

MATEMATIK

Göteborgs Universitet

Tentamen i Partiella differentialekvationer F3, TMA690

2023-04-05, kl. 8.30-12.30

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Examinator: Andreas Rosén

Under skrivningstiden nås examinator via telefon 0317725365.

Totalt antal skrivningspoäng är 50. Till dessa läggs bonuspoäng. Betygsgränser: 20 poäng för betyget 3, 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget 5, inklusive bonus.

Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara välskrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.

Lösningsförslag och besked om rättning och granskning lämnas via kursens hemsida.

1. (a) Förklara vad Huygens princip innebär för vågekvationen och när denna princip gäller. (3p)
- (b) Förklara vad som menas med Poissonkärnan för ett område $D \subset \mathbf{R}^2$. (3p)
- (c) Definiera vad som menas med en harmonisk konjugatfunktion till en harmonisk funktion u . (3p)

2. Finn lösningen $u(x, y)$ till PDEn

$$xy \partial_x u - x^2 \partial_y u - yu = xy, \quad x, y > 0,$$

som uppfyller $u(x, x) = 0$ för alla $x > 0$. (6p)

3. Betrakta start- och randvärdesproblemet

$$\begin{cases} u'_t = u''_{xx}, & t > 0, 0 < x < L, \\ u = 0, & t > 0, x = 0 \text{ eller } x = L, \\ u = 1, & t = 0, 0 < x < L, \end{cases}$$

för $u(t, x)$, där $L > 0$ är en given längd och $t > 0$, $x \in \mathbf{R}$.

- (a) Beräkna u med hjälp av lämplig egenfunktionsutveckling. (5p)
- (b) Avgör för vilka $a > 0$ som $e^{at}u(t, x)$ har ett ändligt nollskilt gränsvärde då $t \rightarrow \infty$. (2p)

Var god vänd!

4. (a) Beräkna den svaga andraderivatans f'' av funktionen

$$f(x) = |x^3 + x^2|.$$

Skissa f och f'' och förklara resultatet.

(4p)

- (b) Avgör för vilka konstanter $a \in \mathbf{R}$ som

$$g_n(x) = \frac{n^a}{1 + nx^2}, \quad x \in \mathbf{R},$$

konvergerar svagt då $n \rightarrow \infty$. Beräkna även gränsdistributionen.

(3p)

5. Låt $G(x, y)$ vara Greensfunktionen för ett område $D \subset \mathbf{R}^n$. Bevisa att $G(x, y) = G(y, x)$ för alla $x, y \in D$.

(7p)

6. Betrakta randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0, & \text{i } D, \\ \partial_\nu u + \gamma u = f, & \text{på } \partial D, \end{cases}$$

för en funktion $u(x, y)$ i ett begränsat område $D \subset \mathbf{R}^2$, där data består av en given funktion f på ∂D . Här är $\partial_\nu u = \nu_x u'_x + \nu_y u'_y$ riktningsderivatan längs den utåtriktade normalen på ∂D , och $\gamma > 0$ är en given konstant.

- (a) Finn en variationsformulering (V, a, L) av randvärdesproblemet ovan. Visa att variationsformuleringen och randvärdesproblemet är ekvivalenta.

(4p)

- (b) Visa att din bilinjära funktional $a(u, \phi)$ är begränsad och koersiv. Sats/resultat från kurslitteraturen får användas om de formuleras.

(3p)

7. Betrakta startvärdesproblemet

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = \Delta u, & t > 0, \\ u = 0, & t = 0, \\ u'_t = \delta, & t = 0, \end{cases}$$

för $u(t, x_1, x_2)$ i två rumsliga variabler $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$. Här är δ Diracdelta i origo i $x_1 x_2$ -planet.

- (a) Beräkna den rumsliga Fouriertransformen $\hat{u}_t(\xi_1, \xi_2)$ av lösningen $u_t(x_1, x_2) = u(t, x_1, x_2)$ för varje $t > 0$.

