

MATEMATIK

Göteborgs Universitet

Tentamen i Partiella differentialekvationer F3, TMA690

2022-01-13, kl. 8.30-12.30

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Examinator: Andreas Rosén

Under skrivningstiden nås examinator via telefon 0317725365.

Totalt antal skrivningspoäng är 50. Till dessa läggs bonuspoäng. Betygsgränser: 20 poäng för betyget 3, 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget 5, inklusive bonus.

Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara välskrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.

Lösningsförslag och besked om rättning och granskning lämnas via kursens hemsida.

1. Definiera följande.

(a) Vad menas med en tempererad distribution $F \in S'(\mathbf{R}^n)$? (3p)

(b) Vad menas med en parabolisk linjär andra ordningens PDE? (3p)

(c) Vad menas med ett elliptiskt PDE-system av Dirac-typ? (3p)

2. Beräkna lösningen $u(x, y)$ till PDE-problemet

$$y^2 \partial_x u + 2x^3 y \partial_y u = x^3, \quad \text{för } y > x^2,$$

som uppfyller $u(0, y) = y^3$ för $y > 0$. (7p)

3. Betrakta värmekärnan $H_t(x)$, med värmeledningskonstant $k = 1$ i dimension $n = 1$, det vill säga funktionen H_t , $t > 0$, som har Fouriertransform $e^{-t|\xi|^2}$.

(a) Beräkna $H_t(x)$. (5p)

(b) Visa att H_t konvergerar svagt mot Dirac-deltat δ_0 då $t \rightarrow 0^+$. (2p)

4. Låt

$$f(x) = |x - x^2|, \quad x \in \mathbf{R}.$$

(a) Beräkna den svaga derivatan f' . Skissa f' och förklara resultatet. (3p)

(b) Beräkna den svaga andraderivatan f'' . Skissa f'' och förklara resultatet. (3p)

Var god vänd!

5. (a) Harmoniska funktioner uppfyller medelvärdesegenskapen. Förklara vad detta betyder. (Bevis av medelvärdesegenskapen efterfrågas ej, bara formuleringen av resultatet.) (2p)
- (b) Formulera maximumprincipen (starka formen) för Laplaces ekvation och bevisa denna. (5p)
6. På cirkelringen $1 < r < 2$ i $\mathbf{R}^2$, där $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, betraktar vi PDE-problemet

$$\begin{cases} \Delta u = f, & 1 < r < 2, \\ u = 1, & r = 1, \\ u = 0, & r = 2, \end{cases}$$

där $f(x, y)$ är en känd funktion.

- (a) Ange en funktion $u_0(x, y)$ sådan att $v = u - u_0$ löser ett PDE-problem

$$\begin{cases} \Delta v = g, & 1 < r < 2, \\ v = 0, & r = 1, \\ v = 0, & r = 2, \end{cases}$$

med homogena randvillkor. För ditt val av u_0 , ange vad källan g är i termer av f . (3p)

- (b) Variationsformulera PDE-problemet för v , och visa hur/att en lösning till variationsproblemet ger en lösning till det ursprungliga PDEproblemet för u . (4p)

7. Betrakta ett svängande membran, beskrivet av ett område $D \subset \mathbf{R}^2$, som är fixerat på höjd $u = 0$ längs ∂D . Vi bortser från alla yttre krafter förutom en friktionskraft som antas proportionell mot, och motsatt riktad, membranets hastighet.

- (a) Härled ett linjärt start- och randvärdesproblem för membranets svängningsrörelse $u(t, x, y)$, då membranets startposition och starthastighet vid tid $t = 0$ beskrivs av givna funktioner $g(x, y)$ och $h(x, y)$. (2p)
- (b) Härled en lösningsformel för detta PDE-problem, med hjälp av lämpliga egenfunktioner. Egenfunktionerna får antas vara givna/kända, och friktionskraften antas vara liten. Det ska tydligt framgå hur $u(t, x)$ beräknas utifrån g och h . (5p)

① (a) En tempererad distribution F på $\mathbb{R}^n$ är en linjär funktional $F: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, definierad för alla Schwartz-testfunktioner $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
 φ är en Schwartz-testfunktion om φ 's derivator, av godtycklig ordning, existerar som kontinuerliga funktioner, och estimeras som $\mathcal{O}(|x|^{-N})$ då $|x| \rightarrow \infty$, för alla $N < \infty$.

(b) Låt A vara den symmetriska matris vars element är koefficienterna i PDEns principdel. PDEn är parabolisk om A har ett egenvärde $\lambda = 0$, medan övriga egenvärden är nollskilda och alla har samma tecken.

