

MATEMATIK

Göteborgs Universitet

Hemtentamen i Partiella differentialekvationer F3, TMA690

2021-01-14, kl. 8.30-12.30

Hjälpmedel: Alla.

Examinator: Andreas Rosén

Under skrivningstiden nås examinator via epost rosenan@chalmers.se och telefon 0317725365.

Totalt antal skrivningspoäng är 50. Till dessa läggs bonuspoäng. Betygsgränser: 20 poäng för betyget 3, 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget 5, inklusive bonus. En muntlig redogörelse av lösningar i efterhand kan komma att krävas för de högre betygen.

Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara välskrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.

Lösningsförslag och besked om rättning och granskning lämnas via kursens hemsida.

1. Svara och motivera.

(a) Vilka av följande tre är tempererade distributioner på $\mathbf{R}$: $\langle F, \phi \rangle = \int \phi(x)^2 dx$, $f(x) = e^x$ och δ'_0 ? (3p)

(b) Vilka av följande tre 2:a ordningens linjära PDE i tre variabler är paraboliska: $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u = 0$, $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z u = 0$ och $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u = 0$? (3p)

(c) Vilka av de tre funktionsrummen $L_2(D)$, $H^1(D)$ och $H_0^1(D)$ tillhör funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

om $D = (-2, 2)$? (3p)

2. Beräkna lösningen $u(x, y)$ till PDE-problemet

$$2y \partial_x u + x \partial_y u = x, \quad y > |x|, \quad \text{och} \quad u(0, y) = y^2. \quad (7p)$$

3. Betrakta en homogen platta beskriven av $D \subset \mathbf{R}^2$, i vilken värmeffödet styrs av Fouriers lag med konstant $k > 0$. Vi föreskriver inga villkor på ∂D , men i varje punkt i D sker ett inflöde av värme proportionellt mot $u_0 - u$, med proportionalitetskonstant $a > 0$, genom kontakt med området ovanför/under D som antas ha konstant temperatur u_0 .

(a) Härled en PDE som beskriver värmeutbredningen $u(t, x, y)$ i D för $0 < t < T$. (1p)

(b) Formulera och bevisa att maximumprincipen gäller om $u > u_0$ i D för $0 < t < T$. (3p)

(c) Visa att maximumprincipen inte alltid gäller om vi inte antar att $u > u_0$. (3p)

Var god vänd!

4. (a) Låt

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x < 0, \\ ax + b, & 0 < x < 1, \\ x^2, & x > 1. \end{cases}$$

Bestäm a och b så att den svaga derivatan f' är en funktion, och beräkna i detta fall den svaga andraderivatan f'' , samt skissa f , f' och f'' .

(3p)

(b) Låt

$$f_k(x) = \begin{cases} k, & 5/k < x < 10/k, \\ 0, & \text{för övrigt,} \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

så att $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = 0$ för varje $x \in \mathbf{R}$. Avgör om f_k konvergerar svagt då $k \rightarrow \infty$ och bestäm i så fall gränsdistributionen. Avgör om $(f_k)^2$ konvergerar svagt då $k \rightarrow \infty$ och bestäm i så fall gränsdistributionen.

(3p)

5. Poissons formel

$$u(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{1 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(\cos \phi, \sin \phi) d\phi}{1 + r^2 - 2r \cos(\phi - \theta)}, \quad r < 1,$$

ger lösningen u till Dirichletproblemet på enhetsskivan $x^2 + y^2 < 1$. Antag nu att u är harmonisk och positiv för $x^2 + y^2 < 1$, med $u(0, 0) = 1$. Visa att

$$\frac{1 - r}{1 + r} \leq u(r \cos \theta, r \sin \theta) \leq \frac{1 + r}{1 - r}, \quad \text{för alla } r < 1.$$

(6p)

6. Betrakta ODE-problemet

$$\begin{cases} u''(x) = -1, & 0 < x < 1, \\ u''(x) = -4, & 1 < x < 2, \\ u(0) = u(2) = 0, \\ u(1-) = u(1+), \\ 3u'(1-) = u'(1+), \end{cases}$$

där $1-$ betyder vänstergränsvärde och $1+$ betyder högergränsvärde. Finn en variationsformulering (V, a, L) med $a(u, \phi) = \alpha \int_0^1 u' \phi' dx + \beta \int_1^2 u' \phi' dx$, för lämpliga konstanter α, β . Visa att variationsproblemet är ekvivalent med ODE-problemet. Visa att variationsproblemet har en unik lösning genom att verifiera villkoren i Lax–Milgrams sats.

