MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen i Partiella differentialekvationer, MVE695
2024-08-19, kl. 14.00-18.00
Hjälpmedel: Endast medföljande formelblad.
Examinator: Andreas Rosén
Under skrivningstiden nås examinator via telefon 0317725365.

Totalt antal skrivningspoäng är 50. Till dessa läggs bonuspoäng. Betygsgränser: 20 poäng för betyget 3, 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget 5, inklusive bonus.
Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara välskrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.
Lösningsförslag och besked om rättning och granskning lämnas via kursens hemsida.

---

1. Betrakta randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) + b(x,y)u(x,y) = 0, & (x,y) \in D, \\ \partial_\nu u(x,y) = g(x,y), & (x,y) \in \partial D, \end{cases}$$

för $u(x,y)$ på området $D = \{(x,y)\ ;\ 1 < x^2 + y^2 < 3\}$, där $g(x,y)$ är randdata som antas kända och $b(x,y) = x^2 + y^2 + xy$.

   (a) Härled en variationsformulering av randvärdesproblemet. Ett funktionsrum V, en bilinjär funktional a på V och en linjär funktional L på V, ska alltså anges. (2p)

   (b) Visa att om u löser variationsproblemet, så löser u ranvärdesproblemet. (3p)

   (c) Visa att din bilinjära funktional a är koersiv. (3p)

2. Betrakta den tidsharmoniska våg, med vågtal k, som representeras av den komplexa amplituden

$$v(x,y) = e^{ikx} - e^{iky}.$$

Motivering och förklaring av begreppet krävs i var och en av följande tre frågor.

   (a) Avgör om v beskriver en fortskridande plan våg. (2p)

   (b) Avgör om v beskriver en stående våg. (2p)

   (c) Avgör om v beskriver en utåtgående våg. (2p)

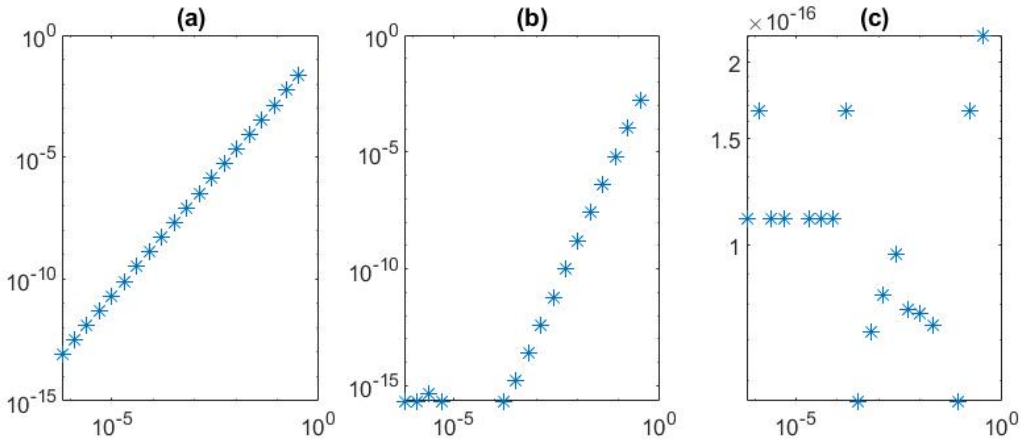
Var god vänd!

3. Formulera Fouriers lag för värmeledning och härled från denna värmeledningsekvationen i ett homogent och isotropt material, med en yttre värmekälla $f(t, \mathbf{x})$. Ange en icke-fysikalisk egenskap hos värmeledningsekvationen som visar att Fouriers lag inte kan vara en exakt modell för värmeledning. (7p)

4. Betrakta numerisk beräkning av integralen

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx$$

med den sammansatta trapetzregeln. Ange formeln för denna kvadraturregel, då $[-1, 1]$ indelas i N lika stora delintervall. I figuren anges hur det absoluta felet beror på längden $h = 2/N$ av delintervallen, för $f(x) = \cos(\pi x)$, $f(x) = e^x$ och $f(x) = (x^2 - 1)^3$ (ej nödvändigtvis i denna ordning). Matcha funktioner med felplottar, och motivera väl. (8p)



5. Lös start- och randvärdesproblemet

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u, & t > 0, 0 < x < \pi, \\ u = 0, & t = 0, \\ u = 0, & x = 0, \\ u = \sin(t), & x = \pi, \end{cases}$$

för $u(t, x)$, till exempel genom att skriva $u(t, x) = v(t, x) + w(t, x)$, där w har önskade start- och randvärden och v finnes genom utveckling i lämpliga egenfunktioner. (7p)

