

MATEMATIK

Göteborgs Universitet

Hemtentamen i Partiella differentialekvationer F3, TMA690

2020-04-08, kl. 8.30-12.30

Hjälpmedel: Alla.

Examinator: Andreas Rosén

Under skrivningstiden nås examinator via epost rosenan@chalmers.se.

Totalt antal skrivningspoäng är 50. Till dessa läggs bonuspoäng. Betygsgränser: 20 poäng för betyget 3, 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget 5, inklusive bonus. En muntlig redogörelse av lösningar i efterhand kan komma att krävas för de högre betygen.

Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara välskrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.

Lösningsförslag och besked om rättning och granskning lämnas via kursens hemsida.

1. Svara och motivera.

(a) Vilka av följande två funktionsrum är Hilbertrum?

- i. $V_1 = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R} ; f \text{ är kontinuerlig}\}$ med norm $\|f\| = (\int_0^1 |f(x)|^2 dx)^{1/2}$.
 - ii. $V_2 = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R} ; f \text{ är begränsad}\}$ med norm $\|f\| = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$.
- (3p)

(b) Vilka av följande tre är tempererade distributioner på $\mathbf{R}$?

e^x , $|x|^{-1/2}$ och $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k$, där δ_k är Dirac-deltat i $x = k$.

(3p)

(c) För vilka $a, b \in \mathbf{R}$ och $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^3$ är $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a/|\mathbf{x} - \mathbf{y}| + b/|\mathbf{x} - \mathbf{z}|$ en Greensfunktion för enhetsklotet $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 ; |\mathbf{x}| < 1\}$?

(3p)

2. Beräkna lösningen $u(x, y)$ till PDE-problemet

$$u'_x + \sqrt{y} u'_y = u, \quad u(x, 0) = x,$$

för $x \in \mathbf{R}$, $y \geq 0$.

(7p)

3. Låt $f(x, t) > 0$ vara en positiv funktion, och låt $u(x, t)$ vara en kontinuerlig funktion, för $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq 2$. Antag att $u(x, t)$ är en C^2 funktion för $-1 < x < 1$, $0 < t < 2$, och där löser

$$u'_t(x, t) = \Delta u(x, t) + f(x, t).$$

(a) Avgör om det är möjligt att u antar minimum för $x = 0$, $t = 1$.

(3p)

(b) Avgör om det är möjligt att u antar maximum för $x = 0$, $t = 1$.

(3p)

Motexempel eller fullständigt bevis efterfrågas.

Var god vänd!

4. (a) Beräkna andraderivatans f'' i svag (distributions-) mening av funktionen

$$f(x) = |x - x^2|.$$

Skissa f , f' och f'' .

(4p)

- (b) Avgör om följderna $f_n(x) = \sin^2(nx)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, konvergerar svagt (= i distributionsmening) på $\mathbf{R}$ då $n \rightarrow \infty$, och bestäm i så fall gränsdistributionen.

(3p)

5. Låt $f(x, y) \in H_0^1(D)$, där $D = [0, 1] \times [0, 1]$, och betrakta följande PDE problem

$$\begin{cases} u''_{tt} = \Delta u, & t > 0, (x, y) \in D, \\ u = 1, & t > 0, (x, y) \in \partial D, \\ u = 1 + f, & t = 0, (x, y) \in D, \\ u'_t = 0, & t = 0, (x, y) \in D. \end{cases}$$

för $u(x, y, t)$.

- (a) Visa att problemet har högst en lösning u , för givet f . Entydighetssatser för PDE som används måste bevisas.

(4p)

- (b) Beräkna u då $f = \sin x \sin y$.

(3p)

6. Låt $D \subset \mathbf{R}^2$ vara ett begränsat område med slät rand. Betrakta variationsproblemet där $u \in V$ sökes som löser

$$a(u, \phi) = L(\phi), \quad \text{för alla } \phi \in V,$$

med $V = H^1(D)$ och

$$\begin{aligned} a(u, \phi) &= \iint_D (\nabla u, \nabla \phi) dx + \int_{\partial D} u \phi dS, \\ L(\phi) &= \iint_D f \phi dx + \int_{\partial D} g \phi dS, \end{aligned}$$

där f och g är givna kontinuerliga funktioner på $\overline{D}$ respektive ∂D .

Finn det randvärdesproblem som är ekvivalent med variationsproblemet. Ekvivalensen ska visas under antagandet att u är C^2 .

(7p)

7. Låt $k \in \mathbf{R}$ och

$$\Phi_k(\mathbf{x}) = -\frac{e^{-k|\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{x}|}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3.$$

Visa att $\Delta \Phi_k - k^2 \Phi_k = \delta$.

