

MATEMATIK

Göteborgs Universitet

Tentamen i Partiella differentialekvationer, MVE695

2024-01-08, kl. 8.30-12.30

Hjälpmedel: Endast medföljande formelblad.

Examinator: Andreas Rosén

Under skrivningstiden nås examinator via telefon 0317725365.

Totalt antal skrivningspoäng är 50. Till dessa läggs bonuspoäng. Betygsgränser: 20 poäng för betyget 3, 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget 5, inklusive bonus.

Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara välskrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.

Lösningsförslag och besked om rättning och granskning lämnas via kursens hemsida.

1. Finn lösningen $u(x, y)$ till PDEn

$$x \partial_x u - y \partial_y u = u, \quad x, y > 0,$$

som uppfyller $u(x, 1/x^2) = x \ln(x+1) - x \ln(x)$ för alla $x > 0$. (6p)

2. Låt $D = \{(x_1, x_2, x_3) ; x_3 > 0\}$ vara det övre halvrummet.

(a) Bestäm Greensfunktionen $G(y, x)$ med pol i $x \in D$, för $y \in D$. (3p)

(b) Bestäm Poissonkärnan $P(y, x)$ med pol i $x \in D$, för $y \in \partial D$. (4p)

3. Betrakta det blandade randvärdesproblemet

$$\begin{cases} \Delta u = x^3 y^2, & \text{då } x^2 + y^2 < 1, \\ \partial_\nu u = x^2 + y, & \text{då } x^2 + y^2 = 1, x > 0, \\ u = x^3 + y^2, & \text{då } x^2 + y^2 = 1, x < 0, \end{cases} \quad (1)$$

för $u(x, y)$. Här är $\nu = (x, y)$ på enhetscirkeln.

- (a) Visa att randvärdesproblemet (1) för u är ekvivalent med ett randvärdesproblem

$$\begin{cases} \Delta v = f, & \text{då } x^2 + y^2 < 1, \\ \partial_\nu v = g, & \text{då } x^2 + y^2 = 1, x > 0, \\ v = 0, & \text{då } x^2 + y^2 = 1, x < 0, \end{cases} \quad (2)$$

för en funktion $v(x, y)$. Förklara vad f , g ska vara, och hur u och v är relaterade. (3p)

- (b) Finn en variationsformulering (V, a, L) av randvärdesproblemet (2) som är ekvivalent med (2). Ekvivalensen ska visas. (Lösningarna kan antas vara släta funktioner.) (5p)

Var god vänd!

4. Betrakta startvärdesproblemet

$$\begin{cases} u''_{tt} = 4u''_{xx}, & t > 0, x \in \mathbf{R}, \\ u(0, x) = 1 - |x|, & |x| < 1, \\ u(0, x) = 0, & |x| > 1, \\ u'_t(0, x) = 6, & 0 < x < 1, \\ u'_t(0, x) = -6, & -1 < x < 0, \\ u'_t(0, x) = 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

för $u(t, x)$, $t > 0$, $x \in \mathbf{R}$. Beräkna $u(1, x)$ för alla $x \in \mathbf{R}$, och skissa grafen för denna envariabelfunktion. (7p)

5. Formulera, för vart och ett av följande randvärdesproblem, en algoritm baserad på integralekvationer, som beräknar lösningen $u(x_1, x_2)$ i ett begränsat område $D \subset \mathbf{R}^2$. Det ska tydligt förklaras hur den exakta lösningen kan beräknas, men beräkningen ska inte genomföras och detaljer om numerisk approximation/diskretisering efterfrågas inte.

(a)

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{i } D, \\ u = \sin(x_1 + x_2^3), & \text{på } \partial D. \end{cases} \quad (4p)$$

(b)

$$\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, & \text{i } D, \\ u = \sin(x_1 + x_2^3), & \text{på } \partial D. \end{cases} \quad (3p)$$

6. Formulera och bevisa den svaga formen av maximumprincipen för kontinuerliga lösningar $u(t, x)$ till $u'_t = \Delta u$ för $x \in D$ och $0 < t < 1$, där $D \subset \mathbf{R}^n$ är ett begränsat område. (7p)

7. (a) Avgör vilka av följande två som definierar en distribution på $\mathbf{R}$, respektive en tempererad distribution på $\mathbf{R}$. Motivera.

$$f(x) = e^{-x}, \quad \langle F, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)^2 dx \quad (2p)$$

- (b) Avgör vilka av följande två PDE-problem som är välställda. Motivera.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in D, \\ \partial_\nu u = g, & x \in \partial D, \end{cases} \quad \begin{cases} u''_{tt} = \Delta u, & x \in \mathbf{R}^n, t > 0, \\ u = g, & x \in \mathbf{R}^n, t = 0 \end{cases} \quad (2p)$$

