

MATEMATIK

Göteborgs Universitet

Hemtentamen i Partiella differentialekvationer F3, TMA690

2021-04-09, kl. 8.30-12.30

Hjälpmedel: Alla.

Examinator: Andreas Rosén

Under skrivningstiden nås examinator via epost rosenan@chalmers.se och telefon 0317725365.

Totalt antal skrivningspoäng är 50. Till dessa läggs bonuspoäng. Betygsgränser: 20 poäng för betyget 3, 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget 5, inklusive bonus. En muntlig redogörelse av lösningar i efterhand kan komma att krävas för de högre betygen.

Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara välskrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.

Lösningsförslag och besked om rättning och granskning lämnas via kursens hemsida.

1. (a) För vilka av följande tre PDE gäller en maximumprincip:

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0, \quad \partial_x^2 u - \partial_y^2 u = 0 \quad \text{och} \quad \partial_x^2 u - \partial_y^2 u = 0? \quad (3p)$$

- (b) Vilka av följande tre PDE, ger tillsammans med villkoret $u(x, 0) = g(x)$ välställda PDE-problem (där $u(x, y)$ sökes för given $g \in L_2(\mathbf{R})$):

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0, \quad \partial_x^2 u - \partial_y^2 u = 0 \quad \text{och} \quad \partial_x^2 u - \partial_y^2 u = 0? \quad (3p)$$

- (c) Ge tre exempel som visar att följande tre inklusioner är strikta:

$$\mathcal{S}(\mathbf{R}) \subset L_2(\mathbf{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbf{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}). \quad (3p)$$

2. Beräkna lösningen $u(x, y)$ till PDE-problemet

$$2\frac{x}{y}\partial_x u - \partial_y u = x, \quad x > 0, y > 0, \quad \text{och} \quad u(1, y) = 0. \quad (7p)$$

3. Betrakta PDEproblemet

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u, & t > 0, \\ u = \delta_{(1,0)}, & t = 0, \\ \partial_t u = 0, & t = 0, \end{cases}$$

där $\delta_{(1,0)} \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^2)$ betecknar Dirac-deltat i $x = 1, y = 0$.

- (a) Beräkna lösningen $u(t, x, y)$ för $t > 0$. (4p)

- (b) Skissa området i t, x planet där $u(t, x, 0) \neq 0$. Förklara resultatet utifrån Huygens princip. (3p)

Var god vänd!

4. (a) Låt

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

(Det vill säga, f är 1 i första kvadranten.) Beräkna den svaga andraderivatan $\partial_x \partial_y f$.

(3p)

- (b) Låt

$$f_k(x) = \sin(kx) \cos(kx), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Avgör om f_k konvergerar svagt då $k \rightarrow \infty$ och bestäm i så fall gränsdistributionen.

(3p)

5. Betrakta en PDE

$$a\partial_x^2 u + b\partial_y^2 u + 2c\partial_x \partial_y u + f = 0,$$

där f är en given funktion. Antag att $a, b, c \in \mathbf{R}$ är givna konstanter sådana att PDEn är elliptisk.

- (a) Finn en variationsformulering (V, a, L) för Dirichletproblemet på ett område $D \subset \mathbf{R}^2$, för ovanstående PDE med homogena randvillkor, med $a(u, \phi) = \int_D \langle A \nabla u, \nabla \phi \rangle dx dy$ och lämplig symmetrisk positivt definit matris A .

(4p)

- (b) Visa att Dirichletproblemet har en svag lösning genom att verifiera villkoren i Lax–Milgrams sats.

(3p)

6. Låt λ_1 vara det minsta Dirichlet-egenvärdet för $-\Delta$ på enhetsskivan $x^2 + y^2 < 1$ i planet.

- (a) Besselfunktionen $v(r) = J_0(kr)$ löser ODEn $\partial_r^2 v + r^{-1} \partial_r v + k^2 v = 0$, och $J_0(0) = 1$ är ändlig. Använd detta för att finna λ_1 till 4 decimalers noggrannhet.

(3p)

- (b) Beräkna Rayleighkvoten $R(\phi)$ för $\phi(x, y) = 1 - r$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, och jämför med λ_1 .