(7p)

(1) (a) V_1 är ej fullständig i L_2 -norm, vilket följer

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x < \frac{1}{2} \\ n(2x-1), & \frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 2 & x > \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \end{cases} \quad \text{visar.}$$

(b) V_2 's norm kommer inte ge en skalär produkt.

Svar: Varken V_1 eller V_2 är Hilbertrum.

(b) $e^x \notin S'(\mathbb{R})$ ty $\int_{-\infty}^{\infty} e^x \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x^2+1}}_{\in S(\mathbb{R})} dx$

är ej konvergent i ∞ .

$$|x|^{-1/2} \in S'(\mathbb{R}) \quad \text{ty} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{-1/2} \varphi(x) dx \quad \text{är}$$

konvergent för alla $\varphi \in S(\mathbb{R})$: detta följer

i 0 är att $\int_{-1}^1 |x|^{-1/2} dx < \infty$ och i ∞ är att

$$|\varphi(x)| \leq \frac{C}{1+|x|}.$$

$$(*) \sum_{h=0}^{\infty} \delta_h \in S'(\mathbb{R}) \quad \text{ty} \quad \langle \sum_{h=0}^{\infty} \delta_h, \varphi \rangle = \sum_{h=0}^{\infty} \varphi(h),$$

vilket är en absolut konvergent serie för varje $\varphi \in S(\mathbb{R})$

$$\text{ty } |\varphi(x)| \leq \frac{C}{1+|x|^2}$$

Svar: e^x är ej temp. distr., men $|x|^{-1/2}$ och $\sum_{h=0}^{\infty} \delta_h$ är temp. distr.

(c) Först måste $a = -\frac{1}{4\pi}$ och $|\bar{z}| > 1$. Detta ger

$$\Delta G = \delta(\bar{x} - \bar{y}).$$

$$\text{Sedan väljs } \bar{z} = \frac{\bar{y}}{|\bar{y}|^2} \quad \text{och} \quad b = \frac{1}{4\pi|\bar{y}|},$$

från vilket följer att $G(x, y) = 0$ då $|\bar{x}| = 1$.

$$\text{Svar: } a = -\frac{1}{4\pi}, \quad b = \frac{1}{4\pi|\bar{y}|}, \quad \bar{z} = \frac{\bar{y}}{|\bar{y}|^2}$$

(2)

Karakteristisk chv: $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y}}{1}$

Sep. ODE:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int dx \Rightarrow 2\sqrt{y} = x + C$$

Gör var. byte: $\begin{cases} s = 2\sqrt{y} - x \\ t = y \end{cases}$

$$\text{Kedjeregeln} \Rightarrow u'_x = (-1)u'_s + 0 \cdot u'_t$$

$$u'_y = \frac{1}{\sqrt{y}} u'_s + 1 \cdot u'_t$$

PDEn $\Rightarrow$

$$-u'_s + \sqrt{y} \left(\frac{1}{\sqrt{y}} u'_s + u'_t \right) = u$$

$$\Rightarrow \sqrt{t} u'_t = u \Leftrightarrow \sqrt{t} \frac{\partial u}{\partial t} = u$$

Sep. ODE i t , med s som parameter.

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$$\ln u = 2\sqrt{t} + C(s)$$

$$u(s, t) = \underbrace{e^{C(s)}}_{=D(s)} \cdot e^{2\sqrt{t}}$$

$$u(x, y) = D(2\sqrt{y} - x) \cdot e^{2\sqrt{y}} = \alpha$$

$$y=0 \Rightarrow x = u(x, 0) = D(-x) e^0$$

$$D(\alpha) = -\alpha$$

$$\text{Så } \alpha = 2\sqrt{y} - x \Rightarrow$$

$$u(x, y) = \underline{(x - 2\sqrt{y}) e^{2\sqrt{y}}}$$

(3)

(a) Antag u antar min i $(0, 1)$. Då måste då

$$u'_t = 0 \text{ och } \Delta u \geq 0.$$

Men då är $u'_t = \Delta u + f$ om möjligt då

$$0 = \Delta u + f \text{ och } \Delta u > 0 \text{ om } f > 0.$$

$$(b) \text{ Låt } t \in \mathbb{R} \text{ så } u(x, t) = -(t-1)^2 - 7x^2$$

$$\Rightarrow u'_t = -2(t-1)$$

$$\Delta u = -14 = f$$

$$\Rightarrow u'_t - \Delta u = 16 - 2t > 0$$

Denne u antager max i $(0,1)$

(3)

Svar: min er umøjligt, men max er muligt.