- (c) Avgör vilka av följande två komplexa amplituder, med givet vågtal $k > 0$, som uppfyller Sommerfelds strålningsvillkor i $\mathbf{R}^3$. Motivera.

$$e^{ikx_3}, \quad (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1/2} e^{ik\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \quad (2p)$$

- (d) Avgör vilka av följande fyra ekvationer som är reversibla: Värmelednings-ekvationen, Maxwells ekvationer, (tidsberoende) Schrödingerekvationen, vågekvationen. Svar räcker. (2p)

Formelblad MVE695

Heat equation:

$$H_t(x) = (4\pi kt)^{-n/2} e^{-|x|^2/(4kt)}$$

Laplace equation:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \ln |x| \quad \Phi(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}$$

Wave equation:

$$R_t(x) = \begin{cases} 1/(2c) \\ 0 \end{cases} \quad R_t(x) = \begin{cases} (2\pi c)^{-1}(c^2 t^2 - |x|^2)^{-1/2} \\ 0 \end{cases}$$
$$\langle R_t, \phi \rangle = (4\pi c^2 t)^{-1} \int_{|x|=ct} \phi(x) dS(x)$$

Helmholtz equation:

$$\Phi_k(x) = -\frac{i}{4}(J_0(k|x|) + iY_0(k|x|)) \quad \Phi_k(x) = -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}$$

①

Karakteristisk ekv: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln y = -\ln x + C \Rightarrow xy = e^C$$

Lämpligt variabelbyte: $\begin{cases} s = x \\ t = xy \end{cases}$

Kedjeregeln $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 1 \cdot \frac{\partial u}{\partial s} + y \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \cdot \frac{\partial u}{\partial s} + x \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$$

Insätt: $x(\partial_s u + y \partial_t u) - y(x \partial_t u) = u$

$$\Rightarrow s \partial_s u = u \Leftrightarrow u'_s - \frac{1}{s} u = 0$$

Integrerande faktor: $\exp(-\ln s) = \frac{1}{s}$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{s} u \right) = 0$$

Allmän lösning: $u(s, t) = s C(t)$

$$u(x, y) = x C(xy)$$

Partikulär lösning:

$$x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) = x \cdot C \left(x \cdot \frac{1}{x^2} \right)$$

$$C \left(\frac{1}{x} \right) = \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right), \quad \forall x > 0$$

$$C(\alpha) = \ln(1 + \alpha), \quad \forall \alpha > 0$$

Svar: $u(x, y) = x \ln(1 + xy)$

②

(a) Låt $v(x, y) = u(x, y) - x^3 - y^2$

Då är

$$u = x^3 + y^2 \Leftrightarrow v = 0$$

Vidare:

$$\partial_x v = \partial_x u - \partial_x (x^3 + y^2)$$

$$= x^2 + y - (x, y) \cdot (3x^2, 2y)$$

$$= x^3 + y - 3x^3 - 2y^2 = -2x^3 - y^2$$

då $x^2 + y^2 = 1, x > 0$

$$\Delta v = \Delta u - \Delta(x^3 + y^2) = x^3 y^2 - 6x - 2 =: f$$

d: $x^2 + y^2 < 1$.

12

Med dessa gäller f och Neumanndata g för $x > 0$ på randen, är (1) för $u \Leftrightarrow$

(2) för $v = u - x^3 - y^2$.

(b) Multiplicera $\Delta v = f$ med φ och integrera:

$$\iint_D f \varphi \, dx = \iint_D (\Delta v) \cdot \varphi = \text{Green} =$$

$$\underbrace{\int_{\partial D} \partial_\nu v \cdot \varphi \, ds}_{=0} - \iint_D \nabla v \cdot \nabla \varphi \, dx$$

$D =$
enhetscirkeln

$$= \underbrace{\int_{\partial D, x < 0} \partial_\nu v \cdot \varphi \, ds}_0 + \int_{\partial D, x > 0} \underbrace{\partial_\nu v \cdot \varphi \, ds}_{=g}$$

om $\varphi \in V := \{v \in H^1(D), v = 0 \text{ d: } x^2 + y^2 = 1, x < 0\}$

$$\text{Låt } a(v, \varphi) = \iint_D \nabla v \cdot \nabla \varphi \, dx$$

$$L(\varphi) = - \iint_D f \cdot \varphi \, dx + \int_{\partial D, x > 0} g \cdot \varphi \, ds$$

$\therefore \forall \text{ (2) } \Rightarrow v \in V \text{ löser}$

$$a(v, \varphi) = L(\varphi), \forall \varphi \in V$$

Omvänt: Antag $v \in V$ löser $a(v, \varphi) = L(\varphi), \forall \varphi \in V$.

