MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen i Partiella differentialekvationer, MVE695
2025-01-13, kl. 8.30-12.30
Hjälpmedel: Endast medföljande formelblad.
Examinator: Andreas Rosén
Under skrivningstiden nås examinator via telefon 0317725365.

Totalt antal skrivningspoäng är 50. Till dessa läggs bonuspoäng. Betygsgränser: 20 poäng för betyget 3, 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget 5, inklusive bonus.
Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara välskrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.
Lösningsförslag och besked om rättning och granskning lämnas via kursens hemsida.

---

1. (a) Bestäm den allmänna lösningen $u(x,y)$, $0 \le \sqrt{2}x < y$, till

$$y\,u'_x + 2x\,u'_y = x\,u.$$

(5p)

(b) Finn partikulärlösningen till ovan PDE som uppfyller randvillkoret

$$u(0,y) = y, \qquad \text{för alla } y > 0.$$

(2p)

2. (a) Låt f vara envariabelfunktionen

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \ge 1, \\ x^3, & |x| < 1. \end{cases}$$

Beräkna den svaga derivatan f'. Skissa f och f', och förklara resultatet. (3p)

(b) Avgör om envariabelfunktionerna

$$f_k(x) = k^3 x^2 e^{-k^2 x^2}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

konvergerar svagt då $k \to \infty$, och bestäm i så fall gränsdistributionen. (3p)

3. (a) Beräkna Fouriertransformen av värmekärnan, för rumsdimension $n = 1$ och värmeledningskonstant $k = 1/2$. (3p)

(b) Beräkna lösningen $u(t,x)$, $t > 0$, $x \in \mathbf{R}$, till startvärdesproblemet

$$\begin{cases} u'_t = \frac{1}{2} u''_{xx}, & t > 0, x \in \mathbf{R}, \\ u = e^{x - x^2}, & t = 0. \end{cases}$$

(5p)

Var god vänd!

4. (a) Formulera den medelvärdesegenskap som harmoniska funktioner i $\mathbf{R}^3$ har. (Bevis efterfrågas ej.) (2p)

   (b) Formulera och bevisa den starka formen av maximumprincipen för harmoniska funktioner på ett område $D \subset \mathbf{R}^3$. (5p)

5. Låt $u(t,x)$ vara den funktion som löser $u''_{tt} = u''_{xx}$ för $t \geq 0$, $x \in \mathbf{R}$, och där $u(0,x) = 0$ för $x \in \mathbf{R}$, och

$$u'_t(0,x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

   (a) Beräkna $u(1/2,x)$ och $u(5,x)$ för alla $x \in \mathbf{R}$, och skissa graferna för dessa två funktioner av x. (5p)

   (b) Bevisa eller motbevisa att Huygens princip gäller för vågutbredning i en rumsdimension. (2p)

6. (a) Formulera dimensionsatsen, det vill säga det samband som råder mellan nollrum (null space) $\mathbf{N}(A)$ och värdemängd (range) $\mathbf{R}(A)$ för alla kvadratiska m/m matriser A. (Bevis efterfrågas ej.) (2p)

   (b) Låt

$$Kh(x) = \int_\Gamma k(x,y)h(y)dS(y), \qquad x \in \Gamma,$$

   vara en integraloperator på randen $\Gamma = \partial D$ av ett begränsat område $D \subset \mathbf{R}^n$. Definiera vad som menas med att $k(x,y)$ är svagt singulär. Formulera vad som gäller angående lösbarhet i $L_2(\Gamma)$ av integralekvationen

$$h(x) + \int_\Gamma k(x,y)h(y)dS(y) = g(x), \qquad x \in \Gamma,$$

   för given funktion $g \in L_2(\Gamma)$. (4p)

   (c) Låt K vara en integraloperator på Γ med svagt singulär kärna $k(x,y)$ som ovan, och antag att $Kh = h$ om och endast om h är en konstant funktion. Bevisa att integralekvationen

$$-f(x) + \int_\Gamma k(y,x)f(y)dS(y) = 0, \qquad x \in \Gamma,$$

   har ett endimensionellt rum av lösningar f. (2p)