(c) Ett elliptiskt PDE-system av Dirac-typ, är ett system av linjära första ordningens PDEer

$$Pu = 0, \quad u(x) = \begin{bmatrix} u_1(x) \\ \vdots \\ u_N(x) \end{bmatrix},$$

där $N \times N$ matrisen P , med differentiooperatorer som element, har kvadrat

$$P^2 = \begin{bmatrix} \Delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Delta \end{bmatrix} = \text{diagonal med } \Delta = \text{Laplaceoperatorn, på diagonalen.}$$

② Karakteristisk ekvation:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^3 y}{y^2} = \frac{2x^3}{y}$$

$$\int y dy = \int 2x^3 dx$$

$$y^2 = x^4 + C$$

$\leadsto$ variabelbyte $\begin{cases} s = x \\ t = y^2 - x^4 \end{cases}$

Kedjeregeln $\Rightarrow$

2

$$\begin{cases} \partial_x u = 1 \partial_s u - 4x^3 \partial_t u \\ \partial_y u = 0 \cdot \partial_s u + 2y \partial_t u \end{cases}$$

Insättning:

$$y^2 (\cancel{\partial_s u} - 4x^3 \cancel{\partial_t u}) + 2x^3 y (\cancel{2y \partial_t u}) = x^3$$

$$\partial_s u = \frac{x^3}{y^2} = \frac{s^3}{t+s^4}$$

Integration $\Rightarrow$

$$u(s, t) = \frac{1}{4} \ln(t+s^4) + C(t)$$

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{4} \ln(y^2) + C(y^2 - x^4) \\ &= \frac{1}{2} \ln y + C(y^2 - x^4) \end{aligned}$$

Brillouin $\Rightarrow$

$$y^3 = u(0, y) = \frac{1}{2} \ln y + C(y^2), \quad \forall y > 0$$

$$\text{Sätt } \alpha = y^2:$$

$$C(\alpha) = \alpha^{3/2} - \frac{1}{2} \ln \sqrt{\alpha} = \alpha^{3/2} - \frac{1}{4} \ln \alpha$$

Vi får particular lösningen:

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \ln y + (y^2 - x^4)^{3/2} - \frac{1}{4} \ln(y^2 - x^4)$$

Svar: $u(x, y) = \frac{1}{4} \ln \frac{y^2}{y^2 - x^4} + (y^2 - x^4)^{3/2}$

③ (a) $F\{H_t(x)\} = e^{-t|\xi|^2}$, se Fouriers

inversionsformel ger

$$H_t(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t|\xi|^2} \cdot e^{ix\xi} d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int e^{-t\xi^2 + ix\xi} d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \exp\left(-t\left(\xi - \frac{ix}{2t}\right)^2 - \frac{x^2}{4t}\right) d\xi$$

$$= e^{-\frac{x^2}{4t}} \frac{1}{2\pi} \int e^{-t\left(\xi - \frac{ix}{2t}\right)^2} d\xi$$

= / var. byte $\xi \rightarrow s = \left(\xi - \frac{ix}{2t}\right)\sqrt{t}$ /

$$= e^{-x^2/4t} \frac{1}{2\pi} \int e^{-s^2} \frac{ds}{\sqrt{t}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \left(\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-a^2} da db \right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \left(2\pi \underbrace{\int_0^\infty e^{-r^2} r dr}_{=1/2} \right)^{1/2}$$

3

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}$$

(b) Fouriertransformens def. för $F \in S'(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle \hat{F}, \varphi \rangle = \langle F, \hat{\varphi} \rangle, \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

$$\Rightarrow \langle H_t, \varphi \rangle = \langle \hat{H}_t, \check{\varphi} \rangle, \quad \text{där}$$

$\check{\varphi} = F^{-1}\{\varphi\}$ är inverstransform.

Låt nu $t \rightarrow 0^+$.

Det är klart att

$$\hat{H}_t = e^{-t|\cdot|^2} \rightarrow 1 \quad \text{sagt, så}$$

$$\langle H_t, \varphi \rangle \rightarrow \int \check{\varphi}(x) dx$$

$$\text{Men } \varphi(0) = \int \check{\varphi}(x) e^{-i \cdot 0 \cdot x} dx, \quad \text{så}$$

$$\langle H_t, \varphi \rangle \rightarrow \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}).$$

4

$$\begin{aligned} x - x^2 &= 0 && \text{för } x=0, x=1 \\ &> 0 && \text{för } 0 < x < 1 \\ &< 0 && \text{f.o.} \end{aligned}$$

$$\text{så } f(x) = \begin{cases} x - x^2, & 0 < x < 1 \\ x^2 - x, & x < 0 \text{ eller } x > 1. \end{cases}$$

$$(c) \langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle = -\int_0^1 (x^2 - x) \varphi'(x) dx$$

$$- \int_0^1 (x - x^2) \varphi'(x) dx - \int_{-\infty}^{-1} (x^2 - x) \varphi'(x) dx$$

$$= -\left[(x^2 - x) \varphi \right]_0^1 + \int_0^1 (2x - 1) \varphi dx$$

$$- \left[(x - x^2) \varphi \right]_0^1 + \int_0^1 (1 - 2x) \varphi dx$$

$$- \left[(x^2 - x) \varphi \right]_1^\infty + \int_1^\infty (2x - 1) \varphi dx$$

$$= \langle g, \varphi \rangle, \quad \text{där}$$

$$g = \begin{cases} 1 - 2x, & 0 < x < 1 \\ 2x - 1, & x < 0 \text{ eller } x > 1 \end{cases}$$

Svar: f' är funktionen g .

