

MATEMATIK

Göteborgs Universitet

Tentamen i Partiella differentialekvationer F3, TMA690

2022-04-13, kl. 8.30-12.30

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Examinator: Andreas Rosén

Under skrivningstiden nås examinator via telefon 0317725365.

Totalt antal skrivningspoäng är 50. Till dessa läggs bonuspoäng. Betygsgränser: 20 poäng för betyget 3, 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget 5, inklusive bonus.

Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara välskrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.

Lösningsförslag och besked om rättning och granskning lämnas via kursens hemsida.

1. (a) Definiera Sobolevrummet $H_0^1(D)$. (3p)

(b) Förklara vad som menas med ett naturligt randvillkor för ett randvärdeproblem med variationsformulering (V, a, L) . (2p)

(c) Definiera begreppen Greensfunktion och Poissonkärna. (4p)

2. Finn alla lösningar $u(x, y)$ till PDEn

$$2y \partial_x u + 3x^2 \partial_y u - 4xyu = x^2 e^{x^2}, \quad y > 0. \quad (7p)$$

3. På kvadraten $0 < x < 1, 0 < t < 1$ betraktar vi PDE-problemet

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u + tx, & 0 < t, x < 1, \\ u = -1, & x = 0, \\ u = 1, & x = 1, \\ u = 2x - 1, & t = 0. \end{cases}$$

Visa entydighet av lösningar

(a) med hjälp av en maximumprincip, (3p)

(b) med hjälp av en energiprincip.

(*Ledning:* Studera hur kvadrat-integralen av funktionen med avseende på x förändras med t .) (4p)

4. (a) Låt

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| > 1, \\ x^3, & |x| < 1. \end{cases}$$

Beräkna den svaga derivatan f' . Skissa f och f' , och förklara resultatet. (3p)

(b) Avgör om funktionerna $f_k(x) = k \sin(kx)$, $k = 1, 2, 3, \dots$ konvergerar svagt då $k \rightarrow \infty$, och bestäm i så fall gränsdistributionen. (3p)

Var god vänd!

5. Betrakta en variationsformulering (V, a, L) av ett randvärdesproblem.

(a) Formulera villkoren på V , a och L i Lax–Milgrams sats som garanterar existens av svaga lösningar. (Satsen ska inte bevisas.) (2p)

(b) Formulera ett minimeringsproblem som är ekvivalent med variationsproblemet. Bevisa ekvivalensen, för (V, a, L) som uppfyller villkoren i (a). (5p)

6. Betrakta “Riemannfunktionerna” $R_t(x)$, med utbredningshastighet $c = 1$ i dimension $n = 3$, det vill säga distributionen R_t , $t > 0$, som har Fouriertransform

$$\hat{R}_t(\xi) = \frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}.$$

(a) Beräkna $R_t(x)$. (5p)

(b) Definiera Huygens princip i termer av R_t . (2p)

7. På kvadraten $0 < x < \pi$, $0 < t < \pi$ betraktar vi start- och randvärdesproblemet

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = -a\partial_x^2 u, & 0 < t, x < \pi, \\ u = 0, & x = 0, \\ u = 0, & x = \pi, \\ u = g, & t = 0, \\ \partial_t u = 0, & t = 0, \end{cases}$$

där $g(x)$ är en given kontinuerliga funktion med $g(x) = 0$ då $x \leq 0$ och då $x \geq \pi$, och $a > 0$ är en given konstant.

(a) Klassificera PDEn $\partial_t^2 u + a\partial_x^2 u = 0$. (2p)

(b) Lös PDE-problemet genom utveckling i serie av Dirichlet-egenfunktioner. (3p)

(c) Förklara vad som är problematiskt med serielösningen i (b) och avgör om PDE-problemet är välställt. (2p)

- ① (a) En funktion f tillhör $H^1(D)$ om f är en funktion på $D \subset \mathbb{R}^n$ sådan att $f \in L_2(D)$ och dess partiella distributionsderivator $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ är funktioner och tillhör $L_2(D)$.
 $f \in H_0^1(D)$ om $f \in H^1(D)$ och $f=0$ på ∂D .
- (b) Rendivillkoret är naturligt om det inte förekommer i definitionen av V .
- (c) En Greensfunktion för ett område $D \subset \mathbb{R}^n$ är en funktion $G(y, x)$, $x, y \in D$, på formen $G(y, x) = \Phi(y-x) + g_x(y)$, där Φ är fundamental lösningen till Δ för $\mathbb{R}^n$, $\Delta g_x = 0$ i D och $G(y, x) = 0$ för $y \in \partial D$.
 Poissonkärnan, med pol x , är funktionen $\frac{\partial G}{\partial \nu}(y)$ på ∂D .

