

MATEMATIK

Göteborgs Universitet

Hemtentamen i Partiella differentialekvationer F3, TMA690

2021-08-16, kl. 14.00-18.00

Hjälpmedel: Alla.

Examinator: Andreas Rosén

Under skrivningstiden nås examinator via epost rosenan@chalmers.se och telefon 0317725365.

Totalt antal skrivningspoäng är 50. Till dessa läggs bonuspoäng. Betygsgränser: 20 poäng för betyget 3, 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget 5, inklusive bonus. En muntlig redogörelse av lösningar i efterhand kan komma att krävas för de högre betygen.

Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara välskrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.

Lösningsförslag och besked om rättning och granskning lämnas via kursens hemsida.

1. (a) För villka av följande tre PDE, finns en lösning $u(x, y)$ för $y > 0$ som inte är 17 gånger kontinuerligt deriverbar:

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0, \partial_x^2 u - \partial_y^2 u = 0 \text{ och } \partial_x^2 u - \partial_y^2 u = 0? \quad (3p)$$

- (b) Vilka av följande tre PDE är hyperboliska:

$$\partial_x \partial_y u = 0, \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 2 \partial_x \partial_y u \text{ och } \partial_x^2 u = xyu? \quad (3p)$$

- (c) Betrakta funktionen

$$f(x) = 1 - |x|$$

på intervallet $D = (-1, 1)$. Beräkna $L_2(D)$, $\dot{H}^1(D)$ och $H^1(D)$ normerna av f . (3p)

2. Beräkna lösningen $u(x, y)$ till PDE-problemet

$$e^y \partial_x u + 2x \partial_y u = x, \quad \text{och} \quad u(0, y) = 0. \quad (7p)$$

3. Betrakta PDE-problemet

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = \partial_x^2 u, & t > 0, \\ u = 0, & t = 0, \\ \partial_t u = h(x), & t = 0, \end{cases}$$

för $u(t, x)$, där $h(x)$ är en given funktion på $\mathbf{R}$ med absolutkonvergent integral.

- (a) Beräkna lösningen $u(t, x)$ för $t > 0$, om $h(x) = 1/(1 + x^2)$ (3p)

- (b) Beräkna $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, 0)$ för en allmän funktion $h(x)$. Relatera detta resultat till Huygens princip. (4p)

Var god vänd!

4. (a) Låt

$$f(x) = \begin{cases} a, & x < 0, \\ e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

Bestäm konstanten $a \in \mathbf{R}$ så att den svaga derivatan f' är en funktion. Beräkna för detta a den svaga andraderivatan f'' .

(3p)

(b) Låt

$$f_k(x) = \frac{k^2 x}{1 + (kx)^4} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Avgör om f_k konvergerar svagt då $k \rightarrow \infty$ och bestäm i så fall gränsdistributionen.

(3p)

5. Betrakta på ett område $D \subset \mathbf{R}^2$ variationsproblemet (V, a, L) med

$$\begin{cases} a(u, \phi) = \int_D \langle A \nabla u, \nabla \phi \rangle dx dy, \\ L(\phi) = \int_D f \phi dx dy, \\ V = H_0^1(D), \end{cases}$$

där $f \in L_2(D)$ är en given funktion på D , och $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ är en given konstant symmetrisk matris.

(a) Finn den PDE som en lösning u till variationsproblemet uppfyller, och avgör för vilka $a, b, d \in \mathbf{R}$ som denna PDE är elliptisk.

(4p)

(b) Avgör för vilka $a, b, d \in \mathbf{R}$ som villkoren i Lax–Milgrams sats är uppfyllda.

(3p)

6. Visa att två egenfunktioner u och v till Laplaceoperatorn Δ på ett område $D \subset \mathbf{R}^3$ är ortogonala i $L_2(D)$, om de har olika egenvärden men uppfyller samma homogena Robin-randvillkor på ∂D .

(7p)

7. Antag att $u(t, x)$ är kontinuerlig för $t \geq 0$, $-1 \leq x \leq 1$, och uppfyller

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u, & |x| < 1, t > 0, \\ u < x^2, & t = 0, \\ u < 1 + 2t, & |x| = 1. \end{cases}$$

Visa att $u(t, x) < x^2 + 2t$ för alla $t > 0$, $|x| < 1$.

(7p)

① (a) $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$ är Laplaces ekvation.

Alle lösningar är godtyckligt många gånger deriverbara, speciellt 17 ggr.

• $\partial_x^2 u - \partial_y^2 u = 0$ är värmeledningsekv. ($y = t$).

Samme gäller här.

• $\partial_x^2 u - \partial_t^2 u = 0$ är vågekvationen ($y = t$)

Till denne finns lösningar som inte ens är

1 gång deriverbar, t ex

$$u(x, y) = \max(0, 1 - |x - y|).$$

Svar: endast för $\partial_x^2 u - \partial_t^2 u = 0$.