7. Betrakta egenvärdesproblemet $-\Delta u = \lambda u$ på ett område $D \subset \mathbf{R}^2$, med Robins randvillkor $\partial_\nu u + u = 0$ på randen ∂D. Låt Robin-Rayleighkvoten $R_r(f)$ för en funktion $f \in H^1(D)$, $f \neq 0$, vara

$$R_r(f) = \frac{\iint_D |\nabla f|^2 dxdy + \int_{\partial D} f^2 ds}{\iint_D f^2 dxdy}.$$

   Antag nu att $R_r(f)$ är minimalt för $f = u \in H^1(D)$. Visa att u är en egenfunktion och uppfyller Robins randvillkor. (7p)

Formelblad MVE695

Heat equation:

$$H_t(x) = (4\pi kt)^{-n/2} e^{-|x|^2/(4kt)}$$

Laplace equation:

$$\Phi(x) = \tfrac{1}{2\pi} \ln |x| \qquad \Phi(x) = -\tfrac{1}{4\pi|x|}$$

Wave equation:

$$R_t(x) = \begin{cases} 1/(2c) \\ 0 \end{cases} \qquad R_t(x) = \begin{cases} (2\pi c)^{-1}(c^2t^2 - |x|^2)^{-1/2} \\ 0 \end{cases}$$

$$\langle R_t, \phi \rangle = (4\pi c^2 t)^{-1} \int_{|x|=ct} \phi(x) dS(x)$$

Helmholtz equation:

$$\Phi_k(x) = -\tfrac{i}{4}(J_0(k|x|) + iY_0(k|x|)) \qquad \Phi_k(x) = -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}$$

Lösningsförslag MVE695 250113

(1) (a) Karakteristisk ekv.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y} \Rightarrow \int y\,dy = \int 2x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = x^2 + C$$

Gör variabelbytet $\begin{cases} s = x \\ t = y^2/2 - x^2 \end{cases}$

Kedjeregeln $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 1\frac{\partial u}{\partial s} - 2x\frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 + y\frac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$$

Insatt: $y\left(\frac{\partial u}{\partial s} - \cancel{2x\frac{\partial u}{\partial t}}\right) + 2x\left(\cancel{y\frac{\partial u}{\partial t}}\right) = x \cdot u$

$$\sqrt{2t+2s^2}\,\frac{\partial u}{\partial s} = su$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{s}{\sqrt{2}\sqrt{t+s^2}}u = 0$$

Integrerande faktor $= \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{t+s^2}\right)$

$$u(s,t) = C(t)\cdot\exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{t+s^2}\right)$$

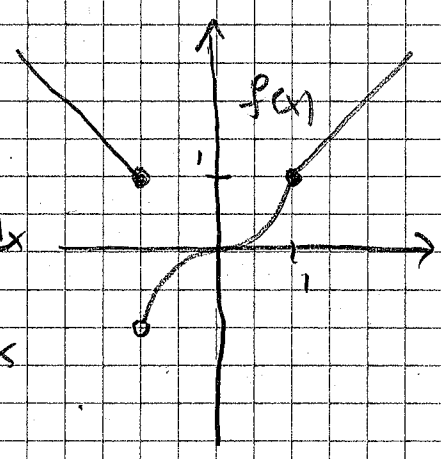
<u>Svar</u>: $u(x,y) = e^{y/2}\cdot C\left(\frac{y^2}{2} - x^2\right)$