② Karakteristisk ekv.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}$$

$$\int 2y dy = \int 3x^2 dx$$

$$y^2 = x^3 + C$$

Vi läser till variabelbytet

$$\begin{cases} s = x \\ t = y^2 - x^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_x u = 1 \cdot \partial_s u - 3x^2 \partial_t u \\ \partial_y u = 0 \cdot \partial_s u + 2y \partial_t u \end{cases}$$

Insatt:

$$2y(\partial_s u - 3x^2 \partial_t u) + 3x^2(2y \partial_t u) - 4xyu = x^2 e^{x^2}$$

2

$$\partial_s u - 2xu = \frac{x^2}{2\sqrt{t+s^3}} e^{x^2}$$

$$\partial_s u - 2su = \frac{s^2}{2\sqrt{t+s^3}} e^{s^2}$$

Integrerande faktor $e^{-s^2} \Rightarrow$

$$\partial_s (e^{-s^2} u) = \frac{s^2}{2\sqrt{t+s^3}}$$

$$e^{-s^2} u = \int \frac{s^2}{2\sqrt{t+s^3}} ds + C(t)$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{t+s^3} + C(t)$$

$$\Rightarrow u(s,t) = \left(\frac{1}{3} \sqrt{t+s^3} + C(t) \right) e^{s^2}$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \left(\frac{y}{3} + C(y^2-x^3) \right) e^{x^2}$$

där $C(\cdot)$ är en godtycklig envariabel-funktion

③ Antag u_1 och u_2 både löser PDE-problemet

Di löser, p.g.a linearitet, $v := u_1 - u_2$

$$\begin{cases} \partial_t v = \partial_x^2 v & , 0 \leq t, x \leq 1 \\ v = 0 & , x=0 \text{ och } x=1 \\ v = 0 & , t=0 \end{cases} (*)$$

(a) Max. principen för $(VA) \Rightarrow$

$$v \leq 0 \text{ för } 0 \leq t, x \leq 1$$

Men även $-v$ löser $(*)$, så

$$-v \leq 0 \text{ för } 0 \leq t, x \leq 1$$

$$\therefore v = 0, \text{ dvs } u_1 = u_2 \text{ för } 0 \leq t, x \leq 1.$$

(b) Låt $E(t) = \int_0^1 |v(t,x)|^2 dx$

Derivering under integraltecknet $\Rightarrow$

$$E'(t) = \int_0^1 2(\partial_t v) v dx = \int_0^1 2(\partial_x^2 v) v dx$$

$$= \left[2(\partial_x v) v \right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 2|\partial_x v|^2 dx \leq 0$$

Men $E(0) = 0$ och uppenbart $E(t) \geq 0$

$$\Rightarrow \forall t: E(t) = 0.$$

Det följer att $V=0$ för $0 \leq t, x \leq 1$. $\square$

3

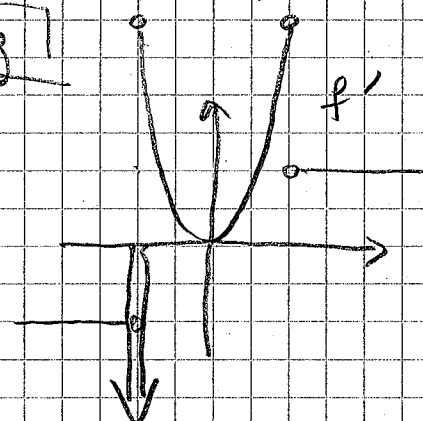
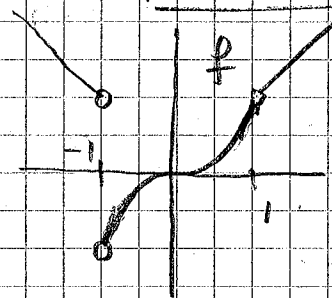
$$\begin{aligned}
 (4) \quad (a) \quad \langle f', \varphi \rangle &= -\langle f, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{-1} (-x) \varphi' dx \\
 &\quad - \int_{-1}^1 x^3 \varphi' dx - \int_1^{\infty} x \varphi' dx \\
 &= [x \varphi]_{-\infty}^{-1} - \int_{-1}^1 \varphi dx - [x^3 \varphi]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 3x^2 \varphi' dx \\
 &\quad - [x \varphi]_{-1}^{\infty} + \int_1^{\infty} \varphi dx \\
 &= -\varphi(-1) - \varphi(1) - \varphi(-1) + \varphi(1) + \int_{-\infty}^{\infty} g \varphi dx
 \end{aligned}$$

där

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^3, & x < -1 \\ \frac{1}{3}x^3, & -1 < x < 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$\therefore \langle f', \varphi \rangle = \langle -2\delta_{-1} + g, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

så $f' = -2\delta_{-1} + g$



Vi får inget Dirac-delta i $x=1$ då f är kontinuerlig där, men $-2\delta_{-1}$ då f har språng -2 i $x=-1$.