(8p)

7. Betrakta PDE-problemet

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + a \partial_t u = \Delta u, & x \in D, t > 0, \\ u = 0, & x \in \partial D, \\ u = 0, & t = 0, \\ \partial_t u = e_1(x), & t = 0, \end{cases}$$

där $e_1(x)$ betecknar första Dirichlet-egenfunktionen för området $D \subset \mathbf{R}^2$, och $a > 0$ är en given konstant. Avgör för vilka D som $u(t, x)$ antar både positiva och negativa värden för $t > 0$. Villkoret ska formuleras i termer av det första Dirichlet-egenvärdet λ_1 för D .

(7p)

- ① (a) $\langle F, \varphi \rangle = \int \varphi^2 dx$ är ej linjär.
 $\int e^x \varphi(x) dx$ är ej konvergent / definierad för alla $\varphi \in S(\mathbb{R})$.
 $\langle \delta'_0, \varphi \rangle = -\varphi'(0)$ är linjär och def. för alla $\varphi \in S(\mathbb{R})$.

Svar: Endast δ'_0 tillhör $S'(\mathbb{R})$.

- (b) Principaldelen ska vara semidefinit, med (matrisen för) exakt ett eget värde = 0.

Svar: Endast $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u = 0$ är parabolisk.

- (c) $\int_{-2}^2 |f(x)|^2 dx = 2 < \infty$, så $f \in L_2(-2, 2)$
 $f' = \delta_{-1} - \delta_1$ är ej en funktion, så $f \notin H^1(-2, 2)$,
och speciellt $f \notin H_0^1(-2, 2)$.

Svar: f tillhör endast $L_2(D)$.

- ② Karakteristisk ekv: $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y}$
Separabel: $\int 2y dy = \int x dx$
 $y^2 = \frac{x^2}{2} + C$

Lös ut $C \leadsto$ var. byte

$$\begin{cases} s = x \\ t = y^2 - x^2/2 \end{cases}$$

$$\text{Kedjeregeln: } \begin{cases} \partial_x u = 1 \cdot \partial_s u - x \cdot \partial_t u \\ \partial_y u = 0 \cdot \partial_s u + 2y \cdot \partial_t u \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2y(\partial_s u - x \partial_t u) + x(2y \partial_t u) = x$$

$$\partial_s u = \frac{x}{2y} = \frac{s}{\sqrt{t + s^2/2}}$$

$$u = \sqrt{t + s^2/2} + C(t) = y + C(y^2 - x^2/2)$$

↑
sedtlycklig invariabel fun.

$$u(0,y) = y^2 \Rightarrow$$

$$y^2 = y + C(y^2), \quad \forall y > 0$$

$$\Leftrightarrow C(\xi) = \xi - \sqrt{\xi}, \quad \forall \xi > 0$$

$$\text{Svar: } u(x,y) = y + y^2 - x^2/2 - \sqrt{y^2 - x^2/2}$$

③ (a) Värmeledning i ett område $\Omega \subset \mathbb{D}$ är:

$$\partial_t \iint_{\Omega} u \, dx \, dy = \int_{\partial \Omega} \underbrace{(-k \nabla u, -\nu)}_{\text{Fouriers lag}} \, dS + \iint_{\Omega} \underbrace{a(u_0 - u)}_{\substack{\Omega \text{ införde} \\ \text{end. uppgift} \\ a > 0 \text{ konstant}}} \, dx \, dy$$

Div. satsen $\Rightarrow$

$$\iint_{\Omega} \partial_t u \, dx \, dy = \iint_{\Omega} (\operatorname{div}(k \nabla u) + a(u_0 - u)) \, dx \, dy$$

