MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen i Partiella differentialekvationer, MVE695
2024-04-04, kl. 14.00-18.00
Hjälpmedel: Endast medföljande formelblad.
Examinator: Andreas Rosén
Under skrivningstiden nås examinator via telefon 0317725365.

Totalt antal skrivningspoäng är 50. Till dessa läggs bonuspoäng. Betygsgränser: 20 poäng för betyget 3, 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget 5, inklusive bonus.
Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara välskrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.
Lösningsförslag och besked om rättning och granskning lämnas via kursens hemsida.

---

1. Finn lösningen $u(x,y)$ till PDEn
$$x\,\partial_x u - \sqrt{y}\,\partial_y u = u, \qquad x, y > 0,$$
som uppfyller $u(1,y) = y$ för alla $y > 0$. (6p)

2. Betrakta en sfäriskt symmetrisk funktion $u(t,x,y,z) = u(t,r)$ som löser
$$\partial_t^2 u = \Delta u$$
i $\mathbf{R}^3$, där $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

   (a) Låt $v(t,r) = ru(t,r)$. Visa att tvåvariabel-funktionen $v(t,r)$ löser
   $$\partial_t^2 v = \partial_r^2 v.$$
   Ledning: För sfäriskt symmetriska funktioner u är $\Delta u = \partial_r^2 u + (2/r)\partial_r u$. (3p)

   (b) Lös startvärdesproblemet
   $$\begin{cases} \partial_t^2 u(t,x,y,z) = \Delta u(t,x,y,z), & t > 0, \\ u(0,x,y,z) = e^{-x^2-y^2-z^2}, \\ \partial_t u(0,x,y,z) = 1, \end{cases}$$
   för $u(t,x,y,z)$. (4p)

3. Betrakta Neumann–Poincaré operatorn
$$Kh(x) = \int_\Gamma \frac{(y-x)\cdot\nu(y)}{2\pi|y-x|^2} h(y)\,ds(y), \qquad x \in \Gamma,$$
på enhetscirkeln Γ.

   (a) Bestäm Kh för en godtycklig funktion $h : \Gamma \to \mathbf{R}$. (3p)

   (b) Lös integralekvationen $h/2 + Kh = g$ på enhetscirkeln, för en godtyckligt given funktion $g : \Gamma \to \mathbf{R}$. (4p)

Var god vänd!

4. Låt $D \subset \mathbf{R}^2$ vara ett område i planet.

   (a) Definiera vad som menas med en Greenfunktion $G(y, x)$, med pol i x, för D. (2p)

   (b) Bevisa att $G(x, y) = G(y, x)$ för alla $x, y \in D$. (5p)

5. (a) Definiera vad som menas med en testfunktion ϕ och en distribution F på $\mathbf{R}$. (4p)

   (b) Definiera vad som menas med den svaga derivatan av en distribution F på $\mathbf{R}$. (2p)

   (c) Finn en distribution F på $\mathbf{R}$ vars svaga derivata är Diracdeltat δ i $x = 0$. Motivera! (2p)

6. Betrakta egenvärdesproblemet $-\Delta u = \lambda u$ på ett område $D \subset \mathbf{R}^2$, med Robins randvillkor $\partial_\nu u + u = 0$ på randen ∂D. Låt Robin-Rayleighkvoten $R_r(f)$ för en funktion $f \in H^1(D)$ vara

$$R_r(f) = \frac{\iint_D |\nabla f|^2 dxdy + \int_{\partial D} f^2 ds}{\iint_D f^2 dxdy}.$$

   Antag nu att $R_r(f)$ är minimalt för $f = u \in H^1(D)$. Visa att u är en egenfunktion och uppfyller Robins randvillkor. (8p)

7. Låt e_1, e_2, e_3 vara standard ON-basen för $\mathbf{R}^3$, och betrakta Paulimatriserna

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

   Vi kommer ihåg att Cliffordprodukten av multivektorer genererade av e_1, e_2, e_3 är isomorf med matrisprodukten av komplexa 2/2-matriser genererade av $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

