator $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ och $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ alla tillhör $L_2(D)$, dvs $\int_D u^2 dx$, $\int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 dx$ och $\int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 dx$ alla är ändliga / konvergente.

Normen är

$$\|u\|_{H^1(D)} = \left(\int_D (|\nabla u|^2 + u^2) dx \right)^{1/2}$$

(b) Se Prop. 2.2.3 i boken.

(5) Låt φ vara en $\mathbb{R}^2$ -testfunktion.

$$\langle \Delta \ln(x_1^2 + x_2^2), \varphi \rangle = (-1)^2 \langle \ln(x_1^2 + x_2^2), \Delta \varphi \rangle$$

↑
def. av svag derivata

$$= \iint \ln(x_1^2 + x_2^2) \Delta \varphi dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{x_1^2 + x_2^2 > \varepsilon^2} \ln(x_1^2 + x_2^2) \Delta \varphi dx$$

↑
konvergent
integral

= /Green 2 med normalderivata $\partial_\nu = -\partial_r$ /

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{x_1^2 + x_2^2 = \varepsilon^2} (\ln \varepsilon^2 (-\partial_r \varphi) - (-\partial_r \ln r^2) \varphi) ds + \iint_{x_1^2 + x_2^2 > \varepsilon^2} \Delta \ln(x_1^2 + x_2^2) \varphi dx \right)$$

Analys av de tre termerna:

$$\bullet \left| \int_{x_1^2 + x_2^2 = \varepsilon^2} \ln \varepsilon^2 \partial_r \varphi ds \right| \leq 2\pi \varepsilon \cdot \ln \varepsilon^2 \cdot \max_{x_1^2 + x_2^2 = \varepsilon^2} |\nabla \varphi|$$

$\rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$

$$\bullet \int_{x_1^2 + x_2^2 = \varepsilon^2} (\partial_r \ln r^2) \varphi ds = \frac{2}{\varepsilon} \int_{x_1^2 + x_2^2 = \varepsilon^2} \varphi(x_1, x_2) ds$$

$\rightarrow 4\pi \cdot \varphi(0,0)$

• För $x_1^2 + x_2^2 \geq \varepsilon^2$ är den klassiska derivatan $\Delta \ln(x_1^2 + x_2^2) = 0$.

Svar: $\Delta \ln(x_1^2 + x_2^2) = 4\pi \delta_{(0,0)}$

⑥ (a) Enligt formelboken är

⑤

$$R_t(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi c} \frac{1}{\sqrt{c^2 t^2 - |x|^2}} & , |x| < ct \\ 0 & , |x| > ct \end{cases}$$

F-transformen:

$$\hat{R}_t(\xi) = \iint_{\mathbb{R}^2} R_t(x) e^{-ix \cdot \xi} dx$$

$$= \iint_{x_1^2 + x_2^2 < c^2 t^2} \frac{1}{2\pi c} \frac{e^{-ix_1 \xi_1 - ix_2 \xi_2}}{(c^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2}} dx_1 dx_2$$

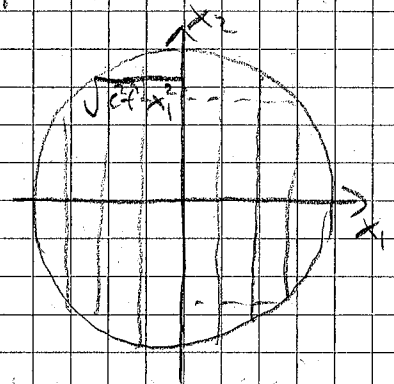
Da $\hat{R}_t(\xi)$ är radiell, räcker det att beräkna

$\hat{R}_t$ i $\xi = (r, 0)$ för $r > 0$.

$$\hat{R}_t(r, 0) = \frac{1}{2\pi c} \iint_{x_1^2 + x_2^2 < c^2 t^2} \frac{e^{-irx_1} dx_1 dx_2}{\sqrt{c^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi c} \int_{-ct}^{ct} \left(\int_{-\sqrt{c^2 t^2 - x_1^2}}^{\sqrt{c^2 t^2 - x_1^2}} \frac{dx_2}{\sqrt{c^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2}} \right) e^{-irx_1} dx_1$$

= I



$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{(c^2 t^2 - x_1^2)(1-s^2)}} \sqrt{c^2 t^2 - x_1^2} ds$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{(c^2 t^2 - x_1^2)(1-s^2)}} \sqrt{c^2 t^2 - x_1^2} ds = \left[\arccos s \right]_{s=-1}^1$$

$$\Rightarrow \hat{R}_t(r, 0) = \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{ct} e^{-irx_1} dx_1$$

$$= \left[\frac{1}{-ir} e^{-irx_1} \right]_{x_1=-ct}^{ct} \cdot \frac{1}{2c} = \frac{e^{irct} - e^{-irct}}{2c ir}$$

$$= \frac{\sin(rct)}{rc}$$

Svar: $\hat{R}_t(\xi) = \frac{\sin(c|\xi|t)}{c|\xi|}$