Ω godtycklig $\Rightarrow$

$$\partial_t u = k \Delta u + a(u_0 - u) \quad (*) \quad t = T$$

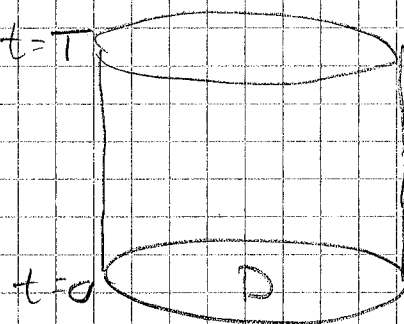
(b) Vi visar att om u löser

(*) för $x \in \mathbb{D}$, $0 < t < T$,

och $u > u_0$, så måste u 's

max. entas för $t=0$ eller

$x \in \partial \mathbb{D}$.



Beweis: Antag så ej är fallet. Två fall:

• Max. entas i lämplig punkt $x \in \mathbb{D}$, $0 < t < T$.

Där gäller då $\partial_t u = 0$, $\partial_{x_i}^2 u \leq 0$, så

$\Delta u \leq 0$ och end. entegande $a(u_0 - u) < 0$.

Detta motsäger (*).

• Max. entas för $x \in \mathbb{D}$, $t = T$.

Analogt gäller där då

$\partial_t u \geq 0$, $\Delta u \leq 0$ och $a(u_0 - u) < 0$,

vilket motsäger (*).

$\therefore$ Max. måste entas för $t=0$ eller $x \in \partial \mathbb{D}$.

(K) Betrakte PDE-problemet

(3)

$$\begin{cases} \partial_t u = k \Delta u + a(1-u) & , x \in D, t > 0 \\ u = 0 & , t = 0 \\ u = 0 & , x \in \partial D \end{cases}$$

med $u_0 = 1$.

Sätt $u = 1 - e^{-at} v$, så

$$\begin{aligned} \partial_t u &= e^{-at} (a v - \partial_t v) = \\ &= -k e^{-at} \Delta v + a(e^{-at} v) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \partial_t v = \Delta v$$

Så PDE-problemet är ekvivalent med

$$\begin{cases} \partial_t v = \Delta v & , x \in D, t > 0 \\ v = 1 & , t = 0 \\ v = e^{at} & , t > 0 \end{cases}$$

Enligt sterke max. principen:

$$v(t, x) < e^{at} \quad \text{då } t > 0, x \in \text{inre av } D.$$

$\Rightarrow u > 0$, så max. principen gäller ej för u .

$$\begin{aligned} (4) \quad (a) \quad \langle f', \varphi \rangle &= -\langle f, \varphi' \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx = / \text{part. int.} / \\ &= \int_{-\infty}^0 0 \cdot \varphi dx - [2 \cdot \varphi]_{-\infty}^0 + \int_0^{\infty} a \cdot \varphi dx - [(ax+b)\varphi]_0^{\infty} \end{aligned}$$

$$+ \int_1^{\infty} 2x \varphi dx - [x^2 \varphi]_1^{\infty}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g \varphi dx - 2\varphi(0) - (a+b)\varphi(1) + b\varphi(0) + \varphi(1)$$

Inga Dirac-delta termer uppkommer om

$$\begin{cases} b = 2 \\ a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -1.$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ -1 & , 0 \leq x < 1 \\ 2x & , x > 1 \end{cases}$$

Med $f(x) = 2 - x$ för $0 \leq x < 1$, så

$$\langle f'', \varphi \rangle = -\langle f', \varphi' \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} g \varphi' dx$$

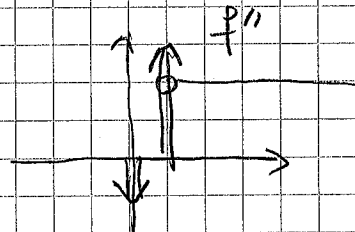
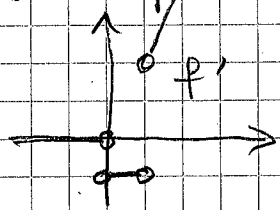
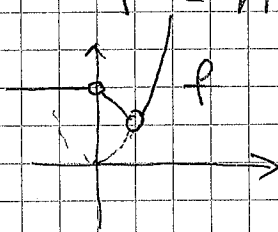
$$= 0 - [(1-1)\varphi]_0^1 + \int_1^{\infty} 2 \cdot \varphi' dx - [2x\varphi(x)]_1^{\infty}$$