   (a) Ange den multivektor F som beskriver ett givet elektriskt fält (E_1, E_2, E_3) och magnetiskt fält (B_1, B_2, B_3), i en given punkt (t, x). (2p)

   (b) Bestäm det elektriska och magnetiska fält, i den givna punkten (t, x), som den komplexa 2/2-matrisen

$$\begin{bmatrix} -2+i & 1+3i \\ i & 2-i \end{bmatrix}$$

   beskriver. (5p)

Formelblad MVE695

Värmeledningsekvationen:

$$H_t(x) = (4\pi kt)^{-n/2} e^{-|x|^2/(4kt)}$$

Laplaces ekvation:

$$\Phi(x) = \tfrac{1}{2\pi} \ln |x| \qquad \Phi(x) = -\tfrac{1}{4\pi|x|}$$

Vågekvationen:

$$R_t(x) = \begin{cases} 1/(2c) \\ 0 \end{cases} \qquad R_t(x) = \begin{cases} (2\pi c)^{-1}(c^2t^2 - |x|^2)^{-1/2} \\ 0 \end{cases}$$

$$\langle R_t, \phi \rangle = (4\pi c^2 t)^{-1} \int_{|x|=ct} \phi(x) dS(x)$$

Helmholtz ekvation:

$$\Phi_k(x) = -\tfrac{i}{4}(J_0(k|x|) + iY_0(k|x|)) \qquad \Phi_k(x) = -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}$$

(1) Karakteristisk ekv.:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{y}}{x}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$2\sqrt{y} = -\ln x + C$$

Lämpligt variabelbyte: $\begin{cases} s = x \\ t = 2\sqrt{y} + \ln x \end{cases}$

Kedjeregeln $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \partial_x u = 1 \cdot \partial_s u + \frac{1}{x}\partial_t u \\ \partial_y u = 0 + \frac{1}{\sqrt{y}}\partial_t u \end{cases}$$

Insatt i PDEn:

$$x\left(\partial_s u + \cancel{\frac{1}{x}\partial_t u}\right) - \sqrt{y}\left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{y}}\partial_t u}\right) = u$$

$$s\,\partial_s u - u = 0$$

$$\partial_s u + \left(-\frac{1}{s}\right)u = 0$$

Integrerande faktor: $e^{-\ln s} = \frac{1}{s}$

$$\Rightarrow \frac{1}{s}\partial_s u - \frac{1}{s^2}u = 0$$

$$\partial_s\left(\frac{1}{s}u\right) = 0 \quad \Rightarrow u(s,t) = s\,C(t)$$

$$\Rightarrow u(x,y) = x\,C(2\sqrt{y} + \ln x)$$

Randvillkor $\Rightarrow$

$$y = u(1,y) = C(\underbrace{2\sqrt{y}}_{=:\alpha})$$

$$\Rightarrow C(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2, \quad \forall \alpha > 0$$

Svar: $u(x,y) = x\left(\sqrt{y} + \frac{1}{2}\ln x\right)^2$

(2) (a) Vi vet att

$$\partial_t^2 u = \partial_r^2 u + \frac{2}{r}\partial_r u.$$

Låt nu $v = ru \Rightarrow u = \frac{1}{r}v$

$$\Rightarrow \partial_t^2 u = \frac{1}{r}\partial_t^2 v$$

$$\partial_r u = -\frac{1}{r^2}v + \frac{1}{r}\partial_r v$$

$$\partial_r^2 u = -\frac{2}{r^2}\partial_r v + \frac{1}{r}\partial_r^2 v + \frac{2}{r^3}v$$