6. (a) Formulera medelvärdesprincipen för harmoniska funktioner. (Bevis efterfrågas ej.) (2p)

   (b) Formulera och bevisa den starka formen av maximumprincipen för harmoniska funktioner på ett område $D \subset \mathbf{R}^n$. (5p)

7. Antag att funktionen $u(t, x, y, z)$ löser $\partial_t^2 u = 25\Delta u$ för $t > 0$, $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, och att $u = 0$ då $t = 0$ och

$$\partial_t u(0, x, y, z) = \begin{cases} 3, & x^2 + y^2 + z^2 < 4, \\ 0, & x^2 + y^2 + z^2 > 4. \end{cases}$$

Beräkna $u(t, 0, 0, 0)$ för $t > 0$, och relatera svaret till Huygens princip. (7p)

Formelblad MVE695

Värmeledningsekvationen:

$$H_t(x) = (4\pi kt)^{-n/2} e^{-|x|^2/(4kt)}$$

Laplaces ekvation:

$$\Phi(x) = \tfrac{1}{2\pi} \ln |x| \qquad \Phi(x) = -\tfrac{1}{4\pi|x|}$$

Vågekvationen:

$$R_t(x) = \begin{cases} 1/(2c) \\ 0 \end{cases} \qquad R_t(x) = \begin{cases} (2\pi c)^{-1}(c^2t^2 - |x|^2)^{-1/2} \\ 0 \end{cases}$$

$$\langle R_t, \phi \rangle = (4\pi c^2 t)^{-1} \int_{|x|=ct} \phi(x) dS(x)$$

Helmholtz ekvation:

$$\Phi_k(x) = -\tfrac{i}{4}(J_0(k|x|) + iY_0(k|x|)) \qquad \Phi_k(x) = -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}$$

1 (a) För detta Neumannproblem är $V = H^1(D)$ lämplig.

Om u löser randvärdesproblemet och $u, \varphi \in V$, så

$$\iint_D (-\Delta u + bu)\varphi \, dxdy = 0$$

$$\Rightarrow \iint_D \nabla u \cdot \nabla \varphi - \int_{\partial D} \underbrace{\partial_\nu u}_{=g} \cdot \varphi + \iint_D bu\varphi = 0$$

Låt $a(u,\varphi) = \iint_D \left(\nabla u \cdot \nabla \varphi + (x^2+y^2+xy)\, u\varphi\right) dxdy$

och $L(\varphi) = \int_{\partial D} g \cdot \varphi \, d\sigma$

$\Rightarrow$ u löser variationsproblemet

$$a(u,\varphi) = L(\varphi), \quad \forall \varphi \in V. \qquad (*)$$

(b) Antag $u \in V$ löser $(*)$.

Green $\Rightarrow$

$$\int_{\partial D} \partial_\nu u \cdot \varphi - \iint_D \Delta u \cdot \varphi + \iint_D bu\varphi = \int_{\partial D} g\varphi, \quad \forall \varphi \in V$$

$$\Leftrightarrow \iint_D (-\Delta u + bu)\varphi = \int_{\partial D} (g - \partial_\nu u)\varphi$$

- Välj först $\varphi_n = 0$ på ∂D och $\varphi_n \to \delta_{\bar{x}}$ svagt, givet $\bar{x} \in D$

$$\Rightarrow \iint_D \underbrace{(-\Delta u + bu)}_{\downarrow \; -\Delta u(\bar{x}) + b(\bar{x})u(\bar{x})} \varphi_n = 0$$

$\because -\Delta u + bu = 0$ i hela D.

- Vi vet nu: $0 = \int_{\partial D} (g - \partial_\nu u)\varphi, \quad \forall \varphi \in H^1(D)$

Givet $\bar{y} \in \partial D$, välj nu $\varphi = \varphi_n \longrightarrow \delta_{\bar{y}}$ på ∂D.

$$\Rightarrow 0 = \int_{\partial D} \underbrace{(g - \partial_\nu u)}_{\downarrow \; g(\bar{y}) - \partial_\nu u(\bar{y})} \varphi_n$$

$\therefore \partial_\nu u = g$ på hela ∂D, så u löser BVP.

(c) Att $a(u,\varphi)$ är koersiv betyder att

$a(u,u) \geq c\,\|u\|_V^2$ för någon konstant $c>0$ och alla $u \in V$.

