

MATEMATIK

Göteborgs Universitet

Hemtentamen i Partiella differentialekvationer F3, TMA690

2020-08-17, kl. 14.00-18.00

Hjälpmedel: Alla.

Examinator: Andreas Rosén

Under skrivningstiden nås examinator via epost rosenan@chalmers.se.

Totalt antal skrivningspoäng är 50. Till dessa läggs bonuspoäng. Betygsgränser: 20 poäng för betyget 3, 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget 5, inklusive bonus. En muntlig redogörelse av lösningar i efterhand kan komma att krävas för de högre betygen.

Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara väl skrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.

Lösningsförslag och besked om rättning och granskning lämnas via kursens hemsida.

1. Svara och motivera.

(a) Vilka av följande tre är distributioner på $\mathbf{R}$: e^{x^2} , $1/x^2$ och $1/\sqrt{|x|}$? (3p)

(b) Klassificera följande tre 2:a ordningens linjära PDE: $\partial_x^2 u + \partial_x \partial_y u = 0$, $\partial_x^2 u + \partial_y u = 0$ och $\partial_x^2 u + \partial_x \partial_y u + \partial_y^2 u = 0$. (3p)

(c) Vilka av följande tre PDE:er är linjära: $(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u)x = 1$, $(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u)/u = 1$ och $(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u)u = 1$? (3p)

2. Beräkna lösningen $u(x, y)$ till PDE-problemet

$$x \partial_x u - y \partial_y u + u = y, \quad u(x, x) = x^2,$$

för $x, y > 0$. (7p)

3. Låt $f \in H_0^1(D)$, där $D = [0, \pi] \times [0, \pi]$, och betrakta följande PDE problem

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u - u, & t > 0, (x, y) \in D, \\ u = 0, & t > 0, (x, y) \in \partial D, \\ u = f, & t = 0, (x, y) \in D. \end{cases}$$

för $u(x, y, t)$.

(a) Visa att problemet har högst en lösning u , för varje givet f . Entydighets-satser för PDE som används måste bevisas. (4p)

(b) Beräkna u då $f = \sin x \sin y \cos y$. (3p)

Var god vänd!

4. (a) Beräkna den svaga derivatan f' av funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \leq 1, \\ 2x^3, & x > 1. \end{cases}$$

Skissa f och f' . (3p)

- (b) Avgör om $f'(1)$ existerar för f i punkten $x = 1$, och bestäm i så fall detta värde. (1p)

- (c) Avgör om följderna $f_n(x) = \frac{n}{1+n^2x^2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, konvergerar svagt på $\mathbf{R}$ då $n \rightarrow \infty$, och bestäm i så fall gränsdistributionen. (3p)

5. Låt $u(x, y)$ vara en strikt subharmonisk funktion på enhetsskivan, det vill säga antag att $\Delta u > 0$ för $x^2 + y^2 < 1$.

- (a) Avgör om det är möjligt att u antar ett minimum i en punkt (x, y) med $x^2 + y^2 < 1$. (3p)

- (b) Avgör om det är möjligt att u antar ett maximum i en punkt (x, y) med $x^2 + y^2 < 1$. (3p)

Motexempel eller fullständigt bevis efterfrågas.

6. Låt $D \subset \mathbf{R}^2$ vara ett begränsat område med slät rand. Betrakta variationsproblemet där $u \in V$ sökes som löser

$$a(u, \phi) = L(\phi), \quad \text{för alla } \phi \in V,$$

med $V = H^1(D)$ och

$$a(u, \phi) = \iint_D (\nabla u, \nabla \phi) dx + \iint_D u \phi dx, \\ L(\phi) = \int_{\partial D} f \phi dS,$$

där f är en given kontinuerlig funktion på ∂D .

Finn det randvärdesproblem som är ekvivalent med variationsproblemet. Ekvivalensen ska visas under antagandet att u är C^2 . (7p)

7. Bestäm lösningen $u(x, y, z, t)$ till begynnelsevärdesproblemet

$$\partial_t^2 u = \Delta u + \frac{h(x, y, z)}{1+t}, \quad x, y, z \in \mathbf{R}, t > 0,$$

med startdata $u(x, y, z, 0) = \partial_t u(x, y, z, 0) = 0$, om h är en given harmonisk funktion. (7p)

① (a) Frågan är om $\int_{-R}^R |f(x)| dx < \infty$ för varje $R < \infty$.

e^{x^2} och $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ ses vara distributioner, men ej så för $\frac{1}{x^2}$ ty $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \infty$.

(b) Principaldelen $A\partial_x^2 u + B\partial_x \partial_y u + C\partial_y^2 u$ avgör karaktären.