$$= \int_1^{\infty} 2\varphi dx + \varphi(1) - \varphi(0) + 2\varphi(1)$$

Svar: $a = -1$, $b = 2$ ger $f' =$ funktion och

(4)

$$f'' = h - \delta_0 + 3\delta_1$$



$h(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$ är den punktvisa enderivatan

$$(b) \langle f_h, \varphi \rangle = \int_{5/h}^{10/h} k \varphi(x) dx = \int_t^{10} \varphi(t) dt = kx/$$

$$= \int_5^{10} \varphi\left(\frac{t}{k}\right) dt \rightarrow \varphi(0) \cdot \int_5^{10} 1 \cdot dt = 5 \varphi(0) \\ \rightarrow \varphi(0) \text{ likformigt p: } (5, 10) = \langle 5\delta_0, \varphi \rangle$$

$\therefore f_h \rightarrow 5\delta_0$ svejt.

$$\langle f_h^2, \varphi \rangle = \int_{5/h}^{10/h} k^2 \varphi(x) dx = k \cdot \int_5^{10} \varphi\left(\frac{t}{k}\right) dt \\ \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \rightarrow 5 \varphi(0)$$

Om $\varphi(0) \neq 0$ så $\langle f_h^2, \varphi \rangle \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$.

Svar: $f_h \rightarrow 5\delta_0$ svejt

f_h^2 konvergerar ej svejt.

(5)

Eftersom $-1 \leq \cos(\varphi - \theta) \leq 1$, följer att

$$\frac{1}{1+r^2+2r} \leq \frac{1}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta)} \leq \frac{1}{1+r^2-2r} = \frac{1}{(1-r)^2}$$

och om $u > 0$ så visar Poissons formel att

$$\frac{1-r^2}{2\pi(1+r)^2} \int_0^{2\pi} u d\theta \leq u \leq \frac{1-r^2}{2\pi(1-r)^2} \int_0^{2\pi} u d\theta$$

Medelvärdesseten visar att $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u d\theta = u(0,0) = 1$, så

$$\frac{1-r}{1+r} \leq u \leq \frac{1+r}{1-r} \text{ enligt konjugatregeln.}$$

⑥ Antag u lösar ODE-problemet. ⑤

Partiellintegration med $\varphi \in H_0^1(0,2) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \alpha \int_0^1 u' \varphi' dx + \beta \int_1^2 u' \varphi' dx &= \alpha ([u' \varphi]_0^1 - \int_0^1 u'' \varphi dx) \\ &+ \beta ([u' \varphi]_1^2 - \int_1^2 u'' \varphi dx) \\ &= \alpha (u'(1-) \varphi(1-) + \int_0^1 \varphi dx) + \beta (-u'(1+) \varphi(1+) + 4 \int_1^2 \varphi dx) \\ &= / \forall \varphi \int \alpha = 3, \beta = 1 \text{ så att} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha u'(1-) \varphi(1-) - \beta u'(1+) \varphi(1+) &= 0 / \\ &= \underbrace{3 \int_0^1 \varphi dx + 4 \int_1^2 \varphi dx} \end{aligned}$$

kallas detta $L(\varphi)$, och låt $V = H_0^1(0,2)$.

Omvänt, antag $a(u, \varphi) = L(\varphi)$, $\forall \varphi \in V$. Då:

$$\begin{aligned} L(\varphi) &= 3 \int_0^1 u' \varphi' dx + \int_1^2 u' \varphi' = / \text{partiell int.} / \\ (*) &= (3u'(1-) - u'(1+)) \varphi(1) - 3 \int_0^1 u'' \varphi dx - \int_1^2 u'' \varphi dx. \end{aligned}$$

