

MATEMATIK

Göteborgs Universitet

Tentamen i Partiella differentialekvationer F3, TMA690

2023-08-14, kl. 14.00-18.00

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Examinator: Andreas Rosén

Under skrivningstiden nås examinator via telefon 0317725365.

Totalt antal skrivningspoäng är 50. Till dessa läggs bonuspoäng. Betygsgränser: 20 poäng för betyget 3, 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget 5, inklusive bonus.

Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara välskrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.

Lösningsförslag och besked om rättning och granskning lämnas via kursens hemsida.

1. (a) Förklara vad som menas med en Greensfunktion (för Δ) för ett område $D \subset \mathbf{R}^2$. (3p)
- (b) Förklara vad som menas med en hyperbolisk linjär andra ordningens PDE. (3p)
- (c) Förklara vad som menas med en testfunktion $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ och vad som menas med en Schwartz testfunktion $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. (3p)
2. Finn lösningen $u(x, y)$ till PDEn

$$2y \partial_x u + e^x \partial_y u = y$$

som uppfyller $u(x, 0) = 0$ för alla $x > 0$. (6p)

3. Finn lösningen $u(t, x)$, $t > 0$, $x \in \mathbf{R}$, till värmeledningsproblemet

$$\begin{cases} \partial_t u = k \partial_x^2 u - a \partial_x u - bu, & t > 0, x \in \mathbf{R}, \\ u(0, x) = g(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

med konstant konvektion $a > 0$ och dissipation $b > 0$. Lösningen ska ges som en integralformel i termer av startdata g . (7p)

Var god vänd!

4. (a) Beräkna den svaga andraderivat f'' av funktionen

$$f(x) = |x^2 + x|.$$

Skissa f , f' och f'' och förklara resultatet.

(4p)

- (b) Avgör om följderna av funktioner

$$g_k(x) = \cos^2(kx), \quad x \in \mathbf{R},$$

$k = 1, 2, 3, \dots$, konvergerar svagt då $k \rightarrow \infty$, och bestäm i så fall gränsdistributionen.

(3p)

5. (a) Definiera vad som menas med Rayleighkvoten $R(u)$ för en funktion u på ett område $D \subset \mathbf{R}^2$.

(2p)

- (b) Bevisa att om u minimerar $R(u)$ bland alla funktioner i $H_0^1(D)$, så är u en Dirichlet-egenfunktion.

(5p)

6. Låt $u(x, y)$ vara en harmonisk funktion för $x^2 + y^2 < 1$, med Dirichlet randvärden

$$u(x, y) = x^2 y^2 \sin(x^2 + y^2), \quad x^2 + y^2 = 1.$$

- (a) Bestäm maximum och minimum av $u(x, y)$ för $x^2 + y^2 \leq 1$.

(4p)

- (b) Bestäm $u(0, 0)$.

(3p)

7. Betrakta startvärdesproblemet

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = \Delta u, & t > 0, (x, y) \in D, \\ u = 1, & t > 0, (x, y) \in \partial D, \\ u = 1 + f, & t = 0, (x, y) \in D, \\ \partial_t u = 0, & t = 0, (x, y) \in D, \end{cases}$$

på kvadraten $D = \{0 < x, y < 1\}$. Låt $f(x, y)$ vara Dirichlet-egenfunktionen $f(x, y) = \sin(2x) \sin(3y)$.

- (a) Finn en lösning $u(t, x, y)$ genom att ansätta $u(t, x, y) = 1 + g(t)f(x, y)$.

(3p)

- (b) Använd en energiprincip för att bevisa att endast denna lösning u till PDE-problemet finns.

(4p)

(a) $G(y, x)$, $x, y \in D$, är en Greensfunktion för D om $G(y, x) - \frac{1}{2^n} \ln|y-x|$ är en harmonisk funktion i $y \in D$, för varje fixt $x \in D$, och om $G(y, x) = 0$ för $y \in \partial D$, $x \in D$.

(b) En koefficientordnings ekvation är en PDE på formen

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} u + \sum_{i=1}^n a_i \partial_{x_i} u + b u = f$$

Principaldel med symmetrisk koefficientmatris

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Låt $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vara A 's egenvärden. PDEn är hyperbolisk om eller åtminstone precis ett λ_i har samma tecken.

(c) $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är en testfunktion om

(1) eller derivator $\varphi^{(k)}$, $k=1, 2, \dots$ existerar som kontinuerliga funktioner, och

(2) $\varphi(x) = 0$ utanför ett begränsat intervall $a < x < b$.

φ är en Schwartz testfunktion om (1) gäller och

(2') eller derivator $\varphi^{(k)}$, $k=0, 1, 2, \dots$ växer som $O(\frac{1}{|x|^N})$ för alla $N < \infty$, då $x \rightarrow \pm \infty$.

