

MATEMATIK

Göteborgs Universitet

Tentamen i Partiella differentialekvationer F3, TMA690

2022-08-15, kl. 14.00-18.00

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Examinator: Andreas Rosén

Under skrivningstiden nås examinator via telefon 0317725365.

Totalt antal skrivningspoäng är 50. Till dessa läggs bonuspoäng. Betygsgränser: 20 poäng för betyget 3, 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget 5, inklusive bonus.

Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara välskrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.

Lösningsförslag och besked om rättning och granskning lämnas via kursens hemsida.

1. (a) Förklara vad som menas med en Dirichlet-egenfunktion för ett område D . (3p)
- (b) Förklara vad som menas med en hyperbolisk linjär andra ordningens PDE. (3p)
- (c) Definiera vad ett abstrakt variationsproblem är. (3p)
2. Finn alla lösningar $u(x, y)$ till PDEn

$$y \partial_x u - x \partial_y u = xyu.$$

(6p)

3. Antag att $u(t, r)$, där $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, är en radiell lösning till vågekvationen $\partial_t^2 u = c^2 \Delta u$ i $\mathbf{R}^3$.
 - (a) Visa att $v(t, r) = r u(t, r)$ löser vågekvationen $\partial_t^2 v = c^2 \partial_r^2 v$ på $\mathbf{R}$, med rumsvariabel $r \in \mathbf{R}$.
Ledning: $\Delta = \partial_r^2 + 2r^{-1} \partial_r$ för radiella funktioner i $\mathbf{R}^3$. (4p)
 - (b) Formulera d'Alembert's lösningsformel för vågekvationen för v på $\mathbf{R}$. (Härledning/bevis efterfrågas inte.) (2p)
 - (c) Lös startvärdesproblemet $u(0, r) = g(r)$, $\partial_t u(0, r) = h(r)$ för u i $\mathbf{R}^3$, för givna jämna funktioner $g(r)$ och $h(r)$. (2p)

Var god vänd!

4. (a) Låt

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ |x - 1|, & x > 0. \end{cases}$$

Beräkna den svaga derivatan f' . Skissa f och f' , och förklara resultatet. (4p)

- (b) Avgör om funktionerna

$$f_k(x) = \begin{cases} k^2, & |x| < 1/k, \\ 0, & |x| > 1/k, \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

konvergerar svagt då $k \rightarrow \infty$, och bestäm i så fall gränsdistributionen. (3p)

5. Låt $D \subset \mathbf{R}^2$ vara ett begränsat område med slät rand. Betrakta en slät funktion f på $\bar{D}$ och dess randvärden $g = f|_{\partial D}$. Visa att $g \in L_2(\partial D)$ och att det finns en konstant $C < \infty$ sådan att

$$\int_{\partial D} |g(x)|^2 ds(x) \leq C \int_D (|\nabla f(x)|^2 + |f(x)|^2) dx. \quad (6p)$$

6. Neumannfunktionen $N(y, x)$ för ett område $D \subset \mathbf{R}^2$ definieras liknande Greensfunktionen: vi kräver att $N(y, x) = (2\pi)^{-1} \ln |y - x| + n_x(y)$ där n_x är harmonisk i D och $\partial_\nu N = 1/L$ på ∂D , där L är längden av randkurvan ∂D .

- (a) Låt D vara enhetsskivan $x_1^2 + x_2^2 < 1$. Visa att $n_x(y) = (2\pi)^{-1} \ln |y - x|/|x|^2|$ ger Neumannfunktionen för D . (4p)

- (b) Härled en lösningsformel för Neumanns randvärdesproblem på enhetsskivan

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & x \in D, \\ \partial_\nu u(x) = g(x), & x \in \partial D, \\ \int_{\partial D} u(x) ds(x) = c, \end{cases}$$

i termer av N . (3p)

7. Vi kommer ihåg att värmekärnan (för värmeledningskonstant $k = 1$) i $\mathbf{R}^3$,

$$H_t(x) = (4\pi t)^{-3/2} e^{-|x|^2/(4t)}, \quad t > 0, x \in \mathbf{R}^3,$$

har Fouriertransform $\hat{H}_t(\xi) = e^{-t|\xi|^2}$.

- (a) Beräkna den inversa Fouriertransformen $f(x)$ av $1/|\xi|^2$ i $\mathbf{R}^3$. (Här är $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ och $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$.)