(4p)

7. Låt $G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ vara en Greenfunktion för ett område $D \subset \mathbf{R}^2$, med pol i $\mathbf{x} \in D$. Bevisa att $G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) < 0$ för alla $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ i det inre av D .

Ledning: Undersök först $\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} G$

(7p)

- (1) (a) En max. princip gäller för Laplace och Poisson ekv. $\Delta^2 u = 0$ och $\Delta^2 u = f$, men inte för

vågekv. $\Delta^2 u - \partial_y^2 u = 0$. ($y=t$)

- (b) Dirichlet problem $u(x,0) = g(x)$ för $\Delta^2 u = 0$ är välställt, och
Sturm-Liouville problemet $u(x,0) = g(x)$ för $\Delta^2 u - \partial_y^2 u = 0$ är välställt.

Däremot är inte

$$\Delta^2 u - \partial_y^2 u = 0, \quad y > 0,$$

$$u = g, \quad y = 0$$

välställt, ty $\partial_y u|_{y=0}$ behöver specificeras för att lösningen ska vara unik.

- (c) $f(x) = e^{-|x|} \Rightarrow f \in L_2(\mathbb{R}) \setminus S(\mathbb{R})$

$$\delta_0 \in S'(\mathbb{R}) \setminus L_2(\mathbb{R})$$

$$g(x) = e^x \Rightarrow g \in D'(\mathbb{R}) \setminus S'(\mathbb{R})$$

- (2) Karakteristisk ekv. $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2\frac{x}{y}} = -\frac{y}{2x}$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{2x}$$

$$\ln y = -\frac{1}{2} \ln x + C \Leftrightarrow y = \frac{e^C}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow xy^2 = e^{2C}$$

Gör t ex var. bytet

$$\begin{cases} s = y \\ t = xy^2 \end{cases}$$

Kedjeregeln:

$$\partial_x u = 0 \cdot \partial_s u + y^2 \partial_t u$$

$$\partial_y u = 1 \cdot \partial_s u + 2xy \partial_t u$$

$$PDE_n \Rightarrow 2xy(y^2 \partial_t u) - (\partial_s u + 2xy \partial_t u) = x$$

2

$$\partial_s u = -x = -t/s^2$$

$$u = \frac{t}{s} + C(t) = xy + C(xy^2)$$

$$\text{Villkoret } u(1, y) = 0 \Rightarrow$$

$$0 = y + C(y^2), \quad \forall y > 0$$

$$\Leftrightarrow C(s) = -\sqrt{s}, \quad \forall s > 0.$$

$$\text{Lösning: } u(x, y) = xy + (-\sqrt{xy^2}) = \underline{y(x - \sqrt{x})}$$

(3)(a) Lösningssformeln för 2D vågekvationen är:

$$u(t, \vec{x}) = \frac{1}{2\pi c} \partial_t \iint_{|\vec{y}-\vec{x}| \leq ct} \frac{g(\vec{y}) d\vec{y}}{\sqrt{c^2 t^2 - |\vec{y}-\vec{x}|^2}} + \frac{1}{2\pi c} \iint_{|\vec{y}-\vec{x}| \leq ct} \frac{h(\vec{y}) d\vec{y}}{\sqrt{c^2 t^2 - |\vec{y}-\vec{x}|^2}}$$

För oss är $c=1$ och startdata är

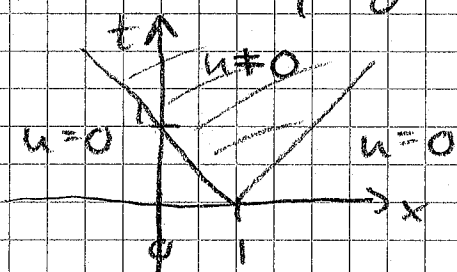
$$g = \delta_{(1,0)}, \quad h = 0.$$

$$\Rightarrow u(t, \vec{x}) = \frac{1}{2\pi} \partial_t \frac{1}{\sqrt{t^2 - (1-x)^2 - (0-y)^2}}$$

$$\underset{(x,y)}{=} = \frac{1}{2\pi} \frac{t}{(t^2 - (1-x)^2 - y^2)^{3/2}}$$

då $(1-x)^2 + y^2 < t^2$, och $u=0$ annars

$$(b) \quad u(t, x, 0) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \frac{t}{(t^2 - (1-x)^2)^{3/2}}, & 1-t < x < 1+t \\ 0, & \text{för övrigt} \end{cases}$$



Huygens princip gäller

ej i 2 rumsvariabler.