(2) Karakteristisk evn.:

[2]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{2y}$$

$$\int 2y dy = \int e^x dx$$

$$y^2 = e^x + C$$

Längst variabelbyte: $\begin{cases} s = y^2 \\ t = y^2 - e^x \end{cases}$

Kedjeregeln:

$$\partial_x u = -e^x \partial_t u$$

$$\partial_y u = 1 \cdot \partial_s u + 2y \partial_t u$$

Insatt:

$$2y(-e^x \partial_t u) + e^x(\partial_s u + 2y \partial_t u) = y$$

$$\partial_s u = y e^{-x} = s \frac{1}{s^2 - t}$$

Integration

$$u(s, t) = \frac{1}{2} \ln(s^2 - t) + C(t)$$

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \ln e^x + C(y^2 - e^x) = \frac{x}{2} + C(y^2 - e^x)$$

Startvillkor:

$$0 = u(x, 0) = \frac{x}{2} + C(\underbrace{-e^x}_{=\alpha})$$

$$C(\alpha) = -\frac{1}{2} \ln(-\alpha)$$

Svar: $u(x, y) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln(e^x - y^2)$

(3) Fouriertransformen för fast t:

$$\hat{u}(t, \xi) = \int u(t, x) e^{-ix\xi} dx$$

$$\Rightarrow \partial_t \hat{u} = -k \xi^2 \hat{u} - i a \xi \hat{u} - b \hat{u}$$

Lös t-ODEN för fast ξ :

$$\hat{u}(t, \xi) = C \cdot \exp(-(k \xi^2 + i a \xi + b)t)$$

" $\hat{g}(\xi)$ "

Vi kommer ihåg förhållanden

$$F \left\{ \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-x^2/4kt} \right\} = e^{-k\xi^2 t}$$

= $H_t(x)$

Definiere

3

$$F\{H_t(x-at)\} = \int H_t(x-at) e^{-ixs} dx = \int_{y=x-at} H_t(y) e^{-i(y+at)s} dy = F\{H_t(y)\} \cdot e^{-iat} s$$

$$u(t,x) = g(x) * (H_t(x-at) \cdot e^{-bt})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \exp\left(-\frac{(x-y-at)^2}{4kt} - bt\right) dy$$

4) (a) $x^2+x=0 \Rightarrow x=0, -1$

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x, & x < -1 \text{ u. } x > 0 \\ -(x^2+x), & -1 < x < 0 \end{cases}$$

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Rightarrow$

$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{-1} (x^2+x) \varphi' dx + \int_{-1}^0 (x^2+x) \varphi' dx - \int_0^{\infty} (x^2+x) \varphi' dx$$

$$= -\left[\underbrace{(x^2+x)\varphi}_{=0} \right]_{-\infty}^{-1} + \int_{-\infty}^{-1} (2x+1) \varphi dx + \left[\underbrace{(x^2+x)\varphi}_{=0} \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 (2x+1) \varphi dx$$

$$- \left[\underbrace{(x^2+x)\varphi}_{=0} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} (2x+1) \varphi dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \varphi(x) dx, \quad d\omega$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x+1, & x < -1 \text{ u. } x > 0 \\ -(2x+1), & -1 < x < 0 \end{cases}$$

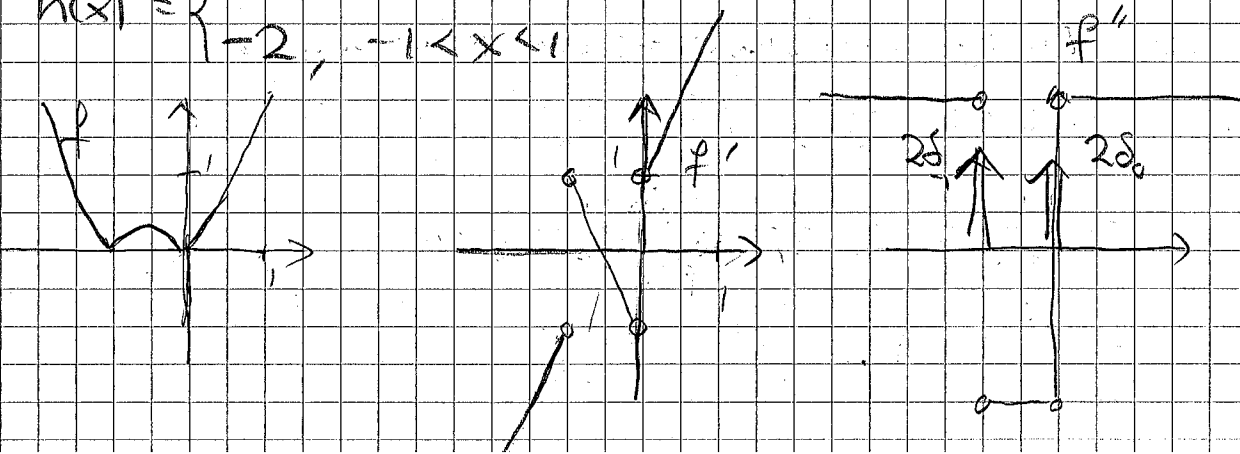
$$\langle f'', \varphi \rangle = -\langle f', \varphi' \rangle = -\left[\underbrace{(2x+1)\varphi}_{=-\varphi(-1)} \right]_{-\infty}^{-1} + \int_{-\infty}^{-1} 2 \cdot \varphi dx$$