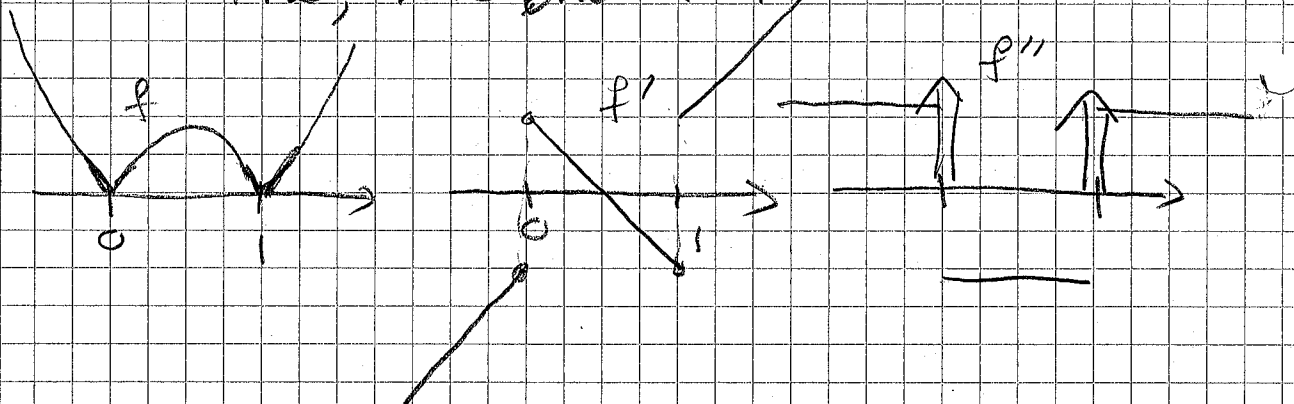
$$(b) \langle f'', \varphi \rangle = -\langle f', \varphi' \rangle = -\langle g, \varphi' \rangle$$

$$= -\int_{-\infty}^0 (2x-1) \varphi'(x) dx - \int_0^1 (1-2x) \varphi'(x) dx - \int_1^{\infty} (2x-1) \varphi'(x) dx$$

$$= -[(2x-1)\varphi]_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0 2\varphi dx - [(1-2x)\varphi]_0^1 + \int_0^1 (-2)\varphi dx - [(2x-1)\varphi]_1^{\infty} + \int_1^{\infty} 2\varphi dx$$

$$= \varphi(0) + \int_{-\infty}^0 2\varphi dx + \varphi(1) + \varphi(0) + \int_0^1 (-2\varphi) dx + \varphi(1) = \langle h + 2\delta_0 + 2\delta_1, \varphi \rangle, \text{ d}\bar{e}$$

$$g(x) = \begin{cases} -2, & 0 < x < 1 \\ +2, & x < 0 \text{ eller } x > 1 \end{cases}$$



Svar: $f'' = h + 2\delta_0 + 2\delta_1$

f' är en funktion då f är kontinuerlig.

f'' har Directermer då f' har språng i $x=0$ och $x=1$.

(3) (a) u är harmonisk em $\Delta u = 0$.

Sådane funktioner uppfyller

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y)$$

där $\partial B(x,r)$ är cirkeln/sfären med centrum x och radie r , och $|\partial B(x,r)|$ dess längd/areal.

(b) Se kurskomplet, Thm. 5.2.2.

(6) (a) Välj u_0 sådan att

$$u_0 = 1 \text{ då } r=0 \text{ och } u_0 = 0 \text{ då } r=2,$$
$$\text{t.ex. } u_0(x,y) = \frac{1}{3}(4-x^2-y^2).$$

5

Om $u = v + u_0$ noterar vi:

$$u = 1 \Leftrightarrow v = 0 \quad \text{för } r=1$$

$$u = 0 \Leftrightarrow v = 0 \quad \text{för } r=2$$

$$\Delta u = f \Leftrightarrow \Delta v + \underbrace{\Delta u_0}_{= \frac{-2-2}{3} = -\frac{4}{3}} = f \quad \text{för } 1 < r < 2.$$

Källan g är alltså för detta u_0 :

$$g = f + \frac{4}{3}$$

(b) Välj $V = H_0^1(D)$, med $D = \{(x,y); 1 < x^2 + y^2 < 4\}$, eftersom homogena Dirichlet villkor föreligger.