(4) (a) Notere $x - x^2 = x(1-x) > 0$ for $0 < x < 1$.

$$\underline{f'}: \langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^0 (x^2 - x) \varphi' dx$$

$$- \int_0^1 (x - x^2) \varphi' dx - \int_1^{\infty} (x^2 - x) \varphi' dx$$

$$= - \left[(x^2 - x) \varphi \right]_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0 (2x - 1) \varphi dx$$

$$- \left[(x - x^2) \varphi \right]_0^1 + \int_0^1 (1 - 2x) \varphi dx - \left[(x^2 - x) \varphi \right]_1^{\infty} + \int_1^{\infty} (2x - 1) \varphi dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \varphi(x) dx$$

$$\text{d.w. } g(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 0 \text{ el. } x > 1 \\ 1 - 2x, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$\underline{f''}: \langle f'', \varphi \rangle = -\langle f', \varphi' \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \varphi'(x) dx$$

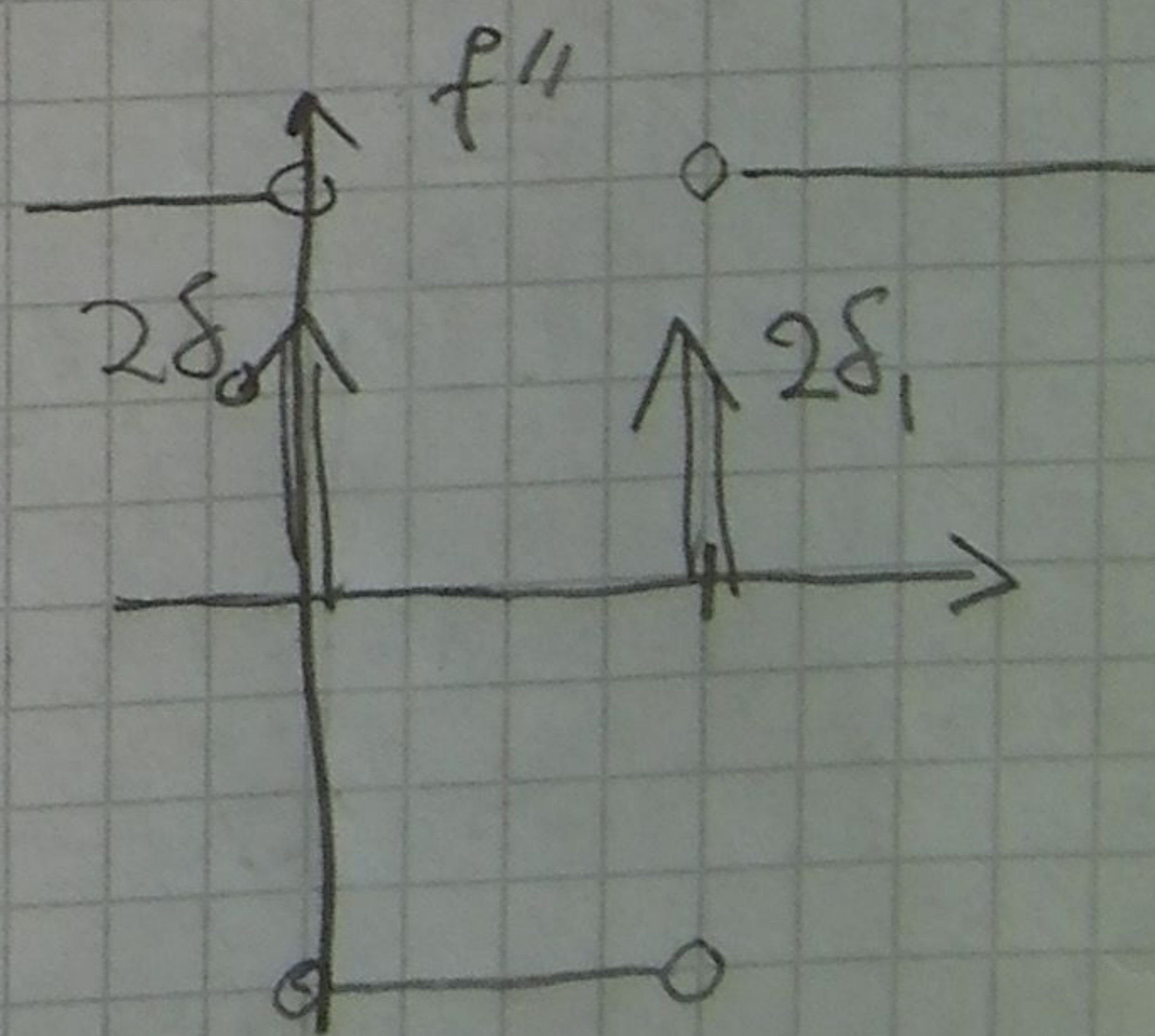
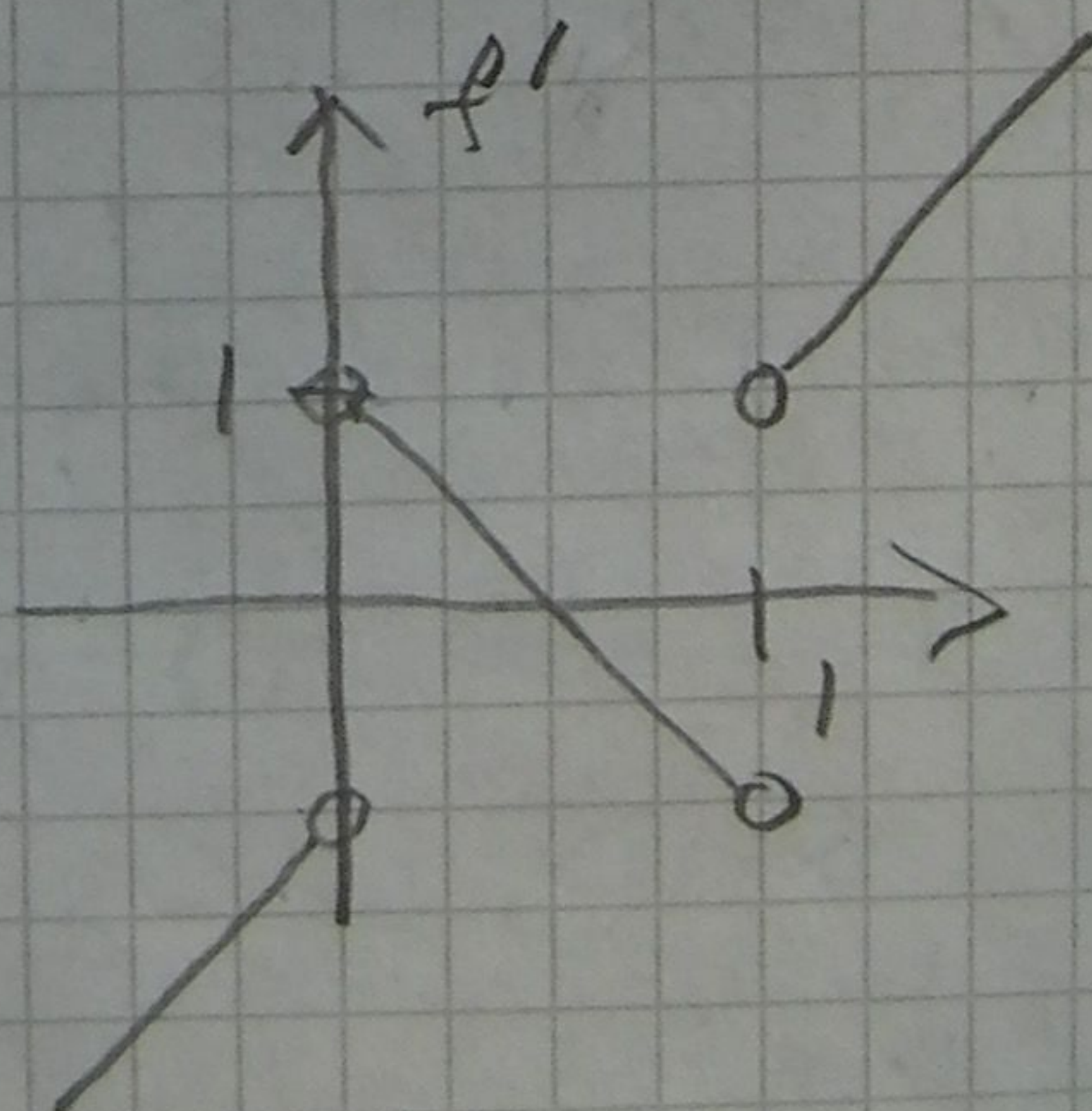
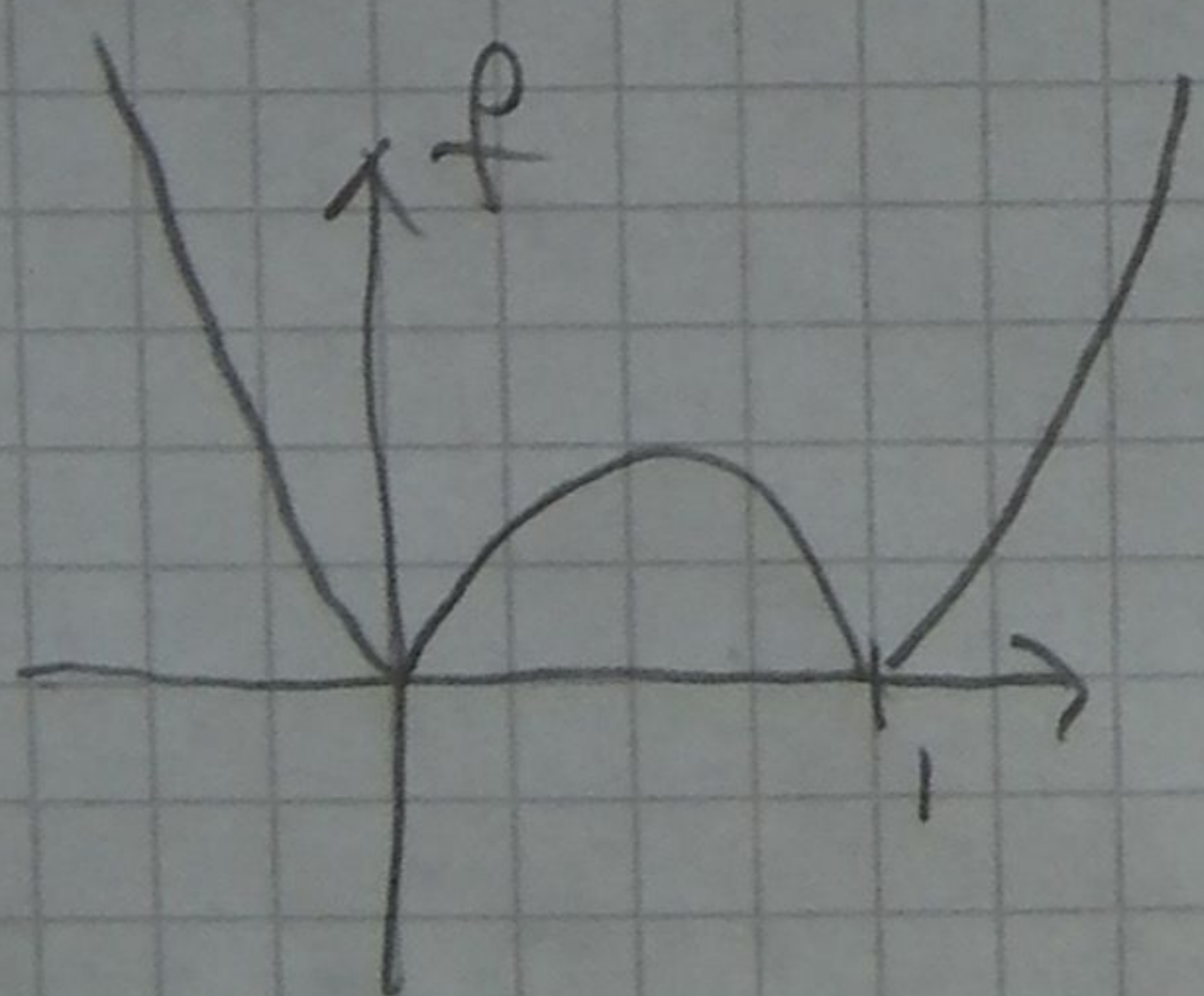
$$= - \left[(2x - 1) \varphi \right]_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0 2 \varphi dx$$