$$+ \left[\underbrace{(2x+1)\varphi}_{=-\varphi(0)} \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 2 \varphi dx - \left[\underbrace{(2x+1)\varphi}_{=-\varphi(0)} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2 \varphi dx$$

$$= \varphi(0) + \varphi(-1) \quad \quad \quad = -\varphi(0)$$

$$= 2\varphi(-1) + 2\varphi(0) + \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \varphi(x) dx, \quad d\omega$$

$$h(x) = \begin{cases} 2, & x < -1 \text{ u. } x > 0 \\ -2, & -1 < x < 1 \end{cases}$$



$$f'' = 2\delta_{-1} + 2\delta_0 + h$$

4

Vi ser att f' är en funktion eftersom f är kontinuerlig, medan f'' innehåller Dirac delta-termerna motsvarande sprången hos f' .

(b) Lämpig approximation: $\cos^2 kx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2kx)$

$$\varphi \in D(\mathbb{R}) \Rightarrow$$

$$\langle g_k, \varphi \rangle = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2kx) \right) \varphi(x) dx,$$

$$\text{där } \int \cos(2kx) \varphi(x) dx = \underbrace{\left[\frac{1}{2k} \sin(2kx) \varphi \right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int \frac{1}{2k} \sin(2kx) \varphi dx$$

$$\rightarrow 0$$

$$\text{eftersom } \left| \int \sin(2kx) \varphi(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| dx < \infty$$

$$\therefore \langle g_k, \varphi \rangle \rightarrow \int \frac{1}{2} \cdot \varphi(x) dx$$

Svar: $g_k \rightarrow \frac{1}{2}$ svagt då $k \rightarrow \infty$

⑤ Se kurslitteraturen 4.1.3 och 4.1.6

⑥ På randenheten är

$$u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \cdot \sin 1 \\ = \left(\frac{1}{2} \sin 2\varphi \right)^2 \sin 1$$

(a) Enligt maximumprincipen antar u max och min på randen, så

$$\max = \frac{1}{4} \sin 1$$

$$\min = 0$$

(b) Enligt medelvärdesegenskapen är

$$u(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \sin 2\varphi \right)^2 \sin 1 d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sin 1 \cdot \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4\varphi \right) d\varphi$$

$$= \frac{1}{8} \sin 1.$$

⑦ (a) Låt $u = 1 + g(t) \sin 2x \sin 3y$

$\Rightarrow$ Randvillkor uppfyllde

Startvillkor uppfyllde om

$$g(0) = 1 \text{ och } g'(0) = 0$$

Vägenationen $\Leftrightarrow$

$$g''(t) \sin 2x \sin 3y = g(t) (-4 - 9) \sin 2x \sin 3y$$

$$\Leftrightarrow g''(t) = -13g(t)$$

Allmän lösning

$$g(t) = A \cos \sqrt{13}t + B \sin \sqrt{13}t$$

$$\text{startvillkor} \Rightarrow B = 0, A = 1$$

$$\text{Svar: } u(t, x, y) = 1 + \cos(\sqrt{13}t) \sin 2x \sin 3y.$$

(b) Antag v är en annan lösning.

$$\text{Låt } w = v - u.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_t^2 w = \Delta w & , t > 0 \\ w = 0 & , (x, y) \in \partial D \\ w = \partial_t w = 0 & , t = 0 \end{cases}$$

Definiera energi

$$E(t) = \iint_D (|\partial_t w|^2 + |\nabla w|^2) dx dy$$

$$\Rightarrow E'(t) = \iint_D (2(\partial_t w)(\partial_t^2 w) + 2\langle \nabla w, \partial_t \nabla w \rangle) dx dy$$

= /Green/

$$\Rightarrow \iint_D (\partial_t w \underbrace{\partial_t^2 w}_{=\Delta w} - \Delta w \partial_t w) dx dy + 2 \int_{\partial D} \partial_t w \cdot \underbrace{\partial_t w}_{=0}$$

$$= 0$$

$$\text{Startvillkor} \Rightarrow E(0) = 0,$$

$$\text{så } E(t) = 0, \forall t > 0.$$

$$\Rightarrow w = \text{konstant} = 0 \text{ för } t > 0.$$

$$\therefore v = u \text{ för } t > 0, (x, y) \in D.$$