Om $\varphi \neq 0$ bara för $0 < x < 1$, följer

$$\int_0^1 (3 + 3u'') \varphi dx = 0.$$

För $a \in (0,1)$ väljer vi $\varphi_h \xrightarrow{\text{svagt}} \delta_a$, vilket visar

$$3 + 3u''(a) = 0, \forall a.$$

$$\therefore u'' = -1 \text{ för } 0 < x < 1.$$

$$\text{P.s.s. } 4 + u'' = 0 \text{ för } 1 < x < 2.$$

Slutligen visar nu (*) att

$$(3u'(1-) - u'(1+)) \varphi(1) = 0, \forall \varphi \in H_0^1(0,2).$$

$$\text{Tag } \varphi \text{ med } \varphi(1) = 1 \Rightarrow 3u'(1-) = u'(1+).$$

Eftersom $u \in V \Rightarrow u(0) = u(2) = 0$, följer att u lösar ODE-problemet.

Lax-Milgram:

- $V = H_0^1(0,2)$ är ett Hilbert rum vet vi.
- $a(u, \varphi) = 3 \int_0^1 u' \varphi' dx + \int_1^2 u' \varphi' dx$
koersivitet: $a(u, u) \geq \int_0^2 (u')^2 dx \geq \|u\|_{H^1(0,2)}^2$

där sistnämnda följer av Poincaré's olikhet. (6)

a är begränsad:

$$|a(u, \varphi)| \leq 3 \int_0^2 |u'| \cdot |\varphi'| dx \leq \text{Cauchy-Schwarz} / \\ \leq 3 \left(\int_0^2 (u')^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^2 (\varphi')^2 dx \right)^{1/2} \leq 3 \|u\|_{H^1} \cdot \|\varphi\|_{H^1}$$

$L(\varphi) = 3 \int_0^1 \varphi dx + 4 \int_1^2 \varphi dx$ är begränsad:

$$|L(\varphi)| \leq 4 \int_0^2 |\varphi| dx \leq \text{Cauchy-Schwarz} / \\ \leq 4 \left(\int_0^2 1^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^2 \varphi^2 dx \right)^{1/2} \leq 4\sqrt{2} \|\varphi\|_{H^1}.$$

Lex-Milgrém's sats visar därför att variationsproblemet har en enda lösning.

(7) En välgrundad gissning är att lösningen är på formen:

$$u(t, x) = f(t) \cdot e_1(x)$$

PDEn $\Rightarrow$

$$f''(t) + a f'(t) = -\lambda_1 f(t) \quad (*)$$

Vi betraktar karakteristisk ekv. för denna ODE:

$$r^2 + ar + \lambda_1 = 0$$

$$\left(r + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - \lambda_1,$$

och får tre fall:

Fallet $\lambda_1 < \frac{a^2}{4}$ Allmänna lösningen av (*) är då

$$f(t) = A \exp\left(\left(-\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - \lambda_1}\right)t\right) + B \exp\left(\left(-\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - \lambda_1}\right)t\right)$$

Startvillkoret $u=0$ ger $A+B=0$, så

$$u(t, x) = 2A e^{-\frac{a}{2}t} \sinh\left(\sqrt{\frac{a^2}{4} - \lambda_1} t\right) e_1(x)$$

Denna lösning kan aldrig vara teckenväxlande.

Fallet $\lambda_1 = \frac{a^2}{4}$ Allmän. lösning:

$$f(t) = (At + B) e^{-\frac{a}{2}t}$$

och $u(0, x) = 0 \Rightarrow B = 0$. Lösningen är ej teckenväxlande.

Fallet $\lambda_1 > \frac{q^2}{4}$. Allmänna lösningen blir nu $f(t) = e^{-\frac{q}{2}t} (A \cos(\sqrt{\lambda_1 - \frac{q^2}{4}}t) + B \sin(\sqrt{\lambda_1 - \frac{q^2}{4}}t))$ (7)

och $u(0, x) = 0 \Rightarrow A = 0$

Lösning $u(t, x) = B e^{-\frac{q}{2}t} \sin(\sqrt{\lambda_1 - \frac{q^2}{4}}t) e_1(x)$

är alltid teckenväxlende, när t varierar.

Kom ihåg: $e_1(x)$ själv växlar ej tecken.

Svar: Det sökta villkoret är

$$\lambda_1 > \frac{q^2}{4} \quad (\text{låg dämpningsfaktor})$$