Ledning: t -integration av $H_t(x)$ kan vara användbart. (5p)

- (b) Beräkna Δf i $\mathbf{R}^3$. (2p)

- (1) (a) $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ är en Dirichlet-eigenfunktion om $\Delta u = -\lambda u$ för något $\lambda \in \mathbb{R}$ och om $u|_{\partial D} = 0$.
- (b) $\sum_{i,j} a_{ij} \partial_i \partial_j u + \sum_i a_i \partial_i u + a u = f$ är hyperbolisk om matrisen $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ har egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ där alla $\lambda_i \neq 0$ och alla λ_i har samma tecken utom exakt ett λ_i .
- (c) Ett abstrakt variationsproblem (V, a, L) är en linjär ekvation för $u \in V$ på formen $a(u, \varphi) = L(\varphi)$, $\forall \varphi \in V$. Här är V ett funktionsrum, $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ är bilinjär och $L: V \rightarrow \mathbb{R}$ är linjär.

(2) karaktistisk ekvation är:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

$$\int y dy = - \int x dx$$

$$y^2 = -x^2 + C$$

Välj variabelbytet $\begin{cases} s = x \\ t = x^2 + y^2 \end{cases} \quad (=C)$

Kedjeregeln $\Rightarrow$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \frac{\partial u}{\partial s} + 2x \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \frac{\partial u}{\partial s} + 2y \frac{\partial u}{\partial t}$$

Insättning: $y(\partial_s u + 2x \partial_t u) - x(2y \partial_t u) = xy u$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = xu = su$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} - su = 0$$

Int. faktor $e^{-s^2/2}$

$$\partial_s(e^{-s^2/2} u) = 0$$

$$u(s, t) = e^{s^2/2} \cdot C(t)$$

Svar: $u(x, y) = e^{x^2/2} C(x^2 + y^2)$, där $C(\cdot)$ är en godtyckligt envärdet funktion.

12

③ (a) Vi vet $\partial_t^2 u = \partial_r^2 u + \frac{2}{r} \partial_r u$.

$$\partial_t^2 v = r \cdot \partial_t^2 u$$

$$\partial_r v = r \partial_r u + u$$

$$\partial_r^2 v = 2 \partial_r u + r \partial_r^2 u$$

$$\Rightarrow \partial_t^2 v - c^2 \partial_r^2 v = r \partial_t^2 u - c^2 (2 \partial_r u + r \partial_r^2 u) = 0$$

(b) Lösningen till

$$\begin{cases} \partial_t^2 v = c^2 \partial_r^2 v, & t > 0 \\ v = g_0, & t = 0 \\ \partial_t v = h_0, & t = 0 \end{cases}$$

är

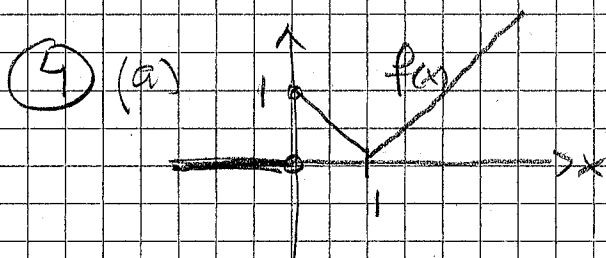
$$v(t, r) = \frac{1}{2} (g_0(r-ct) + g_0(r+ct)) + \frac{1}{2c} \int_{r-ct}^{r+ct} h_0(s) ds$$

(c) Ertvå (b) och (b), med $g_0(r) = rg(r)$, $h_0(r) = rh(r)$,

$$r \cdot u(t, r) = \frac{1}{2} [(r-ct)g(r-ct) + (r+ct)g(r+ct)] + \frac{1}{2c} \int_{r-ct}^{r+ct} sh(s) ds$$

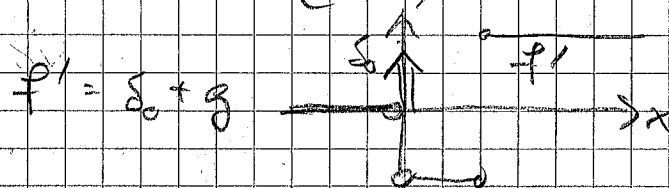
Svar: $u(t, r) = \frac{1}{2r} [(r-ct)g(r-ct) + (r+ct)g(r+ct)] + \frac{1}{2cr} \int_{r-ct}^{r+ct} sh(s) ds$

/Kommentar: u, g, h ses som jämna funktioner av r , med v, g_0, h_0 ses som udda sådana./



$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle = -\int_0^1 (1-x) \varphi'(x) dx - \int_1^\infty (x-1) \varphi'(x) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= - \left[(-x) \varphi(x) \right]_0^1 + \int_0^1 (-1) \varphi(x) dx \\
 &\quad - \left[(x-1) \varphi(x) \right]_1^\infty + \int_1^\infty 1 \cdot \varphi(x) dx \\
 &= \varphi(0) + \int_{-\infty}^\infty g(x) \varphi(x) dx = \langle \delta_0 + g, \varphi \rangle \\
 &\text{där } g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -1, & x \in (0, 1) \\ 1, & x > 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$



Direkt δ i 0 för f' eftersom f gör språng 1 i $x=0$, inget δ i $x=1$ då f där kontinuerlig.