(3p)

- (b) Inverstransformera $\hat{u}_t$ genom att ansätta

$$u_t(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{C}{\sqrt{t^2 - x_1^2 - x_2^2}}, & x_1^2 + x_2^2 < t^2, \\ 0, & x_1^2 + x_2^2 > t^2, \end{cases}$$

där C är en konstant som väljs lämpligt. Ledning: På grund av rotationssymmetri räcker det att kontrollera att $\hat{u}_t(\xi, 0)$ sammanfaller med funktionen från (a) för $\xi > 0$.

(4p)



- (1) (a) Huygens princip gäller i dimension 3 och innebär att $u=0$ bakom vågfronten för en lösning till vågkvationen. Mer precist: Riemannfunktionen $R_f(x)=0$ för $|x| < ct$, där $c =$ utbredningshastigheten.

- (b) Lösningen till Dirichletproblemet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{ i } D \\ u = f & \text{ på } \partial D \end{cases}$$

kan skrivas

$$u(x) = \int_{\partial D} P(y, x) f(y) dS(y), \quad x \in D$$

Funktionen $P(y, x)$, $y \in \partial D$, $x \in D$, kallas Poissonkärnan för D och beräknas

$P(y, x) = \partial_n G(y, x)$ om Greensfunktionen G för D är känd.

- (c) Om $\Delta u(x, y) = 0$, så kallas en $v(x, y)$ en harmonisk konjugatfunktion till u om (u, v) löser Cauchy-Riemannsystemet

$$\begin{cases} \partial_x u = \partial_y v \\ \partial_y u = -\partial_x v \end{cases}$$

- (2) karakteristisk eku:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x^2}{xy} = -\frac{x}{y}$$

$$\int y dy = -\int x dx$$

$$y^2 = -x^2 + C$$

$$C = x^2 + y^2$$

→ Eik. komplett variabel bytte $\bar{u}$

2

$$\begin{cases} s = x \\ t = x^2 + y^2 \end{cases}$$

Kettenregeln $\Rightarrow$

$$xy(1 \cdot \cancel{\partial_s u} + 2x \cdot \cancel{\partial_t u}) - x^2(0 \cdot \cancel{\partial_s u} + 2 \cdot y \cdot \cancel{\partial_t u}) - yu = xy$$

$$\partial_s u - \frac{1}{x} u = 1$$

$$\partial_t u - \frac{1}{y} u = 1$$

$$\text{Integrierender Faktor} = e^{-\ln s} = \frac{1}{s} \Rightarrow$$

$$\partial_s \left(\frac{1}{s} u \right) = \frac{1}{s}$$

$$u(s, t) = s(\ln s + C(t))$$

$$u(x, y) = x(\ln(x) + C(x^2 + y^2))$$

Partikuläre Lösung:

$$0 = u(x, x) = x(\ln x + C(2x^2))$$

$$\text{Setz } 2x^2 = \alpha \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{\alpha}{2}}$$

$$C(\alpha) = -\ln \sqrt{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u(x, y) &= x \left(\ln x - \ln \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} x \ln \frac{2x^2}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

③ (a) Dirichlet eigenfunktionen für $(0, L)$ an $\sin\left(k \frac{\pi}{L} x\right)$, $k=1, 2, \dots$

Vorsatz

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_t(k) \sin\left(k \frac{\pi}{L} x\right)$$

$$\text{PDE} \Rightarrow \partial_t \hat{u}_t = -\left(k \frac{\pi}{L}\right)^2 \hat{u}_t$$

Lösung m.a.p. t , für fix k :

$$\hat{u}_t(k) = C_k e^{-(k \frac{\pi}{L})^2 t}$$

Startvillkor:

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-(k \frac{\pi}{L})^2 \cdot 0} \sin\left(k \frac{\pi}{L} x\right), \quad x \in (0, L)$$