1. $As^2 + Bst$ är indefinit $\rightarrow$ hyperbolisk PDE

2. As^2 är semidefinit $\rightarrow$ parabolisk PDE

3. $As^2 + Bst + Ct^2$ är definit $\rightarrow$ elliptisk PDE

(c) De 2 första kan skrivas

$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u - \frac{1}{x} = 0$, $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u - u = 0$ ^{och} således linjära. Den sista är ej linjär.

② Karakteristisk ekv: $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$

Separabel ODE: $\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dx}{x}$
 $\ln y = - \ln x + C$
 $y = \frac{e^C}{x}$

$\leadsto$ Variabelbyte $\begin{cases} s = xy \\ t = y \end{cases}$ ($= e^C$)

Kedjeregeln: $\begin{cases} u'_x = y u'_s \\ u'_y = x u'_s + u'_t \end{cases}$

PDEn $\rightarrow x(\cancel{y} u'_s) - y(\cancel{x} u'_s + u'_t) + u = y$

$u'_t - \frac{1}{t} u = -1$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{t} u\right)'_t = \frac{1}{t} \Rightarrow u = t((s) - \ln t)$

$u(x, y) = y((xy) - \ln y)$

$x^2 = u(x, x) = x((x^2) - \ln x)$

$\Rightarrow C(x^2) = x + \ln x$

$C(x) = \sqrt{x} + \ln \sqrt{x}$, $x > 0$

Svar: $u(x,y) = y(\sqrt{xy} + \ln\sqrt{\frac{x}{y}})$

(2)

(3) (a) Antag att u_1 och u_2 både löser PDEproblemet.
Sätt $v = u_1 - u_2$. Då problemet är linjärt löser v

$$\begin{cases} \partial_t v = \Delta v - v \\ v = 0 \\ v = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x \in \partial D \\ t = 0 \end{matrix}$$

Sätt $E(t) = \iint_D v^2 dx dy$.

$$E'(t) = \iint_D 2v \partial_t v = \iint_D (2v \Delta v - 2v^2) dx dy$$

$$= \text{Green 1} = \int_{\partial D} 2v \frac{\partial v}{\partial n} - \underbrace{\iint_D 2|\nabla v|^2 + 2v^2}_{\geq 0} \leq 0$$

Men $E(t) \geq 0$ och $E(0) = 0$, så $E(t) = 0$, $\forall t > 0$.

$\Rightarrow v = 0$ och $u_1 = u_2$ för $\forall t > 0$.

(b) $f = \sin x \frac{1}{2} \sinh 2y$ är en Dirichlet egenfunktion:

$$\Delta f = (-1 - 2^2)f = -5f$$

$$f = 0 \text{ på } \partial D.$$

Sök lösning på formen $u(x,y,t) = g(t) \cdot f(x,y)$

$$\text{PDEn} \Rightarrow g' \cdot f = g \cdot (-5f) - gf \Leftrightarrow g' = -6g$$

$$\Rightarrow g(t) = C e^{-6t}$$

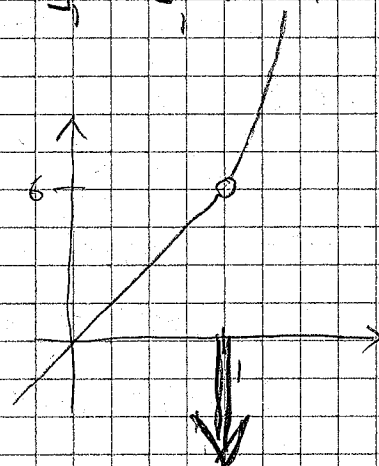
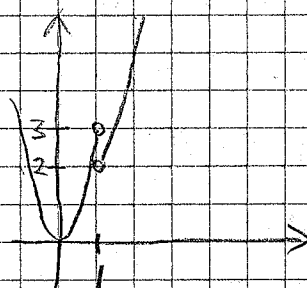
$$\text{Startvillkoret} \Rightarrow C = g(0) = \frac{1}{2}$$

Svar: $u(x,y,t) = \frac{1}{2} e^{-6t} \sin x \sinh 2y$

(4) (a) $\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^1 3x^2 \varphi'(x) dx - \int_1^{\infty} 2x^3 \varphi'(x) dx$
 $= [-3x^2 \varphi(x)]_{-\infty}^1 + \int_{-\infty}^1 6x \varphi(x) dx + [-2x^3 \varphi(x)]_1^{\infty} + \int_1^{\infty} 6x^2 \varphi(x) dx$
 $= -3\varphi(1) + 2\varphi(1) + \int_1^{\infty} 6x^2 \varphi(x) dx, \text{ där}$

$$g(x) = \begin{cases} 6x, & x < 1 \\ 6x^2, & x > 1 \end{cases}$$

Svar: $f' = -\delta_1 + g$



(b) Trots att f' är en funktion för $x \neq 0$ med höger och vänstergränsvärden i $x=1$, existerar ej $f'(1)$ då f ej är kontinuerlig i $x=1$.