(b) Symbolerna för principaldelarna är

$$Q(s, t) = st = \frac{1}{4}[(s+t)^2 - (s-t)^2]$$

$$Q(s, t) = s^2 + t^2 - 2st = (s-t)^2, \text{ resp.}$$

$$Q(s, t) = s^2$$

Endast den förste är indefinit.

Svar: endast $\partial_x \partial_y u = 0$.

$$(c) \left(\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \left(2 \int_0^1 (1-x)^2 dx \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\left(\int_{-1}^1 |f'(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \left(\int_{-1}^0 1^2 dx + \int_0^1 (-1)^2 dx \right)^{1/2} = \sqrt{2}$$

$$\text{Svar: } \|f\|_{L^2(D)} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \|f\|_{H^1(D)} = \sqrt{2}$$

$$\|f\|_{H^1(D)} = \sqrt{\frac{2}{3} + 2} = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

② Karakteristisk ekv: $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{e^y}$

$$\int e^y dy = \int 2x dx$$

$$e^y = x^2 + C$$

Lämpligt variabelbyte: $\begin{cases} s = x \\ t = e^y - x^2 \end{cases}$

Kedjeregeln $\Rightarrow$

2

$$\begin{cases} \partial_x u = 1 \cdot \partial_s u - 2x \cdot \partial_t u \\ \partial_y u = 0 \cdot \partial_s u + e^y \cdot \partial_t u \end{cases}$$

$$\Rightarrow e^y (\cancel{\partial_s u} - 2x \cancel{\partial_t u}) + 2x (\cancel{e^y \partial_t u}) = x$$

$$\partial_s u = \frac{x}{e^y} = \frac{s}{t+s^2}$$

$$u(s, t) = \frac{1}{2} \ln(t+s^2) + f(t)$$

$$u(x, y) = \frac{1}{2} y + f(e^y - x^2)$$

Startvillkor:

$$0 = u(0, y) = \frac{y}{2} + f(e^y), \quad \forall y$$

$$\text{Låt } \xi = e^y \Rightarrow$$

$$f(\xi) = -\frac{1}{2} \ln(\xi), \quad \forall \xi > 0$$

$$\Rightarrow u(x, y) = \frac{y}{2} - \frac{1}{2} \ln(e^y - x^2) \quad \text{för } e^y > x^2$$

Svar: $u(x, y) = \frac{y}{2} - \frac{1}{2} \ln(e^y - x^2)$.

③ Lösningen ges av d'Alemberts formel

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(0+0) + \frac{1}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) dy$$

$$(a) \quad h(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow$$

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{2} [\arctan(x+ct) - \arctan(x-ct)]$$

$$(b) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(t, 0) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h(y) dy$$

I det generiska fallet är denna integral $\neq 0$, som i (a).

Huygens princip gäller ej i 1 rumsdimension, och

här skulle $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, 0)$ alltså varit 0, och u hade varit 0 beloken vägen.

④ (a) Vi beräknar f' :

$$\begin{aligned} \langle f', \varphi \rangle &= -\langle f, \varphi' \rangle = -\int_0^b a \varphi'(x) dx - \int_0^\infty e^{-x} \varphi'(x) dx \\ &= -a \varphi(0) - [e^{-x} \varphi(x)]_0^\infty + \int_0^\infty (-e^{-x}) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

$$= (1-a)\varphi(0) - \int_0^\infty e^{-x} \varphi(x) dx$$

$$\Rightarrow f' = (1-a)\delta_0 + g, \text{ där}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

f' är funktion $\Leftrightarrow a=1$. (Se f är kontinuerlig!)

$\forall$ beräknar f'' :

$$\langle f'', \varphi \rangle = -\langle f', \varphi' \rangle = \langle -g', \varphi' \rangle = \int_0^\infty e^{-x} \varphi'(x) dx$$

$$= [e^{-x} \varphi(x)]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x} \varphi(x) dx$$

$$= -\varphi(0) + \int_0^\infty e^{-x} \varphi(x) dx$$

$$\Rightarrow \underline{f'' = -\delta_0 + h}, \text{ där}$$

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

(b) $\forall$ undersöker:

$$\langle f_h, \varphi \rangle = \int \frac{x}{k^2 + k^2 x^4} \varphi(x) dx = \int \frac{1}{kx} \varphi(x) dx$$

$$= \int \frac{\tilde{k}^{-1} y}{k^2 + k^2 y^4} \varphi(\tilde{k}^{-1} y) \tilde{k}^{-1} dy = \int \frac{y}{1+y^4} \underbrace{\varphi\left(\frac{y}{k}\right)}_{\rightarrow \varphi(0) \text{ då } k \rightarrow \infty} dy$$

$$\rightarrow \varphi(0) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{y}{1+y^4}}_{\text{odde funktion}} dy = 0, \text{ då } k \rightarrow \infty.$$

Svar: $f_h \rightarrow 0$ svegt.