Insatt:

$$\frac{1}{r}\partial_t^2 v = \left(\cancel{-\frac{2}{r^2}\partial_r v} + \frac{1}{r}\partial_r^2 v \cancel{+\frac{2}{r^3}v}\right) + \frac{2}{r}\left(\cancel{-\frac{1}{r^2}v + \frac{1}{r}\partial_r v}\right)$$

$$\Leftrightarrow \partial_t^2 v = \partial_r^2 v \quad , \; v := ru$$

(b) d'Alembert formel

$$v(t,r) = \partial_t R_t * g(r) + R_t * h(r) = /\text{formelblad}/$$

$$= \frac{1}{2}\left(g(r-t) + g(r+t)\right) + \frac{1}{2}\int_{r-t}^{r+t} h(s)\,ds$$

ger lösningen till
$$\begin{cases} \partial_t^2 v = \partial_r^2 v & , \; t>0 \\ v = g & , \; t=0 \\ \partial_t v = h & , \; t=0 . \end{cases}$$

Vi har startdata

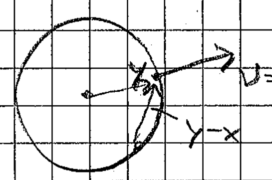
$$g(r) = v(0,r) = r\,u(0,r) = r e^{-r^2}$$

$$h(r) = \partial_t v(0,r) = r\,\partial_t u(0,r) = r \cdot 1$$

$$\Rightarrow v(t,r) = \frac{1}{2}\left((r-t)e^{-(r-t)^2} + (r+t)e^{-(r+t)^2}\right) + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{r-t}^{r+t} s\,ds}_{= \frac{1}{4}\left((r+t)^2 - (r-t)^2\right) = r\cdot t}$$

Svar: $u(t,r) = \frac{1}{2r}\left((r-t)e^{-(r-t)^2} + (r+t)e^{-(r+t)^2}\right) + t$

(3) (a) För cirkeln är



$$\nu(y) = y$$

$$\Rightarrow (y-x)\cdot y = |y|^2 - x\cdot y = 1 - x\cdot y$$

$$|y-x|^2 = |y|^2 + |x|^2 - 2x\cdot y = 2 - 2x\cdot y$$

$$\Rightarrow Kh(x) = \int_\Gamma \underbrace{\frac{1}{2\pi}}_{\text{längden av cirkeln}} \cdot \frac{1}{2} \cdot h(y)\,ds(y)$$

$= \frac{1}{2} \cdot$ h:s likformiga medelvärde på Γ.

Detta gäller för $\forall x \in \Gamma$ så Kh är en konstant funktion på Γ.

Svar: $Kh(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma h\,ds \quad , \forall x \in \Gamma.$

(b) Antag $\frac{h}{2} + Kh = g$ för en given funktion g. $\boxed{3}$

Integrere båda sidor:

$$\frac{1}{2}\int_\Gamma h\,ds + \int_\Gamma Kh\,ds = \int_\Gamma g\,ds$$

$$(a) \Rightarrow \int_\Gamma \underbrace{Kh}_{\text{konstant}}\,ds = \underbrace{Kh}_{=\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma h\,ds} \cdot \underbrace{\int_\Gamma ds}_{=2\pi} = \frac{1}{2}\int_\Gamma h\,ds$$

$$\therefore \int_\Gamma h\,ds = \int_\Gamma g\,ds$$

$$\Rightarrow \frac{h(x)}{2} = g(x) - \underbrace{Kh}_{=\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma g\,ds}$$

Svar: $h(x) = 2\cdot g(x) - \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma g\,ds \quad , x\in\Gamma.$

(4) (a) Se Defn. 7.1.1

(b) Se Prop. 7.1.4 i kursboken.

(5) (a) Se Defn. 2.1.2

(b) Se Defn. 2.1.6 i kursboken

(c) Låt $F(x) = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$.

F är lokalt integrerbar och därmed en distribution.

Svaga derivatan är

$$\langle F', \varphi\rangle = -\langle F, \varphi'\rangle = -\int_0^\infty 1\cdot\varphi'(x)\,dx$$

$$= -\left[\varphi(x)\right]_{x=0}^{\infty} = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle$$

$\therefore F' = \delta$ som önskat.