$$- \left[(1 - 2x) \varphi \right]_0^1 + \int_0^1 (-2) \varphi dx - \left[(2x - 1) \varphi \right]_1^{\infty} + \int_1^{\infty} 2 \varphi dx$$

$$= 2 \varphi(0) + 2 \varphi(1) + \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \varphi(x) dx$$

$$\text{d.w. } h(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \text{ el. } x > 1 \\ -2, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Svar: $f'' = 2\delta_0 + 2\delta_1 + h(x)$



$$(b) \sin^2(nx) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2nx)$$

(4)

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Rightarrow$$

$$\int \sin^2(nx) \varphi \, dx = \int \frac{1}{2} \cdot \varphi \, dx - \frac{1}{2} \underbrace{\int \cos(2nx) \varphi \, dx}_{I_n}$$

$$I_n = \left[\frac{1}{2n} \sin(2nx) \varphi \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2n} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(2nx) \varphi \, dx$$

$$\Rightarrow |I_n| \leq \frac{1}{2n} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi| \, dx \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

Svar: $\sin^2(nx) \rightarrow \frac{1}{2}$ svagt då $n \rightarrow \infty$.

(5) Antag u_1 och u_2 löser PDE problemet.

$$\text{Låt } v = u_1 - u_2.$$

$$\Rightarrow v_{tt}'' = \Delta v \quad \text{då väghv. är homog.}$$

$$\Rightarrow v = u_1 - u_2 = 1 - 1 = 0 \text{ på } \partial D$$

$$\Rightarrow v = u_1 - u_2 = (1+f) - (1+f) = 0 \text{ för } t=0.$$

$$\Rightarrow v_t' = u_1' - u_2' = 0 - 0 = 0 \text{ för } t=0.$$

Definiera energin

$$E(t) = \iint_D \left((\partial_t v)^2 + |\nabla v|^2 \right) dx dy$$

$$\Rightarrow E'(t) = \iint_D \left(2 \partial_t v \cdot \partial_t^2 v + 2 \langle \nabla v, \underbrace{\partial_t \nabla v}_{= \nabla(\partial_t v)} \rangle \right) dx dy$$

Green 1

$$= \underbrace{\int_{\partial D} 2 \partial_n v \cdot \partial_t v}_{=0} + \iint_D 2 \left(\partial_t v \partial_t^2 v - \underbrace{\nabla v \cdot \nabla \partial_t v}_{= \frac{1}{2} \partial_t v_{tt}''} \right) dx dy$$

$$= 0, \forall t.$$

$$E(0) = \iint_D (0 + 0) dx dy = 0$$

$$\Rightarrow E(t) = 0, \forall t > 0$$

$$\Rightarrow \nabla v = 0, \bar{x} \in D, t > 0 \quad \& \quad v = 0 \text{ för } \bar{x} \in \partial D, t > 0$$

$$\Rightarrow v = u_1 - u_2 = 0, \forall \bar{x} \in D, t > 0.$$

b) $\Delta \sin x \sin y = -2 \sin x \sin y$
D'Alembert egenfunktion.

(5)

Giss lösning: $u(x, y, t) = 1 + f(t) \sin x \sin y$
 u löser vägelkv. om

$$f''(t) = -2f(t)$$

$$\Rightarrow f(t) = A \cos(\sqrt{2}t) + B \sin(\sqrt{2}t)$$

Startvillkor: $t=0 \Rightarrow$

$$1 + \sin x \sin y = u = 1 + A \sin x \sin y \Rightarrow A=1$$

$$0 = u'_t = B \sin x \sin y \Rightarrow B=0$$

Svar: $u = 1 + \cos(\sqrt{2}t) \sin x \sin y$

(6)

Antag $u \in C^2$ är en variationslösning.

$$\iint_D \Delta u \cdot \varphi = \int_{\partial D} \partial_n u \cdot \varphi - \iint_D \nabla u \cdot \nabla \varphi$$

Green

$$= \int_{\partial D} \partial_n u \cdot \varphi + \int_D u \Delta \varphi - \iint_D f \varphi - \int_{\partial D} g \varphi$$

$$\Rightarrow \forall \varphi \in H^1(D): \iint_D (\Delta u + f) \varphi \, dx = \int_{\partial D} (\partial_n u + u - g) \varphi \, ds$$