$$(c) \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \varphi(x) dx = 1/x = \frac{y}{n} / = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+y^2} \underbrace{\varphi\left(\frac{y}{n}\right)}_{\rightarrow \varphi(0)} dy$$

$$\rightarrow \varphi(0) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \varphi(0) \cdot \pi, \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R})$$

Svar: $f_n \rightarrow \pi \cdot \delta_0$ svagt.

(5) (a) $u(x,y) = x^2 + y^2$

Här är $\Delta u = 4 > 0$ och u har minimum i origo.

Svar: Ja, det är möjligt.

(b) I ett maximum är $u'_x = u'_y = 0$ och $u''_{xx} \leq 0$ och $u''_{yy} \leq 0$, så speciellt $\Delta u \leq 0$

Svar: Nej, det är omöjligt.

(6) Antag $u \in C^2$ löser variationsproblemet.

$$\iint_D \Delta u \varphi dx = \text{Green 1} / = \int_{\partial D} \partial_n \varphi dS - \iint_D \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle dx$$

$$= \iint_D u \varphi dx + \int_{\partial D} (\partial_n u - f) \varphi dS$$

Låt $a \in D$ och låt $\varphi_n \rightarrow \delta_a$ svagt

$\varphi_n = 0$ på $\partial D \Rightarrow$

$$0 = \iint_D (\Delta u - u) \varphi_n dx \rightarrow \Delta u(a) - u(a)$$

$\therefore -\Delta u + u = 0$ i hela D .

$$\Rightarrow \int_{\partial D} (\partial_n u - f) \varphi dS = 0 \text{ för alla testfunktioner } \varphi.$$

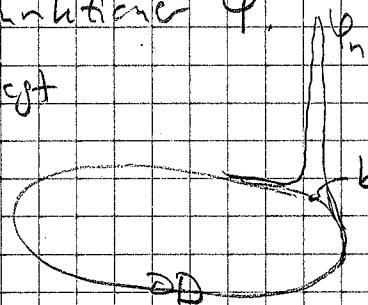
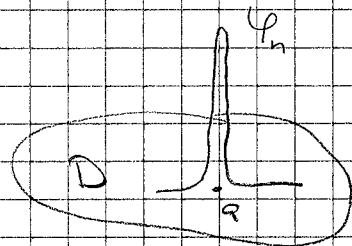
Låt $b \in \partial D$ och låt $\varphi_n \rightarrow \delta_b$ på ∂D svagt

$$0 = \int_{\partial D} (\partial_n u - f) \varphi_n dS \rightarrow \partial_n u(b) - f(b)$$

$\therefore \partial_n u = f$ på hela ∂D .

Det sökta randvärdesproblemet

är således



$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 & \text{in } D \\ \partial_n u = f & \text{on } \partial D \end{cases} \quad (*)$$

(4)

Omrunt, enty $u \in C^2(\bar{D})$ (*)

$$\begin{aligned} \Rightarrow a(u, \varphi) &= \text{Green I} = - \iint_D \Delta u \varphi \, dx + \int_{\partial D} \partial_n u \varphi \, dS + \iint_D u \varphi \, dx \\ &= \int_{\partial D} f \varphi \, dS = L(\varphi), \text{ si } u \text{ är lösningen på (*)} \end{aligned}$$

(7) Vi använder lösningsformeln för vågkvationen med källa f :

$$u(x, y, z, t) = \int_0^t (R_{t-s} * f_s)(\bar{x}) \, ds$$

$$\text{där } R_{t-s} * f_s(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi(t-s)} \iint_{|\bar{y}-\bar{x}|=t-s} \frac{h(\bar{y})}{t-s} \, dS(\bar{y}).$$

Da h är harmonisk, ser medelvärdesegenskapen för sfärer att

$$R_{t-s} * f_s(\bar{x}) = (t-s) h(\bar{x}).$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u &= \int_0^t \frac{t-s}{t-s} h(\bar{x}) \, ds = \left[(t+1) \ln(1+u) - s \right]_{s=0}^t h(\bar{x}) \\ &= ((t+1) \ln(1+t) - t) \cdot h(x, y, z). \end{aligned}$$