För $\varphi \in V$:

$$\int_D \Delta v \cdot \varphi \, dx = \int_D g \cdot \varphi \, dx$$

$$\overset{\text{Green}}{\int_{\partial D} \nabla v \cdot \varphi \, ds} \overset{0}{=} - \int_D \nabla v \cdot \nabla \varphi \, dx$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_D \nabla v \cdot \nabla \varphi \, dx}_{=: a(v, \varphi)} = - \underbrace{\int_D g \cdot \varphi \, dx}_{=: L(\varphi)}$$

Detta ger variationsformuleringen (V, a, L) .

Omvänt, antag $a(v, \varphi) = L(\varphi)$, $\forall \varphi \in V$ för $v \in V$.

Vi har då $v=0$ på ∂D , $\forall v \in H_0^1(D)$, och

$$\int_D \nabla v \cdot \nabla \varphi \, dx = - \int_D g \cdot \varphi \, dx$$

$$\overset{\text{Green}}{=} - \int_D \Delta v \cdot \varphi$$

$$\therefore \forall \varphi \in V: \int_D (\Delta v - g) \varphi \, dx = 0$$

Gör om ett valfritt $\varphi = \varphi_j$ som

konvergerer snabbt mot δ_a , för given punkt $a \in D$, följer

$$\Delta v(e) - g(a) = 0.$$

$\therefore \Delta v = g$ i hela D

Vi bildar sedan $u = v + u_0$ och noterar:

$$\Delta u = \Delta v + \Delta u_0 = g - \frac{4}{3} = f$$

$$u = v + u_0 = 0 + 1 = 1 \text{ för } r=1$$

$$u = v + u_0 = 0 + 0 = 0 \text{ för } r=2.$$

(7) (a) För härledning av PDEn

$$\partial_t^2 u = c^2 \Delta u - a \partial_t u, \quad (*)$$

se kurskompendiet exempel 1.3.2.

Vårt IBVP blir:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = c^2 \Delta u - a \partial_t u, & t > 0, x \in D \\ u = 0, & x \in \partial D \\ u = g, & t = 0 \\ \partial_t u = h, & t = 0 \end{cases}$$

(b) Vi antar en ON-bas $e_1(x), e_2(x), \dots$

av Dirichlet egenfunktioner givna för D ,

s.s. $\Delta e_j = -\lambda_j e_j$, där $\lambda_j > 0$ är egenvärdena.

$$\text{Skriv } u_t(x) = u(t, x) = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{u}_t(j) e_j(x)$$

Insätt i (*):

$$\sum \partial_t^2 \hat{u}_t(j) e_j = \sum (c^2 \hat{u}_t(j) \cdot (-\lambda_j) - a \partial_t \hat{u}_t(j)) e_j$$

lika!

Fixera j . Funktionen $f(t) = \hat{u}_t(j)$ löser ODEn

$$f''(t) = -c^2 \lambda_j f(t) - a f'(t). \quad (*)$$

Lös denna. Karakteristisk eqn:

$$x^2 = -c^2 \lambda_j - ax$$

$$(x + \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4} - c^2 \lambda_j$$

$$\lambda = -\frac{a}{2} \pm i \sqrt{c^2 \lambda_j - \frac{a^2}{4}}$$

7

Allmänna lösningen till (*) vet vi är

$$f(t) = e^{-\frac{a}{2}t} (A_j \cos(\mu_j t) + B_j \sin(\mu_j t))$$

$$\text{där } \mu_j = \sqrt{c^2 \lambda_j - \frac{a^2}{4}}$$

$$\Rightarrow u(t, x) = e^{-\frac{a}{2}t} \sum_{j=1}^{\infty} (A_j \cos(\mu_j t) + B_j \sin(\mu_j t)) e_j(x) \quad (A)$$

Vid $t=0$ har vi Fourierkoeff.

$$\hat{u}_0(j) = \hat{g}(j) = \int_0^1 g(x) e_j(x) dx \quad (B)$$

$$\partial_t \hat{u}_t(j)|_{t=0} = \hat{h}(j) = \int_0^1 h(x) e_j(x) dx \quad (C)$$

Detta ger

$$A_j = \hat{g}(j)$$

$$-\frac{a}{2} A_j + \mu_j B_j = \hat{h}(j) \Rightarrow B_j = \frac{1}{\mu_j} (\hat{h}(j) + \frac{a}{2} \hat{g}(j)) \quad (D)$$

Svar: Vår lösningssformel är, givet g och h ,
beräkna $\hat{g}(j), \hat{h}(j)$ med (B-C),
beräkna A_j, B_j med (D-E), vilket
ger lösningen (A).