1. Låt $\bar{a} \in D$. Tag $\varphi_n \rightarrow \delta_{\bar{a}}$ svejt
som i figur.

$$\Rightarrow \iint_D (\Delta u + f) \varphi_n \, dx = 0$$

$$\rightarrow \Delta u(\bar{a}) + f(\bar{a})$$

$$\therefore \Delta u = -f \text{ i hela } D$$

2. Låt nu $\bar{b} \in \partial D$.

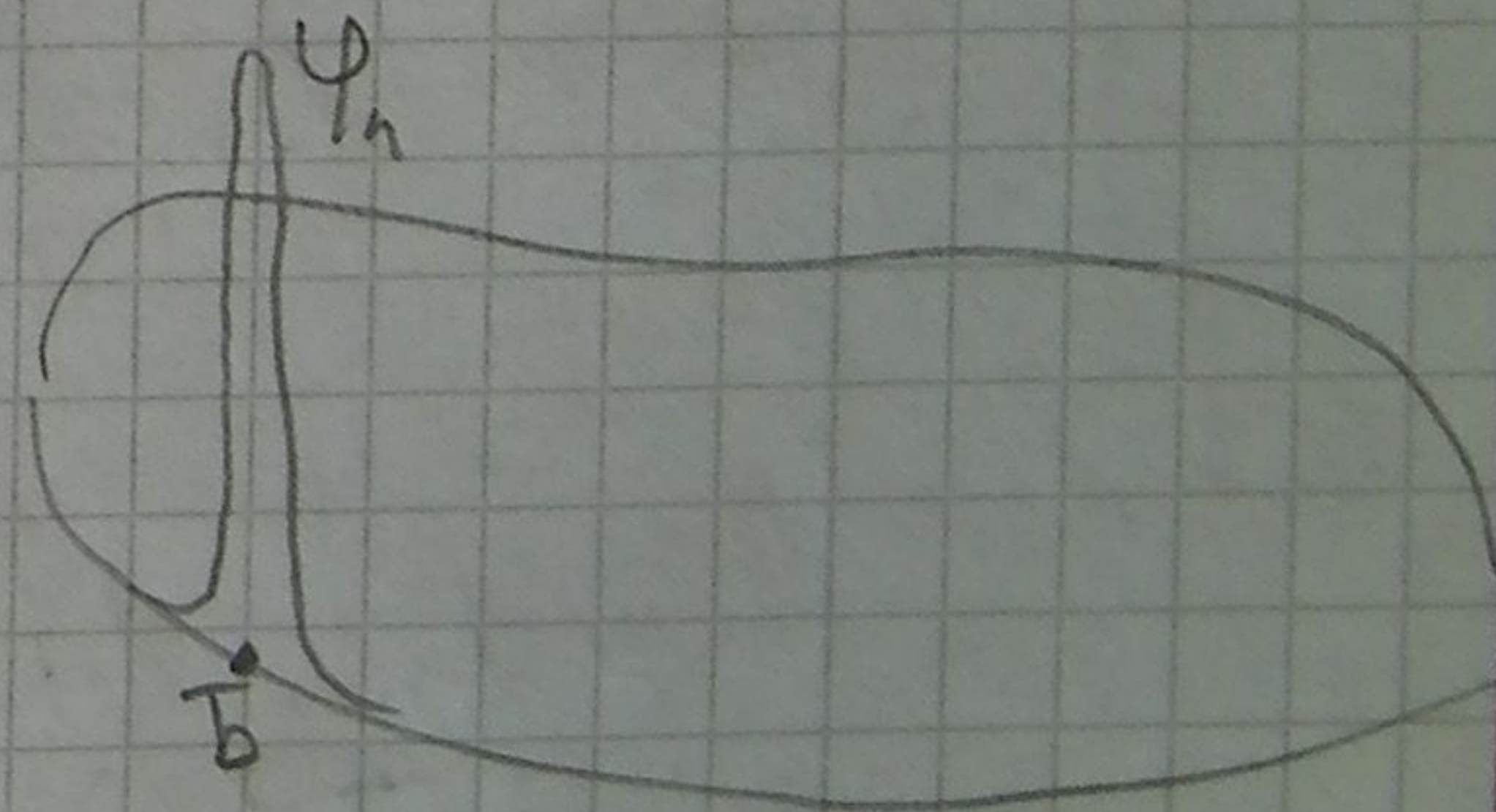
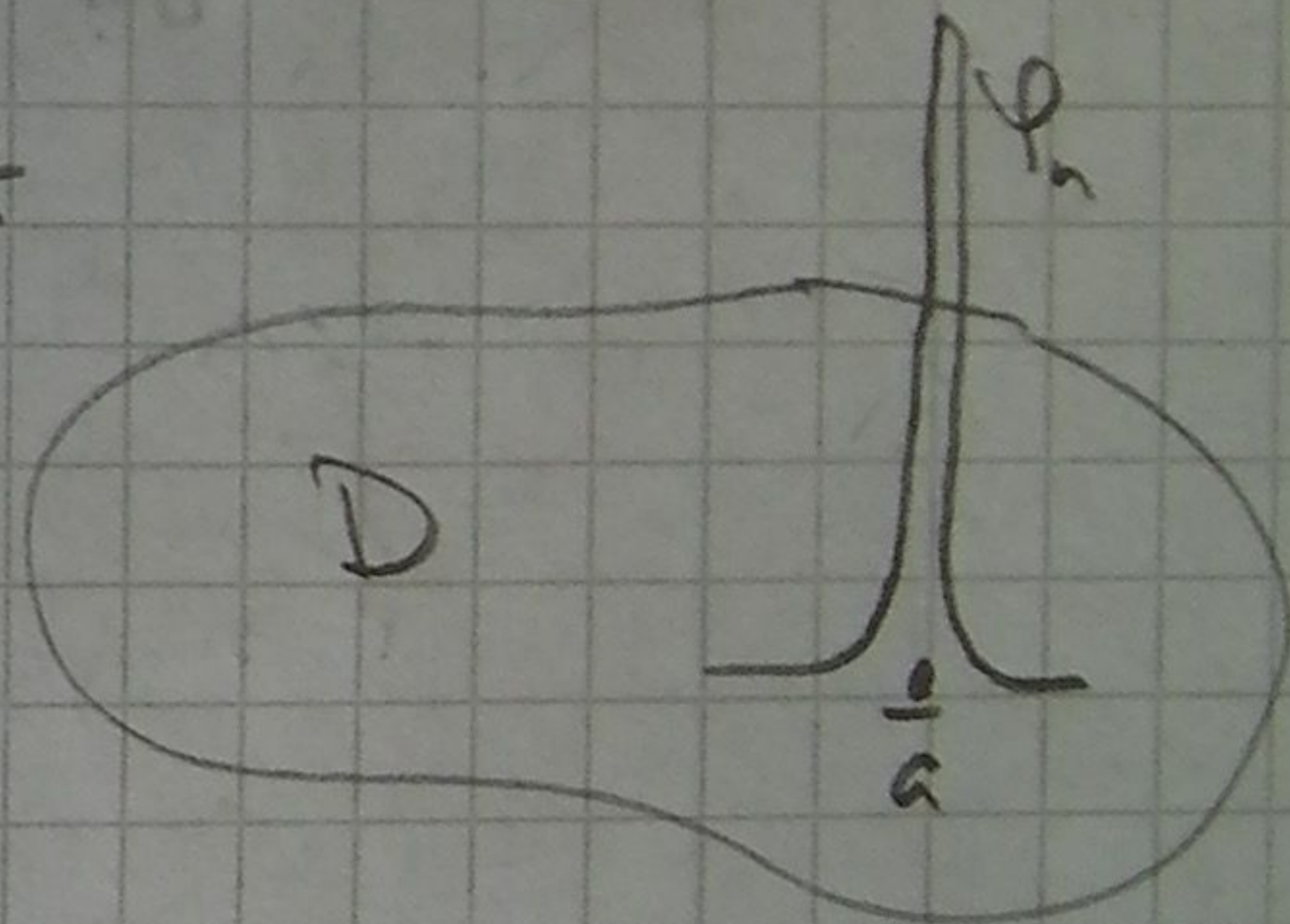
Tag nu $\varphi_n \in H^1(D)$ s.d.