Detta illustreras i detta

exempel genom att $u \neq 0$ bara vid vågfronterna $x = 1+t$ och $x = 1-t$.

④ (a) φ -medelvärdet av $\partial_x \partial_y f$ är 3

$$\begin{aligned}\langle \partial_x \partial_y f, \varphi \rangle &= (-1)^2 \langle f, \partial_x \partial_y \varphi \rangle \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty 1 \cdot \partial_x \partial_y \varphi(x, y) \, dx \, dy \\ &= \int_0^\infty [\partial_y \varphi(x, y)]_{x=0}^\infty \, dy \\ &= \int_0^\infty (-\partial_y \varphi(0, y)) \, dy = [-\varphi(0, y)]_{y=0}^\infty = \varphi(0, 0) \\ &= \langle \delta_0, \varphi \rangle\end{aligned}$$

Svar: $\partial_x \partial_y f = \delta_0$

b) $\sin(kx) \cos(kx) = \frac{1}{2} \sin(2kx)$

$$\langle \frac{1}{2} \sin(2kx), \varphi \rangle = \int \frac{1}{2} \sin(2kx) \varphi(x) \, dx$$

= / partiell integration /

$$= + \int \frac{1}{4k} \cos(2kx) \cdot \varphi'(x) \, dx$$

$$\varphi' \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Rightarrow \varphi'(x) = 0 \text{ för } |x| > A \text{ och}$$

$$|\varphi'(x)| \leq B \text{ för } |x| \leq A, \text{ för några } A, B < \infty.$$

$$\Rightarrow |\langle \frac{1}{2} \sin(2kx), \varphi \rangle| \leq \frac{1}{4k} \cdot 1 \cdot B \cdot 2A$$

$$\rightarrow 0 \text{ då } k \rightarrow \infty.$$

Svar: $\sin(kx) \cdot \cos(kx) \rightarrow 0$ svagt.

⑤ (a) För Dirichlet problemet använder vi $V = H_0^1(D)$.

Tag $\varphi \in H_0^1(D)$, multiplicera och part. integrera:

$$\int_D (a \partial_x^2 u + b \partial_y^2 u + 2c \partial_x \partial_y u + f) \varphi \, dx \, dy \quad (\text{Green})$$

$$= - \int_D (a \partial_x u \partial_x \varphi + b \partial_y u \partial_y \varphi + c \partial_x u \partial_y \varphi + c \partial_y u \partial_x \varphi) \, dx \, dy + \int_D f \varphi \, dx \, dy$$

$$= - \int_D \langle A \nabla u, \nabla \varphi \rangle \, dx \, dy + \int_D f \varphi \, dx \, dy$$

om $A = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$.

Med $a(u, \varphi) = \int_D \langle A \nabla u, \nabla \varphi \rangle \, dx \, dy$ och

$L(\varphi) = \int_D f \varphi \, dx \, dy$ för vi har formeln

$a(u, \varphi) = L(\varphi), \forall \varphi \in H_0^1(D).$

(b) $H_0^1(D)$ är Hilbert rum enligt kurskompendiet.

• a och L är begränsade feljer av
Cenchy-Schwarz olikhet.

• Vi vet att PDEn är elliptisk, så
 $c^2 < ab$, eller ekvivalent att A 's egenvärden
 λ_1, λ_2 är $\neq 0$ och har samma tecken.

Det följer att $|\langle A\bar{x}, \bar{x} \rangle| \geq c|\bar{x}|^2$
för alla $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ och ett $c > 0$.

($c = \min(|\lambda_1|, |\lambda_2|)$ mer precist.)