$$v \in V \Rightarrow v = 0 \text{ d: } x^2 + y^2 = 1, x < 0$$

$$a(v, \varphi) = L(\varphi) \Rightarrow$$

$$- \iint_D f \varphi \, dx + \int_{\partial D, x > 0} g \cdot \varphi \, ds = \iint_D \nabla v \cdot \nabla \varphi \, dx = \text{Green}$$

$$= \int_{\partial D} \partial_\nu v \cdot \varphi \, ds - \iint_D \Delta v \cdot \varphi \, dx$$

$$\Leftrightarrow \iint_D (\Delta v - f) \varphi \, dx = \int_{\partial D, x > 0} (\partial_\nu v - g) \varphi \, ds$$

- Speciellt gäller för $\varphi \in M_0'(D)$ att

(3)

$$\int_D (\Delta v - f) \varphi \, dx = 0$$

Litar vi $\varphi_n \xrightarrow{\text{svagt}} \delta_x$ för en godtycklig punkt $x \in D$, följer $\Delta v = f$ i hela D .

- Vet nu att

$$0 = \int_{\partial D} (\partial_\nu v - g) \varphi \, ds, \quad \forall \varphi \in V.$$

Låt nu $\varphi_n \xrightarrow{\text{svagt}} \delta_x$ på ∂D . Det följer att $\partial_\nu v = g$ för $x^2 + y^2 = 1, x > 0$.
 $\therefore v$ löser (2).

- (4) Formeln för lösningen till startvärdesproblemet för vågkvationen i dimension $n=1$ är

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \partial_t (R_t * g) + R_t * h_{x+ct} \\ &= \frac{1}{2} (g(x-ct) + g(x+ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) \, dy \end{aligned}$$

1 vänt exempel: $c=2, t=1$ och

$$g(x) = \begin{cases} 1-|x|, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} 0 \cdot \operatorname{sgn}(x), & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow ct = 2$$

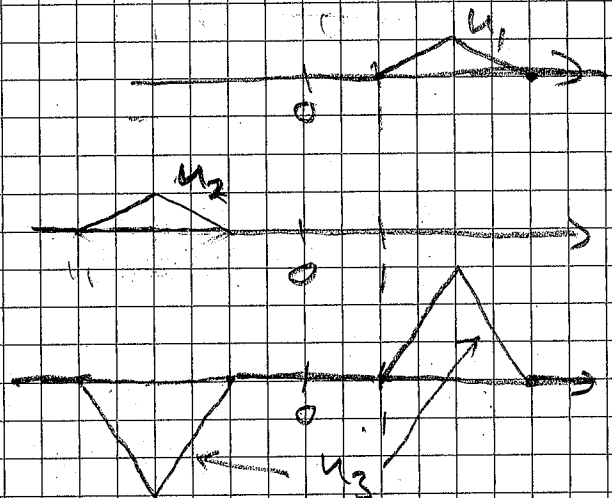
Lösningen är en superposition av tre funktioner

$$u(1, x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x); \quad \text{där}$$

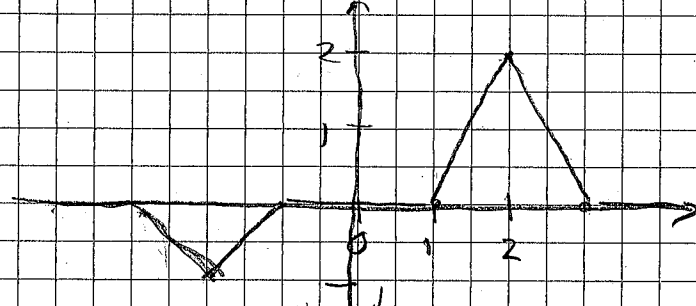
$$u_1(x) = \frac{1}{2} g(x-2)$$

$$u_2(x) = \frac{1}{2} g(x+2)$$

$$u_3(x) = \frac{3}{2} \int_{x-2}^{x+2} \operatorname{sgn}(x) \, dx$$



$\therefore u(1, x)$ har grafen



4

$$\text{Svar: } u(1, x) = \begin{cases} 2 - 2|x - 2|, & |x - 2| < 1 \\ -1 + |x + 2|, & |x + 2| < 1 \\ 0, & \text{för övrigt} \end{cases}$$

5 (a) Givet en hjälpfunktion $h(y)$ på ∂D ,
 ersätter vi lösningen $u(x)$ som en dubbeltsikt-
 potential med densitet $h(y)$:

$$u(x) = \int_{\partial D} \partial_n \Phi(y-x) h(y) ds(y), \quad x \in D \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{där } \partial_n \Phi(y-x) &= \nabla \Phi(y-x) \cdot \nu(y) \\ &= \frac{\nu(y) \cdot (y-x)}{2\pi |y-x|^2} \end{aligned}$$

Det gäller alltid $\Delta u = 0$ i D , oavsett h .