$$\varphi_n \rightarrow \delta_{\bar{b}} \text{ p. } \partial D.$$

$$(*) \quad 0 = \int_{\partial D} (\partial_n u + u - g) \varphi_n \, ds$$

$$\rightarrow \partial_n u(\bar{b}) + u(\bar{b}) - g(\bar{b}).$$

$$\therefore \partial_n u + u = g \text{ p. } \partial D.$$



$\therefore u$ löser Randwertproblem (Robin)

$$\begin{cases} \Delta u = -f & \text{in } D \\ \partial_n u + u = g & \text{on } \partial D \end{cases}$$

(6)

Omnivert, erley $u \in C^1$ löst die Robin RVP:

$$\begin{aligned} \Rightarrow a(u, \varphi) &= \iint_D \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle + \int_{\partial D} u \varphi \\ &\stackrel{\text{Green}}{=} \int_{\partial D} \partial_n u \cdot \varphi - \iint_D \Delta u \cdot \varphi + \int_{\partial D} u \varphi \\ &= \iint_D f \varphi + \int_{\partial D} g \varphi. \end{aligned}$$

$\therefore u$ löser Variationsproblem.

(7)

Deriviere Klessicht für $X \neq 0$.

$$\Delta \Phi_h = \Delta \left(\frac{e^{-hr}}{4\pi r} \right)$$

$$= \partial_r^2 \Phi_h + \frac{2}{r} \partial_r \Phi_h$$

$$\Phi_h = -\frac{e^{-hr}}{4\pi r}$$

$$\partial_r \Phi_h = k \frac{e^{-hr}}{4\pi r} + \frac{e^{-hr}}{4\pi r^2}$$

$$\partial_r^2 \Phi_h = -k^2 \frac{e^{-hr}}{4\pi r} - k \frac{e^{-hr}}{4\pi r^2} - k \frac{e^{-hr}}{4\pi r^2} - \frac{e^{-hr}}{2\pi r^3}$$

$$\Rightarrow \Delta \Phi_h = -k^2 \frac{e^{-hr}}{4\pi r} = k^2 \Phi_h$$

Siey derivete i origo:

$$\langle \Delta \Phi_h, \varphi \rangle = \langle \Phi_h, \Delta \varphi \rangle = \iint_D \Phi_h \Delta \varphi$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \iint_{|\vec{x}| > r} \Phi_h \Delta \varphi = \text{Green}$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\int_{|\vec{x}| > r} (\Phi_h \partial_n \varphi - \partial_n \Phi_h \varphi) + \iint_{|\vec{x}| > r} \Delta \Phi_h \varphi \right)$$

$$\Rightarrow \langle \Delta \Phi_h - k^2 \Phi_h, \varphi \rangle = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{|\vec{x}|=r} (\Phi_h \partial_n \varphi - \underbrace{\partial_n \Phi_h \varphi}_{= -\partial_r \Phi_h \varphi})$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4\pi r^2} e^{-hr} \int_{|\vec{x}|=r} \varphi dS + o(r) \right) = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

