

MATEMATIK

Göteborgs Universitet

Tentamen i Partiella differentialekvationer F3, TMA690

2023-01-12, kl. 8.30-12.30

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Examinator: Andreas Rosén

Under skrivningstiden nås examinator via telefon 0317725365.

Totalt antal skrivningspoäng är 50. Till dessa läggs bonuspoäng. Betygsgränser: 20 poäng för betyget 3, 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget 5, inklusive bonus.

Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara välskrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.

Lösningsförslag och besked om rättning och granskning lämnas via kursens hemsida.

1. (a) Förklara vad som menas med att ett PDE-problem är välställt (i Hadamards mening). (3p)
- (b) Förklara vad som menas med en Greensfunktion (för Δ) för ett område $D \subset \mathbf{R}^3$. (3p)
- (c) Definiera vad ett homogent Robin-randvillkor är, och ge ett exempel från fysiken där detta är ett naturligt villkor vid randen. (3p)

2. Finn lösningen $u(x, y)$ till PDEn

$$x \partial_x u - 2y \partial_y u + u = 1/x, \quad x > 0,$$

som uppfyller $u(x, 1) = 1$ för alla $x > 0$. (6p)

3. (a) Härled d'Alemberts formel för lösningen $u(t, x)$, $t > 0, x \in \mathbf{R}$, till det vanliga startvärdesproblemet för vågekvationen

$$u''_{tt} = c^2 u''_{xx}$$

i en rumslig variabel $x \in \mathbf{R}$. (Notera att formeln ska räknas fram, det räcker inte att kontrollera en memorerad formel.) (5p)

- (b) Finn två olika lösningar $u(t, x)$ till startvärdesproblemet

$$\begin{cases} u''_{tt} = u''_{xx}, & t > 0, \\ u(0, x) = e^{-x^2}, & x \in \mathbf{R}. \end{cases} \quad (2p)$$

Var god vänd!

4. (a) Finn en (lokalt integrerbar) funktion $f(x)$ vars svaga derivata är

$$f' = g - 2\delta_1,$$

där g är funktionen $g(x) = x^2$ och δ_1 är Diracs deltadistribution i $x = 1$. (4p)

- (b) Finn konstanter c_n , $n = 1, 2, \dots$, sådana att

$$c_n e^{-nx^2} \rightarrow \delta_0$$

svagt då $n \rightarrow \infty$. (3p)

5. Formulera och bevisa den svaga formen av maximumprincipen för värmeledningsekvationen. (7p)

6. Betrakta randvärdesproblemet

$$\begin{cases} u''_{xx} + 2u''_{yy} = 3u, & \text{i } D, \\ \nu_x u'_x + 2\nu_y u'_y = g, & \text{på } \partial D, \end{cases}$$

för en funktion $u(x, y)$ i ett begränsat område $D \subset \mathbf{R}^2$, där data består av en given funktion g på ∂D . Här är $\nu = (\nu_x, \nu_y)$ den utåtriktade enhetsnormalen på ∂D .

- (a) Finn en variationsformulering (V, a, L) av randvärdesproblemet ovan. Visa att variationsformuleringen och randvärdesproblemet är ekvivalenta. *Ledning:* Använd divergenssatsen på vektorfält $F = (u'_x, 2u'_y)v$. (4p)

- (b) Visa att det existerar en svag lösning för varje g sådant att $\int_{\partial D} |g|^2 ds < \infty$, genom att kontrollera villkoren i Lax-Milgrams sats. (4p)

7. (a) Bestäm Neumann-egenvärdena (för $-\Delta$) för intervallet $(0, 2) \subset \mathbf{R}$. (2p)

- (b) Avgör om det finns en funktion $f(x)$ på intervallet $(0, 2)$ sådan att

$$\int_0^2 f(x) dx = 0, \quad \int_0^2 (f(x))^2 dx = 1 \quad \text{och} \quad \int_0^2 (f'(x))^2 dx = 2.$$

Exempel eller motbevis efterfrågas. (4p)

- ① (a) Ett PDE-problem sägs vara välställt om
- (i) det existerar en lösning för varje $d \in \mathbb{R}$,
och
 - (ii) lösningen är unik, och
 - (iii) den beror kontinuerligt på d .