(b) Vi noterar att

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_h dx = -h^2 \cdot \frac{2}{h} = 2h \rightarrow \infty \text{ då } h \rightarrow \infty$$

Tag $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ med $\varphi=1$ för $-1 < x < 1$.

$$\text{Då: } \langle f_h, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_h dx \rightarrow \infty$$

Svar: f_h konvergerar ej svagt.

⑤ Se kurskompendiet Prop. 2.2.3

⑥ Då n_x är ett trasligt sv fundamenteal lösningen $\bar{\Phi}(y)$ och $\frac{x}{|x|^2} \notin D$, vet vi att $\Delta n_x = 0$ i D .

För att beräkna $\partial_\nu n$ skriver vi

$$x = r e^{i\theta}, \quad y = \rho e^{i\varphi}$$

$$N = \frac{1}{4\pi} \left[\ln(|y|^2 + |x|^2 - 2\langle y, x \rangle) + \ln\left(|y|^2 + \frac{1}{|x|^2} - 2\langle y, \frac{x}{|x|^2} \rangle\right) \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left[\ln(\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \theta)) + \ln\left(\rho^2 + \frac{1}{r^2} - 2\rho \frac{1}{r} \cos(\varphi - \theta)\right) \right]$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial \nu} &= \frac{\partial N}{\partial \rho} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{2\rho - 2r \cos(\varphi - \theta)}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \theta)} + \frac{\frac{2}{\rho} - 2 \frac{1}{r} \cos(\varphi - \theta)}{\rho^2 + \frac{1}{r^2} - 2\rho \frac{1}{r} \cos(\varphi - \theta)} \right] \\
 &= \frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi} \frac{2 - 2r \cos(\varphi - \theta) + r^2(2 - \frac{2}{r^2} \cos(\varphi - \theta))}{1 + r^2 - 2r \cos(\varphi - \theta)} = \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{L}
 \end{aligned}$$

(b) Green 2 med u och N (fixt x) ger:

$$\iint_D \underbrace{(u \Delta N - \Delta u \cdot N)}_{=\delta_x} dy = \int_{\partial D} \underbrace{\left(u \frac{\partial N}{\partial \nu} - \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot N \right)}_{=f} ds$$

$$\Rightarrow u(x) = \iint_D f(y) N(y, x) dy + c \cdot L - \int_{\partial D} g(y) N(y, x) ds(y)$$

(7) (a) $F\left\{ \frac{1}{(4\pi t)^{3/2}} e^{-|x|^2/4t} \right\} = e^{-t|3|^2}$

Integrera $\int_0^\infty dt \Rightarrow$

$$\int_0^\infty e^{-t|3|^2} dt = \int_0^\infty F\{H_t(x)\} dt \stackrel{\text{Byt integrationsordning}}{=} F\left\{ \int_0^\infty H_t(x) dt \right\}$$

$$\Rightarrow \left[-\frac{1}{|3|^2} e^{-t|3|^2} \right]_{t=0}^\infty = F\left\{ \int_0^\infty H_t(x) dt \right\}$$

$$= 1/|3|^2$$

Variabelbyte $s^2 = |x|^2/4t$, $dt = -\frac{|x|^2}{2s^3} ds$ ger

$$\int_0^\infty H_t(x) dt = \int_0^\infty \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} \left(\frac{4s^2}{|x|^2} \right)^{3/2} e^{-s^2} \frac{|x|^2}{2s^3} ds$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} \frac{4}{|x|} \int_0^\infty e^{-s^2} ds = \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} \frac{4}{|x|} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{4\pi|x|}$$

Svar: $f(x) = \frac{1}{4\pi|x|}$

(b) $F\{\Delta f\} = (-|3|^2) \cdot \left(\frac{1}{|3|^2} \right) = -1$

Di: $F\{\delta_0\} = 1$ följer det att

Svar: $\Delta f = -\delta_0$