Mult. med $\sin(n\frac{\pi}{L}x)$ och integrera $\int_0^L$ [3]
 för att finna C_n :

$$\int_0^L 1 \sin(n\frac{\pi}{L}x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-(k\frac{\pi}{L})^2 t} \underbrace{\int_0^L \sin(n\frac{\pi}{L}x) \sin(k\frac{\pi}{L}x) dx}_{=0 \text{ om } k \neq n}$$

$$= \int_0^L \frac{1}{2} dx = \frac{L}{2} \text{ om } k=n$$

$$\Rightarrow C_n = \frac{2}{L} \int_0^L \sin(nt) \frac{L}{\pi} dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \int_0^{\pi} e^{int} dt = \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \left(\frac{e^{i\pi n} - 1}{in} \right)$$

$$= \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & , n \text{ udda} \\ 0 & , n \text{ jämn} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(t,x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{4}{(2j+1)\pi} e^{-\frac{\pi^2}{L^2}(2j+1)^2 t} \sin\left(\frac{\pi}{L}(2j+1)x\right)$$

(b) Dominerande termen $j=0$ är

$$\frac{4}{\pi} e^{-\frac{\pi^2}{L^2} t} \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right)$$

Si efter fråget $a = \frac{\pi^2}{L^2}$, för vilket
 $e^{at} u \rightarrow \frac{4}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right)$ då $t \rightarrow \infty$

(4) (2) $x^3 + x^2 = x^2(x+1) = 0$ då $x=0, x=-1$

$$f(x) = \begin{cases} x^2(x+1) & , x > -1 \\ -x^2(x+1) & , x < -1 \end{cases}$$

$$\langle f'', \varphi \rangle = -\langle f', \varphi' \rangle = \langle f, \varphi'' \rangle$$

$$= \int_{-1}^{\infty} (x^3 + x^2) \varphi'' - \int_{-\infty}^{-1} (x^3 + x^2) \varphi''$$

$$= \left[(x^3 + x^2) \varphi' \right]_{-1}^{\infty} - \int_{-1}^{\infty} (3x^2 + 2x) \varphi' - \left[(x^3 + x^2) \varphi' \right]_{-\infty}^{-1} + \int_{-\infty}^{-1} (3x^2 + 2x) \varphi'$$

$$= - \left[(3x^2 + 2x) \varphi \right]_{-1}^{\infty} + \int_{-1}^{\infty} (6x + 2) \varphi + \left[(3x^2 + 2x) \varphi \right]_{-\infty}^{-1} - \int_{-\infty}^{-1} (6x + 2) \varphi$$

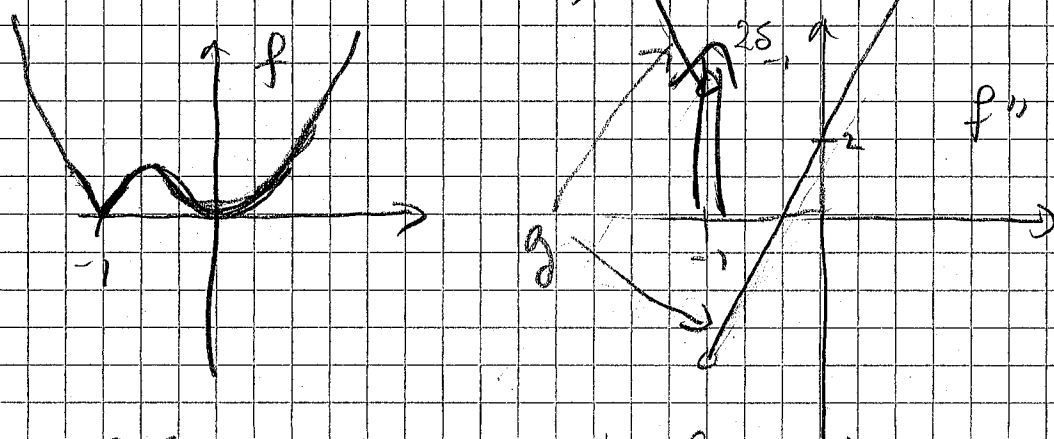
$$= -0 + 1 \cdot \varphi(-1)$$

$$= 1 \cdot \varphi(-1) - 0$$

$$= \langle 2\delta_{-1} + g, \varphi \rangle \quad \text{där}$$

$$g(x) = \begin{cases} 6x+2, & x > -1 \\ -(6x+2), & x < -1 \end{cases}$$

är den punktvisa
derivatan.