- (b) $G(y, x)$ är en Greenfunktion för D ,
med pol i $x \in D$, om
- $$G(y, x) = -\frac{1}{4\pi|y-x|} + g_x(y), \text{ där}$$
- $\Delta g_x = 0$ i D , och
 - $g_x(y) = \frac{1}{4\pi|y-x|}$ på ∂D .

- (c) Robins (homogena) randvillkor för u är
- $$\partial_n u + a u = 0$$

Ex: värmeledning i D , med temp. = 0
utanför D

$$-\partial_n u = a(u - 0)$$

värmeflöde ut genom ∂D temperaturskillnad mellan sidorna av ∂D

Vi ser att det fysikaliska är att $a > 0$,
då värme flödar från värmekällan ut.
 a mäter värmeledningsförmågan tvärs ∂D .

- ② Karakteristisk ekv:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2y}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -2 \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln y = -2 \ln x + C \Rightarrow e^C = x^2 y$$

Lämpligt variabelbyte:

$$\begin{cases} s = x \\ t = x^2 y \end{cases}$$

$$\text{Kedjeregeln} \Rightarrow \begin{cases} \partial_x u = \partial_s u + 2xy \partial_t u \\ \partial_y u = 0 + x^2 \partial_t u \end{cases}$$

2

Insätt:

$$x(\partial_s u + 2xy \partial_t u) - 2y(x^2 \partial_t u) + u = \frac{1}{x}$$

$$x=s \Rightarrow$$

$$s \partial_s u + u = \frac{1}{s}$$

Linjär ODE

$$\partial_s(su) = \frac{1}{s}$$

$$su = \ln s + C(t), \text{ där } C \text{ är en godtycklig envariabelfunktion.}$$

$$u = \frac{1}{s} \ln s + \frac{1}{s} C(t)$$

$$u(x,y) = \frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{x} C(x^2 y) \text{ allmän lösning.}$$

Partikulär lösning:

$$1 = u(x, 1) = \frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{x} C(x^2)$$

$$\text{Sätt } \alpha = x^2 \Rightarrow C(\alpha) = \sqrt{\alpha} - \ln \sqrt{\alpha}, \forall \alpha > 0.$$

$$\text{Sätt nu } \alpha = x^2 y \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \text{Svar: } u(x,y) &= \frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{x} (\sqrt{x^2 y} - \ln \sqrt{x^2 y}) \\ &= \sqrt{y} - \frac{1}{2x} \ln y \end{aligned}$$

3 (a) Vi har sett två härledningar av d'Alembert under kursen

- Med Fouriertransform: se kap. 3.2 $\rightarrow$ (3.11)

- Med variabel bytet $\begin{cases} \xi = x+ct \\ \eta = x-ct \end{cases}$

$$\text{Kedjeregeln} \Rightarrow \begin{cases} \partial_x u = 1 \cdot \partial_\xi u + 1 \cdot \partial_\eta u \\ \partial_t u = c \cdot \partial_\xi u - c \cdot \partial_\eta u \end{cases}$$

Insätt i PDEn:

$$(c \partial_\xi - c \partial_\eta)^2 u = c^2 (\partial_\xi u - \partial_\eta u)^2$$

$$\Leftrightarrow \partial_\xi \partial_\eta u = 0$$

13

Integrera: $\partial_\eta u = f(\eta)$

$$u = F(\eta) + G(\xi), \text{ där } F' = f.$$

(*) Allmän lösning: $u(t, x) = \underbrace{F(x-ct)}_{\text{högergående våg}} + \underbrace{G(x+ct)}_{\text{vänstergående våg}}$

Standard startvillkor:

$$\begin{cases} u = g, & t=0 \\ \partial_t u = h, & t=0 \end{cases}$$

där $g(x)$ och $h(x)$ är givna funktioner.