(b) $y = u(0,y) = e^{y/2}\,C\Big(\underbrace{\frac{y^2}{2}}_{=:\alpha}\Big) \quad \forall y > 0.$

$$C(\alpha) = \sqrt{2\alpha}\,e^{-\sqrt{\alpha/2}}$$

<u>Svar</u>: $u(x,y) = e^{y/2}\sqrt{y^2-2x^2}\,e^{-\sqrt{y^2/4 - x^2/2}}$

(2) $\varphi(x)$ = testfunktion $\Rightarrow$



$$\langle f', \varphi\rangle = -\langle f, \varphi'\rangle$$

$$= -\int_{-\infty}^{-1}(-x)\varphi'(x)\,dx - \int_{-1}^{1} x^3\varphi'(x)\,dx - \int_{1}^{\infty} x\varphi'(x)\,dx$$

$$= \left[+x\varphi\right]_{-\infty}^{-1} - \int_{-\infty}^{-1}\varphi(x)\,dx - \left[x^3\varphi\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} 3x^2\varphi\,dx$$

$$- \left[x\varphi\right]_{1}^{\infty} + \int_{1}^{\infty}\varphi\,dx =$$

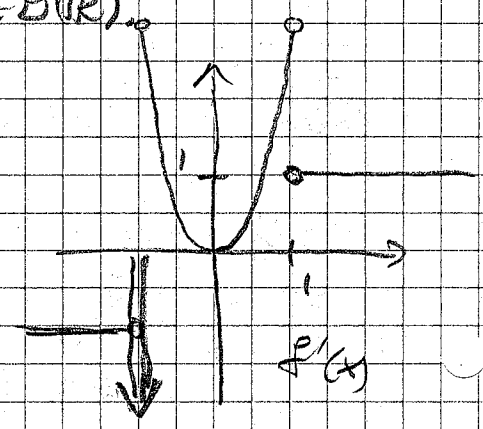
$$= -\varphi(-1) - \varphi(1) - \varphi(-1) + \varphi(1) + \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

2

där

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x < -1 \\ 3x^2, & -1 < x < 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$\therefore \langle f', \varphi \rangle = \langle -2\delta_{-1} + g, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.



<u>Svar</u>: $f' = -2\delta_{-1} + g$

Förklaring: g är den klassiska derivatan f' för $x \neq \pm 1$. Diracdeltat $-2\delta_{-1}$ uppkommer då f gör språng -2 vid $x = -1$.

(b) φ = testfunktion $\Rightarrow$

$$\langle f_k, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} k^3 x^2 e^{-k^2x^2} \varphi(x)\,dx = \left/ y = kx,\ dy = k\,dx \right/$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2} \underbrace{\varphi\left(\frac{y}{k}\right)}_{\to \varphi(0)} dy \longrightarrow \varphi(0) \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2} dy}_{= I}$$

$$I = \left[-\frac{1}{2} y e^{-y^2} \right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-y^2} dy$$

$$= 0 + \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$\therefore \langle f_k, \varphi \rangle \longrightarrow \langle \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\delta_0, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

<u>Svar</u>: f_k konvergerar svagt mot $\sqrt{\pi}/2\ \delta_0$ då $k \to \infty$.

3 (a) Formelbladet, $n = 1$, $k = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$

$$H_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}$$

$$\hat{H}_t(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} e^{-ix\xi} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2t}(x + it\xi)^2 - \frac{t}{2}\xi^2 \right) dx = \left/ y = (x + it\xi)/\sqrt{2t},\ dy = dx/\sqrt{2t} \right/$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{t}{2}\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \sqrt{2t}\,dy = e^{-\frac{t}{2}\xi^2}$$

Svar: $\hat{H}_t(\xi) = e^{-\frac{t}{2}\xi^2}$

(b) $x - x^2 = -(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$

Lösningsformeln med värmekärnan:

$u_t = e^{\frac{1}{4}} e^{-(x-\frac{1}{2})^2} * H_t(x)$

$\hat{u}_t = e^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{i}{2}\xi} F\{e^{-x^2}\} \cdot \hat{H}_t(\xi)$

Med $t = \frac{1}{2}$ i (a) beräknas

$F\{e^{-x^2}\} \cdot \hat{H}_t(\xi) = \sqrt{\pi}\, e^{-\xi^2/4} e^{-\frac{t}{2}\xi^2}$

$= \sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{t+\frac{1}{2}}{2}\xi^2\right) = /$ ersätt t med $t+\frac{1}{2}$ i (a) $/$

$= F\{\sqrt{\pi}\, H_{t+\frac{1}{2}}(x)\}$

$\Rightarrow u(t,x) = e^{\frac{1}{4}} \sqrt{\pi}\, H_{t+\frac{1}{2}}(x-\frac{1}{2})$

$= \frac{e^{1/4}}{\sqrt{2t+1}} e^{-\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{2t+1}}$

Svar: $u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2t+1}} e^{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{(2x-1)^2}{2t+1}\right)}$

4 (a) Se bokens sats 7.3.2

(b) Se bokens sats 7.3.3 (5).