(5) (a) Antag $u \in H_0^1(D)$ löser

$$a(u, \varphi) = L(\varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^1(D).$$

Divergenssatsen med $F = (A \nabla u) \varphi$

$$\int_{\partial D} \underbrace{(n \cdot A \nabla u)}_{=0} \varphi dS(y) - \int_D \underbrace{(\operatorname{div}(A \nabla u))}_{=a} \varphi dx = \underbrace{\int_D f \varphi dx}_{=L}$$

$\forall \varphi \in C_c^\infty(D) \rightarrow$ Divergenssats $\Rightarrow u$ löser

$$\operatorname{div}(A \nabla u) = -f$$

$$\Leftrightarrow \partial_x(a \partial_x u + b \partial_y u) + \partial_y(b \partial_x u + d \partial_y u) = -f$$

$$\Leftrightarrow a \partial_x^2 u + 2b \partial_x \partial_y u + d \partial_y^2 u = -f$$

Enligt Strouss 1.6 är PDEn elliptisk om

4

$b^2 < ad$, dvs om A är en (pos. eller neg.) definit matrix.

(b) Vi kontrollerar villkoren i L.M.s sats:

• $H_0^1(D)$ är ett Hilbertrum: ok

• L är begränsad:

$$|L(\varphi)| = \left| \int f \varphi dx \right| \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \underbrace{\|f\|_{L_2(D)}}_{\leq C} \underbrace{\|\varphi\|_{L_2(D)}}_{\leq \|\varphi\|_{H^1(D)}} \quad \text{ok}$$

• a är begränsad:

$$|a(u, \varphi)| = \left| \int \langle A \nabla u, \nabla \varphi \rangle dx \right| \leq C \int |\nabla u| \cdot |\nabla \varphi| dx \leq C \underbrace{\|u\|_{H^1(D)}}_{\text{beroende på } A} \cdot \underbrace{\|\varphi\|_{H^1(D)}}_{\text{ok}}$$

• a är koersiv?

Om $\|u\|_{H^1(D)} \leq C \|u\|_{H^1(D)}$ för $u \in H_0^1(D)$ enligt Poincaré's olikhet, räcker vi så att

$$\left| \int \langle A \nabla u, \nabla u \rangle dx \right| \geq C \int |\nabla u|^2 dx.$$

Detta gäller om A är en definit matrix som i (a), ty då är

$$\langle A v, v \rangle \geq C |v|^2 \quad \text{för varje vektor } v \in \mathbb{R}^2.$$

Svar! Villkoret i både (a) och (b) är

$$b^2 < ad, \quad \text{PDEn är } \operatorname{div}(A \nabla u) = -f.$$

⑥ Antag $\Delta u = \lambda u$ och $\Delta v = \mu v$ p: D ,
 $\lambda \neq \mu$ och $\partial_\nu u + \alpha u = 0$ och

$\partial_\nu v + \alpha v = 0$ p: ∂D , där $\alpha: \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ är en given funktion.

Använd Green:

$$\int_D ((\Delta u)v - u(\Delta v)) dx = \int_{\partial D} ((\partial_\nu u)v - u(\partial_\nu v)) dS(y).$$

$$ID \bar{u} : \Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v = (\lambda - \mu) u \cdot v$$

5

$$P_0 \partial D \bar{u} : (\partial_\nu u) \cdot v - u \cdot \partial_\nu v = -\epsilon u v + u \epsilon v = 0.$$

V i för

$$(\lambda - \mu) \cdot \int_D u v \, dx = 0$$

$\lambda \neq \mu \Rightarrow \int_D u v \, dx = 0$, dvs u och v är ortogonala.

7) Bilda hjälpfunktionen

$$v(t, x) = u(t, x) - x^2 - 2t$$

$$\Rightarrow \partial_t v = \partial_t u - 2$$

$$\partial_x^2 v = \partial_x^2 u - 2$$

$$t=0 \Rightarrow v = u - x^2 < 0$$

$$|x|=1 \Rightarrow v = u - 1 - 2t < 0$$

Det följer att v uppfyller

$$\begin{cases} \partial_t v = \partial_x^2 v, & |x| < 1, t > 0 \\ v < 0, & t = 0 \\ v < 0, & |x| = 1 \end{cases}$$

Enligt maximumprincipen är $v(t, x) < 0$

för alla $t > 0, |x| < 1$, dvs

$$u(t, x) < x^2 + 2t, \quad \forall x, v.$$