Veljer vi h så att

$$\frac{1}{2} h(x) + \int_{\partial D} \frac{\nu(y) \cdot (y-x)}{2\pi |y-x|^2} h(y) ds(y) = \sinh(x_1 + x_2^3) \quad (2)$$

för alla $x = (x_1, x_2) \in \partial D$

blir randvillkoret $u = \sinh(x_1 + x_2^3)$ på ∂D uppfyllt.

$\therefore$ Algoritmen är:

- Finn $h(y)$ på ∂D som löser (2)
- Beräkna utifrån $h(y)$ lösningen $u(x)$ i D mha (1).

(b) PDEn är Helmholtz eku. med värdet $k=3$.

Algoritmen blir exakt den i (a), med skillnaden att Φ ska ersättas med

fundamentel lösningen $\Phi_3(x) = -\frac{i}{4} (J_0(3|x|) + i Y_0(3|x|))$
 för Helmholtz eku. $\Delta u + 3^2 u = 0$.

Först löses integralrelationen

5

$$\frac{1}{2} h(x) + \int_{\partial D} v(y) \cdot \nabla \Phi_3(y-x) h(y) \, ds(y) = \sin(x_1 + x_2^2),$$

$\forall x = (x_1, x_2) \in \partial D.$

villket ger densiteten $h(y)$ på ∂D .

Utföra denne beräknas lösningen

$$u(x) = \int_{\partial D} v(y) \cdot \nabla \Phi_3(y-x) h(y) \, ds(y)$$

för $x \in D.$

⑥ Se kursboken 7.2, 4-5.

② (a) Fundamentallösningen för Δ i $\mathbb{R}^3$ är

$$\Phi(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}$$

Spiegelmetoden $\Rightarrow$

$$G(y, x) = \Phi(y-x) - \Phi(y-x^*),$$

där $x = (x_1, x_2, -x_3)$ är spejelpunkten till

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in \partial D.$$

$$\Rightarrow G(y, x) = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{((y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + (y_3-x_3)^2)^{1/2}} - \frac{1}{((y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + (y_3+x_3)^2)^{1/2}} \right)$$

(b) Om $\Delta u = 0$ i D (och $u \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$)

ger Green 2 med u och G att

$$u(x) = \iint_{\partial D} u(y) \underbrace{\partial_n G(y, x)}_{= \text{Poisson kärnan } P(y, x)} \, ds(y), \quad x \in D$$

Då $v = (0, 0, -1)$ på ∂D blir

$$P(y, x) = -\frac{\partial G}{\partial y_3} \Big|_{y_3=0}$$

$$= +\frac{1}{4\pi} \left[\frac{(-\frac{1}{2})2(0-x_3)}{((y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + (0-x_3)^2)^{3/2}} - \frac{(-\frac{1}{2})2(0+x_3)}{((y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + (0+x_3)^2)^{3/2}} \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{x_3}{((y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + x_3^2)^{3/2}}$$

⑦ (a) f är en distribution, ty den är en lokalt integrerbar funktion. f är ej ej tempererad distribution då t & medelvärdet $\langle f, e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+t^2}} \rangle$ ej är definierat.

F är ej en distribution (och ännu mindre en tempererad sådan) för $\langle F, \psi \rangle$ beror ej längden på ψ .

(b) Neumannproblem är inte välställt: lösningar är ej entydiga för om $u(x)$ är en lösning så är $u(x) + C$ också det, $C = \text{konstant}$.

(VÅ)-problemet är inte heller välställt, för u_t vid $t=0$ måste också specificeras. Om $u(t,x)$ är en lösning, så är även $u(t,x) + t$ det.

(c) $V_1 = e^{ikx_3}$ uppfyller inte Sommerfelds villkor, för V_1 representerar en plan våg som rör sig i x_3 -led. Den är inte utgående i alla riktningar: den är ingående från riktning $-x_3$.

$V_2 = \frac{e^{ikr}}{|x|}$ är (en multipel av) fundamentallösningen $\Phi_k(x)$ i $\mathbb{R}^3$, vilken uppfyller Sommerfelds villkor. Kontroll:

$$\begin{aligned} \partial_r V_2 - ik V_2 &= \left(-\frac{1}{r^2} e^{ikr} + ik \frac{e^{ikr}}{r} \right) - ik \frac{e^{ikr}}{r} \\ &= -\frac{1}{r^2} e^{ikr} = O\left(\frac{1}{r^2}\right) = o\left(\frac{1}{r}\right). \end{aligned}$$

(d) Alla utom värmeledningsekvationen är reversibla.