$2\delta_{-1}$ uppkommer då första derivatan f'
gör spring $1 - (-1) = 2$ i $x = -1$.

$$(b) \langle g_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{n^a}{1+n^2 x^2} \varphi(x) dx = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{1+t^2} \varphi\left(\frac{t}{n}\right) \frac{dt}{n} = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{1+t^2} \varphi\left(\frac{t}{n}\right) dt$$

$$= \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{1+t^2} \varphi\left(\frac{t}{n}\right) dt = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{1+t^2} \varphi\left(\frac{t}{n}\right) dt$$

$$\Rightarrow \varphi(0) \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{dt}{1+t^2} = \varphi(0) \left[\arctan t \right]_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} = \pi \varphi(0) = \langle \pi \delta_0, \varphi \rangle$$

Svar: $g_n \rightarrow \pi \cdot \delta_0$ om $a = \frac{1}{2}$

$g_n \rightarrow 0$ om $a < \frac{1}{2}$

g_n konv. ej svejt om $a > \frac{1}{2}$

⑤ Se Prop. 7.1.4 i kurslitteraturen.

⑥ (a) Mult. med φ och integrera:

$$0 = \int_D (-\Delta u + u) \varphi = \text{Green} = - \int_D \underbrace{\Delta u \cdot \varphi}_{= f - \Delta u} + \int_D (\nabla u \cdot \nabla \varphi + u \varphi)$$

" $u \cdot \varphi$ " termer $\rightarrow$

$$a(u, \varphi) = \int_D (\nabla u \cdot \nabla \varphi + u \varphi) dx + \gamma \cdot \int_{\partial D} u \cdot \varphi dS$$

" φ " termer $\rightarrow$

$$L(\varphi) = \int_{\partial D} \varphi \cdot \varphi dS$$

$V \cap H^1_0 = V = H^1_0(D)$ då endast deriverbarhet
behandlas även för φ .

51

Omvänt: Antag nu att $u \in V$ löser

$$a(u, \varphi) = L(\varphi), \quad \forall \varphi \in V \quad (*)$$

V behöver visa att u löser PDEn och
Robinrandvillkoret.

(*) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} f \varphi \, dS &= \int_D (\nabla u \cdot \nabla \varphi + u \varphi) \, dx + \gamma \int_{\partial D} u \varphi \, dS \\ &= \text{Green's} = \int_D \nabla u \cdot \nabla \varphi - \int_D \Delta u \cdot \varphi + \int_D u \varphi + \gamma \int_{\partial D} u \cdot \varphi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_D (-\Delta u + u) \varphi \, dx = \int_{\partial D} (f - \nabla u \cdot \nu - \gamma u) \varphi \, dS, \quad \forall \varphi \in H^1_0(D)$$

Velj först $\varphi_n \rightarrow \delta_a$, $a \in D$ inne punkt, $\varphi = 0$ på ∂D

$$\Rightarrow \int_D (-\Delta u + u) \varphi_n \, dx = 0$$

$$\downarrow$$

$$-\Delta u(a) + u(a)$$

Så $-\Delta u + u = 0$ i hela D .

$$\text{Så } \int_{\partial D} (f - \nabla u \cdot \nu - \gamma u) \varphi \, dS = 0, \quad \forall \varphi \in H^1_0(D)$$

Tag nu $\varphi_n \rightarrow \delta_b$, $b \in \partial D$, på randen

$$\Rightarrow f(b) - \nabla u(b) \cdot \nu - \gamma u(b) = 0, \quad \forall b \in \partial D$$

Så $\nabla u + \gamma u = f$ på hela ∂D .

(b) Eftersom $\gamma \cdot \int_{\partial D} u^2 \, dS \geq 0$ följer
 $a(u, u) \geq \|u\|_{H^1(D)}^2$, så a är koersiv.