Med $\bar{x} = \nabla u$ följer

$$|a(u, u)| \geq \int_D c \cdot |\nabla u|^2 dx dy$$

$$\geq c \cdot c_2 \|u\|_{H^1(D)}^2$$

där sista $\geq$ och c_2 kommer från
Poincaré's olikhet.

$\therefore a$ är invers på $V = H_0^1(D)$.

(6) (a) Förste egenfunktionen u_1 är radiell med
 $u_1 = 0$ på $x^2 + y^2 = 1$.

I polära koordinater blir $-\Delta u_1 = \lambda_1 u_1 \Leftrightarrow$
 $-(\partial_r^2 u_1 + \frac{1}{r} \partial_r u_1) = \lambda_1 u_1$

Så $u_1(r) = J_0(kr)$ och $k^2 = \lambda_1$.

Vi vet $u_1(1) = 0$ och $u_1(r) \neq 0$ för $r < 1$,
så k är förste nollstället för J_0 .

Enligt tabell:

$$\lambda_1 \approx (2,4048557)^2 \approx 5,7832$$

$$(b) R(\psi) = \frac{\int_D |\nabla \psi|^2 dx dy}{\int_D |\psi|^2 dx dy} = |\nabla \psi|^2 = \left(-\frac{x}{r}, -\frac{y}{r}\right) \Rightarrow |\nabla \psi| = 1/$$

$$= \left(2\pi \int_0^1 1^2 r dr\right) / \left(2\pi \int_0^1 \frac{(1-r)^2}{r-2r^2+r^3} r dr\right)$$

$$= \frac{1/2}{\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}} = \frac{1/2}{1/12} = 6$$

5

Detta stämmer med teorin, då

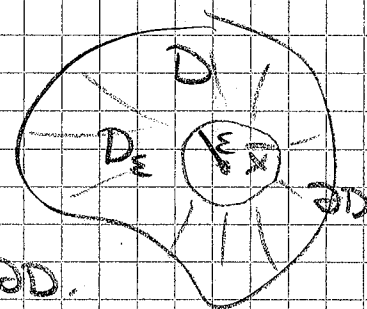
$$6 > 5,7832 \text{ och } \lambda_1 = \min_{\substack{\psi \in H_0^1(D) \\ \psi \neq 0}} R(\psi).$$

7 Enligt definition:

$$G(\bar{y}, \bar{x}) = \frac{1}{2\pi} \ln |\bar{y} - \bar{x}| + g_{\bar{x}}(\bar{y}),$$

$$\Delta g_{\bar{x}} = 0 \text{ i } D$$

$$g_{\bar{x}}(\bar{y}) = -\frac{1}{2\pi} \ln |\bar{y} - \bar{x}| \text{ då } \bar{y} \in \partial D.$$



Då $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$ har vi att

$$\ln |\bar{y} - \bar{x}| \rightarrow -\infty \text{ medan } g_{\bar{x}}(\bar{y}) \rightarrow g_{\bar{x}}(\bar{x}) \text{ är kontinuerlig}$$

$$\therefore \lim_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}} G(\bar{y}, \bar{x}) = -\infty$$

Betrakta nu $v(\bar{y}) = -G(\bar{y}, \bar{x})$ för $\bar{y} \in D_\epsilon$

$$\text{där } D_\epsilon = \{\bar{y} \in D; |\bar{y} - \bar{x}| > \epsilon\}.$$

v är harmonisk i D_ϵ

$$v \geq 0 \text{ på } \partial D_\epsilon, \text{ ty } v = 0 \text{ på } \partial D \text{ och}$$

$$v \geq \tau \text{ för } |\bar{y} - \bar{x}| = \epsilon \text{ om } \epsilon \text{ väljs litet.}$$

$$(\text{eftersom } \lim_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}} v = +\infty)$$

Maximumprincipen för v på D_ϵ visar att

$$v > 0 \text{ i } D_\epsilon$$

$$\Leftrightarrow G < 0 \text{ i } D_\epsilon$$

Då ϵ kan väljas godtyckligt litet, följer

$$G(\bar{y}, \bar{x}) < 0 \text{ för } \bar{y} \neq \bar{x}.$$