(b) För $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
 \langle f_h, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} h \sin(hx) \cdot \varphi(x) dx \\
 &= \left[-\cos(hx) \varphi(x) \right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \cos(hx) \varphi'(x) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{h} \sin(hx) \varphi'(x) \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h} \sin(hx) \varphi''(x) dx
 \end{aligned}$$

Så om $\varphi = 0$ för $|x| \geq R$ och $|\varphi''| \leq C$, så

$$\begin{aligned}
 |\langle f_h, \varphi \rangle| &\leq \int_{-R}^R \underbrace{\left| \frac{1}{h} \sin(hx) \right|}_{\leq 1} \cdot C dx \\
 &\leq \frac{2RC}{h} \rightarrow 0 \quad \text{då } h \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

Svar: $f_h \rightarrow 0$ svagt då $h \rightarrow \infty$

⑤ Se sets 2.3.5 och lemma 2.3.6.
 i huvudsak kompendiet.

4

⑥ (a) Gissning / ansats:

$$\langle f_t, \varphi \rangle = \iint_{|x|=t} \varphi(x) dS(x), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$$

f_t är en distribution som är 0 i hela $\mathbb{R}^3$ förutom på sfären $|x|=t$ med radien t , där f_t har en "yt-Dirac" singularitet.

Vi Fourier-transformerar:

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}_t, \varphi \rangle &= \langle f_t, \hat{\varphi} \rangle \\ &= \iint_{|x|=t} \left(\iint_{\mathbb{R}^3} \varphi(\xi) e^{-i\langle x, \xi \rangle} d\xi \right) dS(x) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^3} \left(\iint_{|x|=t} e^{-i\langle x, \xi \rangle} dS(x) \right) \varphi(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} g(\xi) \varphi(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Vi ser att $\hat{f}_t$ är funktionen $g(\xi)$:

Välj ON-bas så att $\xi = (0, 0, |\xi|)$ och använd sfäriska koord. $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} g(\xi) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{-i|\xi|t \underbrace{\cos\theta}_{=x_3}} \underbrace{t^2 \sin\theta d\theta d\varphi}_{dS(x)} \\ &= 2\pi t^2 \int_0^\pi \sin\theta e^{-i|\xi|t \cos\theta} d\theta \\ &= 2\pi t^2 \left[\frac{1}{i|\xi|t} e^{-i|\xi|t \cos\theta} \right]_{\theta=0}^\pi \\ &= 2\pi t^2 \frac{1}{i|\xi|t} (e^{i|\xi|t} - e^{-i|\xi|t}) \\ &= \frac{4\pi t}{|\xi|} \sin(|\xi|t) \end{aligned}$$

Det följer att $R_t = \frac{f_t}{4\pi t}$.

- (b) Huygens princip innebär att $R_t = 0$ för $|x| < t$. (Dvs vågutbredningen sker med hastighet $c=1$, varken mer eller mindre.) 5

(7) (a) Principaldelen är

$$\begin{bmatrix} \partial_t & \partial_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_t \\ \partial_x \end{bmatrix}$$

$a > 0$ visar att både egenvärdena $\lambda = 1$ och $\lambda = a$ är positiva, så PDEn är elliptisk

(b) Dirichlet e-funktioner för $D = (0, \pi)$ är

$$\sin(kx), \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\text{Summ } u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_t(k) \sin(kx)$$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{g}(k) \sin(kx)$$

Insättning i PDEn $\Rightarrow$

$$\partial_t^2 \hat{u}_t(k) = -a \hat{u}_t(k) \cdot (-k^2)$$

$$\partial_t^2 \hat{u}_t = a k^2 \hat{u}_t \quad \text{är en ODE i } t \text{ med}$$

allmän lösning

$$\hat{u}_t = c_1 e^{ak^2 t} + c_2 e^{-ak^2 t}$$

För $t=0$:

$$\hat{u}_t = c_1 + c_2 = \hat{g}(k)$$

$$\partial_t \hat{u}_t = ak^2(c_1 - c_2) = 0 \quad \Rightarrow c_1 = c_2$$

$$\Rightarrow c_1 = c_2 = \frac{1}{2} \hat{g}(k)$$

$$\Rightarrow \hat{u}_t(k) = \hat{g}(k) \cdot \cosh(ak^2 t)$$

$$\Rightarrow u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{g}(k) \cosh(ak^2 t) \sin(kx)$$

(c) Problemet med serielösningen är att [6]
 $\cosh(ak^2t) \rightarrow \infty$ då $k \rightarrow \infty$ för fixt t .
Serien kommer inte i allmänhet konvergera
för $t > 0$.

Att PDE-problemet inte är välställt kan
man se genom att välja startdata

$$g(x) = \sin(kx) \text{ (för fixt } k)$$

$|g| \leq 1$, men lösningen

$$u(t, x) = \cosh(ak^2t) \cdot \sin(kx)$$

$$\sim e^{ak^2t} \text{ för } t > 0 \text{ då } \sin(kx) = 1.$$

Då $k \gg 1$ är $e^{ak^2t} \gg 1$, så lösningen
börjar ej kontinuerligt på startdata.