(6) Antag $R_r(f)$ är minimalt för $f=u$

Låt $\varphi \in H^1(D)$ och betrakta envariabelfunktionen

$g(t) = R_r(u+t\varphi)$

$g(t)$ har minimum i $t=0 \Rightarrow g'(0)=0$

$$g(t) = \frac{\iint_D \left(|\nabla u|^2 + t^2|\nabla\varphi|^2 + 2t\,\nabla u\cdot\nabla\varphi\right)dxdy + \int_{\partial D}\left(u^2+t^2\varphi^2+2tu\varphi\right)ds}{\iint_D \left(u^2+t^2\varphi^2+2tu\varphi\right)dxdy}$$

14

Kvotregeln och $t=0$ sätt $\Rightarrow$

$$\left(\iint_D 2\nabla u\cdot\nabla\varphi\,dxdy+\int_{\partial D}2u\varphi\,ds\right)\cdot\iint_D u^2\,dxdy-$$
$$-\left(\iint_D u^2\,dxdy+\int_{\partial D}u^2\,ds\right)\cdot\iint_D 2u\varphi\,dxdy=0$$

Division med $2\iint_D u^2\,dxdy \Rightarrow$

$$\underbrace{\iint_D \nabla u\cdot\nabla\varphi\,dxdy+\int_{\partial D}u\varphi\,ds}=\underbrace{R_r(u)}_{\text{Kalla denna för }\lambda}\cdot\iint_D u\varphi\,dxdy$$

$$\underset{\text{Green}}{\overset{\uparrow}{=}}\int_{\partial D}\partial_\nu u\cdot\varphi\,ds-\iint_D \Delta u\cdot\varphi\,dxdy$$

$$\Rightarrow \iint_D(\Delta u+\lambda u)\varphi\,dxdy=\int_{\partial D}(\partial_\nu u+u)\varphi\,ds\,,\ \forall\varphi\in H^1(D).$$

- Välj först $\varphi\in H_0^1(D)$ s.e. $\varphi=0$ på ∂D.

  $\Rightarrow \Delta u+\lambda u=0$ i hela D, eftersom alla dess φ-medelvärden $=0$.

- Vi har nu

  $$0=\int_{\partial D}(\partial_\nu u+u)\varphi\,ds\,,\quad\forall\varphi\in H^1(D).$$

  $\Rightarrow \partial_\nu u+u=0$ på hela ∂D, eftersom alla dess φ-medelvärden på ∂D är $=0$.

$\therefore$ u är en egenfunktion med Robins randvillkor.

(7) (a) Det elektriska fältet är ett vektorfält

$$E_1e_1+E_2e_2+E_3e_3.$$

Det magnetiska fältet är ett bivektorfält

$$B_1e_2e_3+B_2e_3e_1+B_3e_1e_2$$

Svar: $F=E_1e_1+E_2e_2+E_3e_3+B_1e_2e_3+B_2e_3e_1+B_3e_1e_2.$

(b) Vi ersätter e_k med σ_k, $k=1,2,3$, och får

$$\sigma_2\sigma_3=\begin{bmatrix}0&i\\i&0\end{bmatrix}\quad\sigma_3\sigma_1=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\quad\sigma_1\sigma_2=\begin{bmatrix}i&0\\0&-i\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow F=\begin{bmatrix}E_3&E_1-iE_2\\E_1+iE_2&-E_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}iB_3&B_2+iB_1\\-B_2+iB_1&-iB_3\end{bmatrix}$$

Om nu $F = \begin{bmatrix} -2+i & 1+3i \\ i & 2-i \end{bmatrix}$, så följer: $\boxed{5}$

$E_3 = -2$, $B_3 = 1$

$E_1 + B_2 = 1$, $B_1 - E_2 = 3$

$E_1 - B_2 = 0$, $E_2 + B_1 = 1$

$\Rightarrow E_1 = B_2 = \frac{1}{2}$, $E_2 = -1$, $B_1 = 2$

<u>Svar:</u> $E = (\frac{1}{2}, -1, -2)$, $B = (2, \frac{1}{2}, 1)$