Insett: $F(x) + G(x) = g(x)$

$$-c F'(x) + c G'(x) = h(x) \Rightarrow -F(x) + G(x) = \frac{1}{c} h(x) + D$$

$\nearrow \quad \nwarrow$
 $h' = h$ konst

$$\Rightarrow 2F(x) = g(x) - \frac{1}{c} h(x) - D$$

$$2G(x) = g(x) + \frac{1}{c} h(x) + D$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u(t, x) &= \frac{1}{2} \left(g(x-ct) + g(x+ct) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c} h(x+ct) - \frac{1}{c} h(x-ct) \right) \\ &\quad - \frac{D}{2} + \frac{D}{2} \\ &= \frac{1}{2} (g(x+ct) + g(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(s) ds \end{aligned}$$

Detta är d'Alemberts formel.

(b) Med $c=1$ får vi från (*) två lösningar

$$u_1(t, x) = e^{-(x-t)^2} \quad (\text{sätt } G=0)$$

$$u_2(t, x) = e^{-(x+t)^2} \quad (\text{sätt } F=0)$$

(7) (a) En primitiv till x^2 är $\frac{x^3}{3} + C$

Termen $-2\delta_1$ visar att f gör språn -2 i

$x=1$, så sätt

$$f(x) = \begin{cases} x^3/3, & x < 1 \\ x^3/3 - 2, & x > 1. \end{cases}$$

Kontroll: $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Rightarrow$

4

$$\begin{aligned} \langle \varphi', \varphi \rangle &= -\langle \varphi, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{3} \varphi' dx - \int_{-1}^{\infty} \left(\frac{x^3}{3} - 2\right) \varphi' dx \\ &= -\left[\frac{x^3}{3} \varphi\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi dx - \left[\left(\frac{x^3}{3} - 2\right) \varphi\right]_{-1}^{\infty} + \int_{-1}^{\infty} x^2 \varphi dx \\ &= -\left(\frac{1}{3} \varphi(1) - 0\right) - \left(0 - \left(\frac{1}{3} - 2\right) \varphi(1)\right) + \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi dx \\ &= -2\varphi(1) = \langle -2\delta_1, \varphi \rangle \end{aligned}$$

Detta visar att $\varphi' = g - 2\delta_1$.

(b) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \langle c_n e^{-nx^2}, \varphi \rangle &= c_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2} \varphi(x) dx = /x = \frac{1}{\sqrt{n}} t/ \\ &= c_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \frac{dt}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Konst. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$

Vel; $c_n = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \Rightarrow$

$$\langle c_n e^{-nx^2}, \varphi \rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \varphi(0) dt = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

då $n \rightarrow \infty$.

(3) Se kursboken 7.2.4, 7.2.5.

(6)(a) Multiplicera med φ och integrera:

$$\iint_D (u''_{xx} + 2u''_{xy}) \varphi dx dy = \iint_D 3u \varphi dx$$

DIV-satsen på vektor fältet $F = (u'_x, 2u'_y) \varphi \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \iint_D ((\text{div}(u'_x, 2u'_y)) \varphi + (u'_x, 2u'_y) \cdot \nabla \varphi) dx dy \\ = u''_{xx} + 2u''_{xy} = \int_{\partial D} \nu \cdot (u'_x, 2u'_y) \varphi ds \end{aligned}$$

$= g$

$$\Rightarrow \iint_D [u'_x \varphi'_x + 2u'_y \varphi'_y + 3u \varphi] dx dy = \int_{\partial D} g \varphi ds = L(\varphi)$$

$= a(u, \varphi)$

Variationsformulering:

5

$a(u, \varphi) = L(\varphi)$, $\forall \varphi \in V$, där
 a, L enligt ovan och $V = H^1(D)$.

Vi har visat ovan att u löser randvärdesproblemet

$\Rightarrow u$ löser variationsproblemet.

Omvänt: antag $a(u, \varphi) = L(\varphi)$, $\forall \varphi \in V$.