Konkret:

$$\iint_D (|\nabla u|^2 + b u^2)\,dx\,dy \geq c \iint_D (|\nabla u|^2 + u^2)\,dx\,dy$$

Vi undersöker hur liten $b(x,y) = x^2+y^2+xy$ kan bli i D.

$b = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \frac{1}{2}(x+y)^2 \geq \frac{1}{2}$ då D $(1 \leq x^2+y^2 \leq 3)$

Detta följer att

$a(u,u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_V^2$, så a är koersiv.

2 (a) En fortskridande plan våg beskrivs av en komplex amplitud på formen

$v(\bar{x}) = A\exp(i\bar{a}\cdot\bar{x})$ för något $\bar{a} = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ med $|\bar{a}| = k$.

Motsvarande våg blir då

$u(t,x,y) = A\cos(ax+by-\omega t)$.

Speciellt är $|v(\bar{x})|$ konstant för fortskridande plana vågor. I vårt exempel är

$v(0,0) = 0$, $v(0,\frac{\pi}{k}) = 2$,

så detta v beskriver inte en fortskridande plan våg.

(b) En stående våg beskrivs av en komplex amplitud som har konstant fas. I vårt exempel:

$v(0,\frac{\pi}{2k}) = 1-i$, så v beskriver inte en stående våg.

(c) En utåtgående våg har en komplex amplitud som uppfyller Sommerfelds strålningsvillkor

$\partial_r v - ikv = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)$ i $\mathbb{R}^2$. $\boxed{3}$

Tex längs negativa x-axeln

$v = e^{ik(-r)} - 1$ och

$\partial_r v = -\partial_x v = -ike^{ik(-r)}$

$\Rightarrow \partial_r v - ikv = -2ike^{-ikr} + ik \neq o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)$,

så v är ej en utåtgående våg.

(3) Låt $u(t,\bar{x})$ vara temperaturen i materialet vid tid t, position $\bar{x}$.

Fouriers lag säger att värmeflödestensiteten J uppfyller

$$J = -K\cdot\nabla u$$

för en skalär, positiv konstant $K>0$, om materialet är isotropt och homogent.

Betrakta nu värmeenergin $\iint_\Omega u\,d\bar{x}$ i ett område Ω. Vi har

$$\partial_t \iint_\Omega u\,d\bar{x} = \underbrace{\int_{\partial\Omega} J\cdot(-\nu)\,ds}_{\text{flöde in i } \Omega \text{ genom } \partial\Omega} + \underbrace{\iint_\Omega f\,d\bar{x}}_{\text{yttre värmetillförsel.}}$$

Gauss sats $\Rightarrow$

$$\partial_t \iint_\Omega u\,d\bar{x} = -\iint_\Omega \operatorname{div} J\,d\bar{x} + \iint_\Omega f\,d\bar{x}$$

$$\Rightarrow \iint_\Omega \left(\partial_t u - \operatorname{div}(K\nabla u) - f\right)d\bar{x} = 0$$

Detta gäller för alla Ω, så

$$\boxed{\partial_t u = K\Delta u + f}$$

I $\mathbb{R}^n$, med $f=0$ källfritt, vet vi att värmefördelningen från en punktkälla vid $t=0$, $\bar{x}=0$, är

$$H_t(x) = (4\pi Kt)^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4Kt}}$$

om värmeledningsekv. styr värmeutbredningen.
Speciellt sker detta med oändlig utbredningshastighet, vilket är ofysikaliskt,
i Fouriers lag är ej exakt.

(4) Trapetsregeln: $[-1, 1]$ indelas i N lika långa intervall $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, N$

$x_k - x_{k-1} = 2/N = h$

Approx. med linjär funktion mellan x_{k-1} och x_k

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{N} h \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}$$

$$= h\left(\frac{f(-1)}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) + \frac{f(1)}{2}\right)$$

Detta är den sammansatta trapetsregeln.

Hur snabbt den konvergerar beror på hur slät $f(x)$ är såsom 2-periodisk funktion.

- $\cos(\pi x)$ är C^∞ slät $\Rightarrow$ trapetsregeln konv superpolynomiellt.
- e^x: Då $e^1 \neq e^{-1}$ är inte e^x ens kontinuerlig som 2-periodisk funktion $\Rightarrow$ långsam konv.
- $(x^2-1)^3 = f(x)$: Här är $f(1) = f(-1)$

  $f'(x) = 6x(x^2-1)^2$, ..., $f^{(6)} = 6! =$ konstant

  Så f, f' och möjligen upp till $f^{(4)}$ är kont., men $f^{(5)}$ kan inte vara kontinuerlig som 2-periodisk funktion

  $\Rightarrow$ medium snabb konv.