Cauchy-Schwarz & Prop. 2.2.3 $\Rightarrow$

$$|a(u, \varphi)| \leq |\langle u, \varphi \rangle_{H^1}| + \gamma \int_{\partial D} u \cdot \varphi \, dS$$

$$\leq \|u\|_{H^1} \cdot \|\varphi\|_{H^1} + \gamma \cdot \left(\int_{\partial D} u^2 \, dS \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\partial D} \varphi^2 \, dS \right)^{1/2}$$

$$\leq \|u\|_{H^1} \cdot \|\varphi\|_{H^1} + \gamma \cdot C \cdot \|u\|_{H^1} \cdot \|\varphi\|_{H^1}$$

$$= (1 + C\gamma) \cdot \|u\|_{H^1} \cdot \|\varphi\|_{H^1}$$

$\therefore$ a $\bar{a}$ begränset

(7) (a) Lst $\hat{u}_t(\xi, \xi_2) = \iint_{\mathbb{R}^2} u(t, x_1, x_2) e^{-ix_1\xi - ix_2\xi_2} dx_1 dx_2$

$$\Rightarrow \partial_t^2 \hat{u}_t = -|\xi|^2 \hat{u}_t$$

Allmän lösning för t-ODEn, för fixt ξ :

$$\hat{u}_t(\xi) = A(\xi) \cos(|\xi|t) + B(\xi) \cdot \sin(|\xi|t)$$

Startvillkor:

$$u_0 = 0 \Rightarrow \hat{u}_0 = 0 = A(\xi)$$

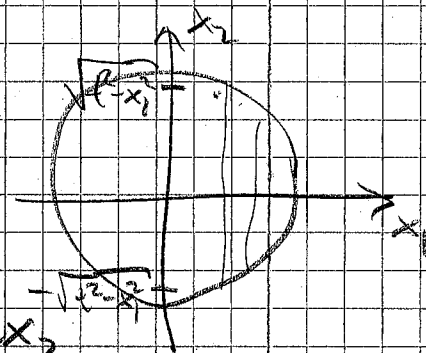
$$\partial_t u_0 = \delta \Rightarrow \partial_t \hat{u}_0 = \hat{\delta} = 1$$

$$\Rightarrow B(\xi) \cdot |\xi| \sin(|\xi| \cdot 0) = 1$$

$$\Rightarrow B(\xi) = \frac{1}{|\xi|}$$

$$\therefore \hat{u}_t(\xi) = \frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}$$

(b) Ansetten $\Rightarrow$



$$\hat{u}_t(\xi, 0) = \iint_{x_1^2 + x_2^2 \leq t^2} \frac{C}{\sqrt{t^2 - x_1^2 - x_2^2}} e^{-ix_1\xi} dx_1 dx_2$$

$$= \int_{-t}^t \left(\int_{-\sqrt{t^2 - x_1^2}}^{\sqrt{t^2 - x_1^2}} \frac{C dx_2}{\sqrt{t^2 - x_1^2 - x_2^2}} \right) e^{-ix_1\xi} dx_1$$

$$= \int_{-t}^t \frac{C \cdot \sqrt{t^2 - x_1^2} \cdot s}{\sqrt{(t^2 - x_1^2)(1 - s^2)}} ds = C \cdot [\arccos(s)]_{-1}^1 = C\pi$$

$$= \int_{-t}^t C \cdot \pi e^{-ix_1\xi} dx_1 = C\pi \left[\frac{e^{-ix_1\xi}}{-i\xi} \right]_{-t}^t = \frac{2C\pi}{\xi} \left(\frac{e^{-it\xi}}{-2i} - \frac{e^{it\xi}}{-2i} \right)$$

$$= \frac{2C\pi}{\xi} \sin(t\xi) = 2C\pi \frac{\sin(\xi t)}{\xi}$$

(Jfr. (a))

Välj $C = \frac{1}{2\pi}$, så har vi funnit vår 2D Riemannfunktion