Omskrivning med divergenssats $\Rightarrow$

$$\int_D 3u \varphi \, dx \, dy + \int_{\partial D} \nu \cdot (u'_x, 2u'_y) \varphi \, ds - \int_D (u''_{xx} + 2u''_{xy}) \varphi \, dx \, dy = \int_D g \varphi \, dx \, dy$$

$$\Leftrightarrow \int_D (u''_{xx} + 2u''_{xy} - 3u) \varphi \, dx \, dy = \int_{\partial D} [\nu \cdot (u'_x, 2u'_y) - g] \varphi \, ds$$

Velj först $\varphi = \varphi_n$, där $\varphi_n = 0$ på ∂D och

$\varphi_n \rightarrow \delta_x$ svejt, $x \in D$

$$\Rightarrow u''_{xx} + 2u''_{xy} - 3u = 0 \quad \text{i } x=0$$

$\times$ godtyckligt $\Rightarrow u''_{xx} + 2u''_{xy} = 3u$ i hela D .

$$\text{Velj nu: } 0 = \int_{\partial D} [\nu \cdot (u'_x, 2u'_y) - g] \varphi \, ds, \quad \forall \varphi \in H^1(D)$$

Velj nu $\varphi = \varphi_n$, där $\varphi_n \rightarrow \delta_x$ svejt på ∂D
 $x \in \partial D$

Detta visar att $\nu \cdot (u'_x, 2u'_y) = g$ i $x \in \partial D$,
 och därmed på hela ∂D .

$\therefore u$ löser BVP:t.

(b) Kontroll av LM:

$V = H^1(D)$ är Hilbertrum, ok!

$$|a(u, \varphi)| \leq 3 \sqrt{\int_D (u'^2_x + u'^2_y + u^2) \, dx \, dy}$$

$$\begin{aligned} 1 \leq 3, 3 \leq 3 \text{ och} & \quad \sqrt{\int_D (\varphi'^2_x + \varphi'^2_y + \varphi^2) \, dx \, dy} \\ \text{Cauchy-Schwarz} & \quad = 3 \|u\|_{H^1(D)} \|\varphi\|_{H^1(D)}. \end{aligned}$$

$\therefore a$ är begränsad

$$a(u, u) = \iint_D (|u_x|^2 + 2|u_y|^2 + 3u^2) dx dy$$

$$\geq \|u\|_{H^1(D)}^2 \quad \text{eftersom } 2 \geq 1, 3 \geq 1.$$

$\therefore a$ är koersiv.

$$|L(\varphi)| \leq \int_{\partial D} |g| \cdot |\varphi| ds \leq \underbrace{\left(\int_{\partial D} |g|^2 ds \right)^{1/2}}_{\substack{< \infty \\ \text{enligt} \\ \text{entegende}}} \cdot \underbrace{\left(\int_{\partial D} |\varphi|^2 ds \right)^{1/2}}_{\substack{\leq C \|\varphi\|_{H^1(D)} \\ \text{enligt} \text{ Ljundbom} \\ 2, 2, 3.}}$$

$\therefore L$ är begränsad.

Villkoren i LM-sats är uppfyllde

så en svag lösning till variationsproblemet
existerar för alla $g \in L_2(\partial D)$.

(7) (a) Neumann-eigenfunktionerna för $D = (0, 2)$

vet vi är $\cos(\frac{\pi}{2}nx)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

$\Rightarrow$ Egenvärden $\tilde{\lambda}_n = (\frac{\pi}{2}n)^2$ eftersom

$$\frac{d^2}{dx^2} \cos(\frac{\pi}{2}nx) = -(\frac{\pi}{2}n)^2 \cos(\frac{\pi}{2}nx)$$

(b) Låt $\tilde{H}^1(D) = \{u \in H^1(D); \int_D u dx = 0\}$

Första Neumann-eigenfunktionen $\tilde{e}_0(x)$ är
en konstant funktion.

$$\text{Villkoret } \int_D u dx = 0 \Leftrightarrow \langle u, e_0 \rangle = 0.$$

En karakterisering av e_1 är att

$$R(u) = \int_D |Du|^2 dx / \int_D u^2 dx \quad \text{antar min}$$

i $\tilde{H}^1(D)$ för $u = e_1$

$$(a) \Rightarrow R(e_1) = \int_0^2 -(\frac{\pi}{2})^2$$

Om f finns, så $f \in \tilde{H}^1(D)$ och $R(f) = 2/1 = 2$.

$$\text{Därför: } 2 \geq (\frac{\pi}{2})^2 \Leftrightarrow \pi \leq 2\sqrt{2} \approx 2.82$$

Men så inte! $\therefore$ sådan f existerar ej.