5 (a) Formelbladet ger lösningsformeln ($n=1$, $c=1$)

$u(t,x) = R_t(x) * h(x) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,dy$,

dvs d'Alemberts formel i fallet $u(0,x)=0$.

Här är $h(y) = \begin{cases} 1, & |y| \le 1 \\ 0, & |y| > 1. \end{cases}$

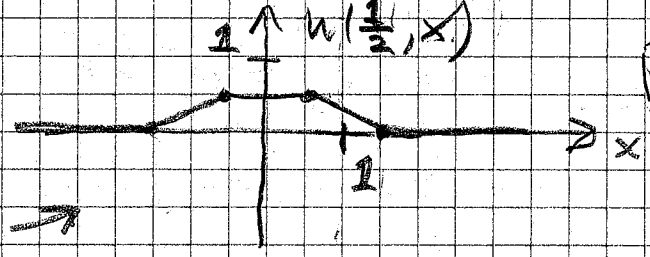
$\underline{t=\frac{1}{2}}$: $|x| < \frac{1}{2} \Rightarrow (x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2}) \subset (-1,1)$

$\Rightarrow u = \frac{1}{2}$

$|x| > \frac{3}{2} \Rightarrow (x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2}) \cap (-1,1) = \emptyset$

$\Rightarrow u = 0$

För $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ och $-\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}$ är $u(\frac{1}{2}, x)$ linjär. Detta ger grafen →



<u>$t=5$</u>: $|x| < 4 \Rightarrow (x-5, x+5) \supset (-1, 1)$

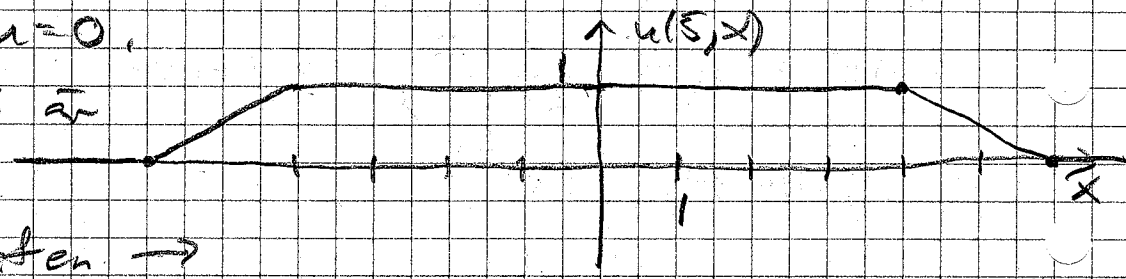
$$\Rightarrow u = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1\, dy = 1.$$

$|x| > 6 \Rightarrow (x-5, x+5) \cap (-1,1) = \emptyset$

$$\Rightarrow u = 0.$$

För $4 < |x| < 6$ är u linjär.

Detta ger grafen →



(b) Vägen $u(t,x)$ i (a) visar att Huygens principp INTE gäller i dimension $n=1$, ty startdata är $=0$ för $|x|>1$ och $u=1$, inte 0, bakom vågen / när vågen har passerat.

(6) (a) Nollrummet för $A = \{x \in \mathbb{R}^m;\ Ax = 0\}$

Värdemängd för $A = \{Ax \in \mathbb{R}^m;\ x \in \mathbb{R}^n\}$

Dimensionssatsen:

$$m - \dim R(A) = \dim N(A).$$

(b) $k(x,y)$ är svagt singulär om det finns en konstant $C < \infty$ och en exponent $\alpha < \Gamma$:s dimension, s.a. $|k(x,y)| \le \frac{C}{|x-y|^\alpha}$, $\forall x, y \in \Gamma$.