Svar: (a) $\longleftrightarrow$ e^x

(b) $\longleftrightarrow$ $(x^2-1)^3$

(c) $\longleftrightarrow$ $\cos(\pi x)$

(5) $\boxed{5}$

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u, & t>0, 0<x<\pi \quad (1) \\ u = 0, & t=0 \quad (2) \\ u = 0, & x=0 \quad (3) \\ u = \sin t, & x=\pi \quad (4) \end{cases}$$

Tag $w(t,x) = \frac{x}{\pi}\sin t$.

w löser (2) – (4)

Sätt $u = v + w$. Linjäritet $\Rightarrow$ u löser (1)–(4)

$\Leftrightarrow$ v löser

$$\begin{cases} \partial_t v + \frac{x}{\pi}\cos t = \partial_x^2 v & (1') \\ v = 0, & t=0 \quad (2') \\ v = 0, & x=0 \text{ och } x=\pi \quad (3') \end{cases}$$

Pga 3' skriver vi v i sinus / Dirichlet egenfunktionsserie: $v(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{v}_k(t)\sin(kx)$.

Inhomogena termen i (1') i sinus $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(kx)$

och finn c_k genom ortogonalitet:

$$\int_0^\pi x\sin(kx)\,dx = c_k \int_0^\pi \underbrace{\sin^2(kx)}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2kx)}\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2}c_k = \left[-x\frac{\cos(kx)}{k}\right]_0^\pi + \frac{1}{k}\int_0^\pi \cos(kx)\,dx$$

$$= -\frac{\pi}{k}(-1)^k + \frac{1}{k^2}\left[\sin kx\right]_0^\pi = \frac{\pi}{k}(-1)^{k-1}$$

sinus koeff k i (1') $\Rightarrow$

$$\partial_t \hat{v}_k(t) + \frac{\cos t}{\pi}\cdot\frac{2}{k}(-1)^{k-1} = -k^2\hat{v}_k(t)$$

$$\left(e^{k^2 t}\hat{v}_k\right)' = e^{k^2 t}\frac{2}{\pi k}(-1)^k\cos t$$

$\hat{v}_k(0) = 0$ pga (2') $\Rightarrow$

$$e^{k^2 t}\hat{v}_k(t) = \frac{2(-1)^k}{\pi k}\int_0^t e^{k^2 s}\cos(s)\,ds$$

$$= \frac{2(-1)^k}{\pi k}\,\mathrm{Re}\left[\frac{e^{(k^2+i)s}}{k^2+i}\right]_0^t = \frac{2(-1)^k}{\pi k}\,\mathrm{Re}\left(\frac{e^{(k^2+i)t}-1}{k^2+i}\right)$$

$$= \frac{2(-1)^k}{\pi k}\,\frac{(e^{k^2 t}\cos t - 1)k^2 + e^{k^2 t}\sin t}{k^4+1}$$

Svar: $u(t,x) = \frac{x}{\pi}\sin t +$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{\pi k} \frac{k^2\cos t + \sin t - k^2 e^{-k^2 t}}{k^4+1} \cdot \sin(kx)$$

6 (a) Se boken sats 7.2.2.

(b) Se boken sats 7.2.3 (5).

7 Med hjälp av formelbladet kommer vi i håg att Kirchhoffs lösningsformel för startvärdesproblem i $\mathbb{R}^3$ för vågekvationen ger

$$u(t,\bar{0}) = \frac{1}{100\pi t} \int_{|\bar{x}-\bar{0}|=5t} h(\bar{y})\, dS(\bar{y})$$

där $h(\bar{x}) = \begin{cases} 3 & ; |\bar{x}| < 2 \\ 0 & ; |\bar{x}| > 2 \end{cases}$ är given startdata.

- $t < \frac{2}{5} \Rightarrow u(t,\bar{0}) = \frac{1}{100\pi t} \cdot 3 \cdot 4\pi (5t)^2 = 3t$
- $t > \frac{2}{5} \Rightarrow u(t,\bar{0}) = 0$. Detta sista är i enlighet med Huygens princip, enligt vilken alltid $u=0$ när vågen passerat.

Svar: $u(t,\bar{0}) = \begin{cases} 3t, & t < \frac{2}{5} \\ 0, & t > \frac{2}{5} \end{cases}$