Om k är svagt singulär, finns ett ändligt heltal d, linjärt oberoende funktioner $\{h_1, \dots, h_d\} \subset L_2(\Gamma)$ och linjärt ober. fkner $\{g_1, \dots, g_d\} \subset L_2(\Gamma)$, sådana att

ekvationen $h + Kh = g$ är lösbart omm $\int_\Gamma g(x)\, g_j(x)\, ds(x) = 0$, $j = 1, \dots, d$, och om h i så fall är en partikulär lösning, är $h + t_1 h_1 + t_2 h_2 + \dots + t_d h_d$ den allmänna lösningen $t_1, \dots, t_d \in \mathbb{R}$.

(c) Ekvationen $-f + K^* f = 0$ gäller omm $\langle -f + K^* f, h \rangle = 0$ för alla $h \in L_2(\Gamma)$.

$\Leftrightarrow \langle f, -h + Kh \rangle = 0$

Enligt (b) är har $R(-I+K)$ ett 1-dimensionellt ortogonelt komplement spänt av $\{g_1\}$, eftersom nollrummet $N(-I+K)$ är 1-dim enligt antagande. Detta visar påståendet eftersom $-f + K^* f = 0 \Leftrightarrow f \in R(-I+K)^\perp$.

(7) Antag $R_r(f)$ är minimalt för $f = u$.

Låt $\varphi \in H^1(D)$ och betrakta envariabelfunktionen

$g(t) = R_r(u + t\varphi)$.

$g(t)$ har minimum i $t = 0 \Rightarrow g'(0) = 0$

$$g(t) = \frac{\iint_D (|\nabla u|^2 + t^2|\nabla\varphi|^2 + 2t\nabla u \cdot \nabla\varphi)\,dx\,dy + \int_{\partial D} (u^2 + t^2\varphi^2 + 2tu\varphi)\,ds}{\iint_D (u^2 + t^2\varphi^2 + 2tu\varphi)\,dx\,dy}$$

Kvotregeln och $t = 0 \Rightarrow$

$$\left(\iint_D 2\nabla u \cdot \nabla\varphi\,dx\,dy + \int_{\partial D} 2u\varphi\,ds\right) \cdot \iint_D u^2\,dx\,dy$$
$$- \left(\iint_D u^2\,dx\,dy + \int_{\partial D} u^2\,ds\right) \cdot \iint_D 2u\varphi\,dx\,dy = 0$$

Division med $2\iint_D u^2\,dx\,dy \Rightarrow$

$$\underbrace{\iint_D \nabla u \cdot \nabla\varphi\,dx\,dy}_{\underset{\text{Green}}{=}\int_{\partial D} \partial_\nu u \cdot \varphi\,ds - \iint_D \Delta u \cdot \varphi\,dx\,dy} + \int_{\partial D} u\varphi\,ds = \underbrace{R_r(u)}_{=:\lambda} \iint_D u\varphi\,dx\,dy$$

$$\Rightarrow \iint_D (\Delta u + \lambda u)\varphi \, dx\,dy = \int_{\partial D} (\partial_\nu u + u)\varphi \, ds, \quad \forall \varphi \in H^1(D).$$

$\boxed{6}$

- Velg først $\varphi \in H_0^1(D)$

  $\Rightarrow \langle \Delta u + \lambda u, \varphi \rangle = 0$ for alle testfunktioner φ i D.

  $\Rightarrow \Delta u + \lambda u = 0$

- Vi har $0 = \int_{\partial D} (\partial_\nu u + u)\varphi \, ds, \quad \forall \varphi \in H^1(D)$.

  $\Rightarrow \partial_\nu u + u = 0$ på hele ∂D eftersom alle dess φ-medelværden $= 0$.

$\therefore$ $-\Delta u = \lambda u$ med Robins randvillkor