

# MATEMATIK

Göteborgs Universitet

Tentamen i Partiella differentialekvationer F3, TMA690

2020-01-16, kl. 8.30-12.30

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Examinator: Andreas Rosén

Telefonvakt: Felix Held, ankn. 5325

---

Totalt antal skrivningspoäng är 50. Till dessa läggs bonuspoäng. Betygsgränser: 20 poäng för betyget 3, 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget VG, inklusive bonus.

Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara välskrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.

Lösningsförslag och besked om rättning och granskning lämnas via kursens hemsida.

---

1. Definiera följande.

(a) Vad som menas med en Greensfunktion för ett område  $D \subset \mathbf{R}^2$ . (3p)

(b) Vad som menas med en hyperbolisk linjär andra ordningens PDE. (3p)

(c) Vad som menas med en distribution  $F \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ . (3p)

2. Beräkna lösningen  $u(x, y)$  till PDE-problemet

$$\sqrt{1-x^2}u'_x + u'_y = 0, \quad u(0, y) = y^2,$$

för  $|x| < 1$ ,  $y \in \mathbf{R}$ . (6p)

3. Låt  $D = \{x^2 + y^2 < 1\}$  vara enhetsskivan. Betrakta den harmoniska funktion  $u(x, y)$  på  $D$  som har Dirichlet-randvärden

$$\frac{x^2}{(1 + 3x^2 + 3y^2)^2}$$

på  $\partial D$ .

(a) Bestäm maximum och minimum av  $u$  på  $\overline{D} = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ . (3p)

(b) Beräkna  $u(0, 0)$ . (3p)

4. (a) Beräkna distributionsderivatan (=den svaga derivatan)  $f'$  av funktionen

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \geq 1, \\ -x^2 - 2x, & |x| < 1. \end{cases}$$

Skissa  $f$  och  $f'$ . (4p)

(b) Avgör om följderna  $f_n(x) = ne^{-n|x|}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , konvergerar svagt (= i distributionsmening) då  $n \rightarrow \infty$ , och bestäm i så fall gränsdistributionen. (3p)

Var god vänd!

5. (a) Låt  $a, b \in \mathbf{R}$ . Lös ODEn  $f'(t) = -af(t) - tf(t)$  för  $t \in \mathbf{R}$ , där  $f(0) = b$ . (2p)
- (b) Bestäm värmekärnan  $H_t(x)$  i en dimension, det vill säga den funktion vars Fourier transform är  $\hat{H}_t(\xi) = e^{-t\xi^2}$ . Beräkningen ska redovisas. (2p)
- (c) Bestäm lösningen  $u(x, t)$  till följande värmeledningsproblem med tidsberoende dissipation.

$$\begin{cases} u'_t = u''_{xx} - tu, & t > 0, x \in \mathbf{R}, \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

(3p)

6. Betrakta ett variationsproblem där  $u \in V$  sökes som löser

$$a(u, \phi) = L(\phi), \quad \text{för alla } \phi \in V. \quad (1)$$

Här är  $V$  ett givet funktionsrum,  $a : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$  är en given bilinjär funktional och  $L : V \rightarrow \mathbf{R}$  är en given linjär funktional. Formulera och bevisa Lax–Milgrams sats. Hypotesen på  $V$ ,  $a$  och  $L$  och hur denna används i beviset ska tydligt framgå. Det får antas att  $a$  är symmetrisk och antas känt att  $u$  löser (1) om och endast om  $u$  minimerar  $F(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - L(u)$ . (8p)

7. (De som läst TMA690 tidigare än 2019/2020 löser istället (7') nedan.)

Betrakta  $-\Delta$  på rektangeln  $D = \{0 < x < 1, 0 < y < 2\}$  med Dirichlets randvillkor.

- (a) Bestäm det minsta egenvärdet  $\lambda_1$ . (3p)
- (b) Beräkna Rayleighkvoten  $R$  för

$$\phi(x, y) = xy(1-x)(2-y).$$

(4p)

- 7' (Lösas endast av de som läst TMA690 tidigare än 2019/2020.)

Låt  $D \subset \mathbf{R}^2$  vara ett begränsat och enkelt sammanhängande område i planet med slät rand.

- (a) Definiera dubbelskiktspotentialen i  $D$ , av en funktion  $h$  på  $\partial D$ . (2p)
- (b) Ange randvärdena på  $\partial D$  av din dubbelskiktspotential i (a). (2p)
- (c) Beskriv algoritmen för att lösa Dirichletproblemet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{i } D, \\ u = f & \text{på } \partial D, \end{cases}$$

med dubbelskiktspotentialer. (3p)

① (a)  $G(x, y)$  är Greensfunktion för  $D$  om

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln|x-y| + g_y(x) \quad \text{där}$$

$$\bullet \Delta g_y = 0 \text{ i } D$$

$$\bullet g_y(x) = -\frac{1}{2\pi} \ln|x-y| \text{ för } x \in \partial D$$

(b) En linjär 2:a ordningens PDE är på formen

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u + \sum_{i=1}^n a_i(x) \partial_{x_i} u + a_0(x) u = f(x)$$

Bildar matrisen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{bmatrix}$$

PDE:n sägs vara hyperbolisk om alla  $A$ 's egenvärden är  $\neq 0$  och alla har samma tecken utom ett.

(c) En distribution  $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  är en linjär funktional  $F: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  definierad för alla testfunktioner  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  som är godtyckligt många gånger kontinuerligt deriverbara och  $= 0$  utanför en begränsad mängd.

② Karakteristisk ehv.:  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$   
 $\Rightarrow$  karakt. kurvor  $y = \operatorname{arcsinh} x + C$

$$\text{Låt } \int S = x$$

$$\begin{cases} t = y - \operatorname{arcsinh} x & (=C) \end{cases}$$

$$\text{Kedjeregeln } \Rightarrow \int u'_x = 1 \cdot u'_s - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} u'_t$$

$$\begin{cases} u'_y = 0 \cdot u'_s + 1 \cdot u'_t \end{cases}$$

$$\text{PDE:n} \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} \left( u'_s - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} u'_t \right) + u'_t = 0$$

$$\Leftrightarrow u'_s = 0$$

Allmän lösning:

$$u(s,t) = f(t)$$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  godtycklig.

$$u(x,y) = f(y - \arcsin x)$$

Villkoret  $u(0,y) = y^2$

$$\Rightarrow f(y) = y^2, \forall y$$

Svar:  $u(x,y) = (y - \arcsin x)^2$

(3) På  $\partial D$  är  $x^2 + y^2 = 1$ , så

$$u = \frac{1}{16} x^2$$

(a) Enligt maximumprincipen:

$$\max_{\bar{D}} u = \max_{\partial D} u = \frac{1}{16}$$

$$\min_{\bar{D}} u = \min_{\partial D} u = 0$$

(b) Enligt medelvärdesatsen:

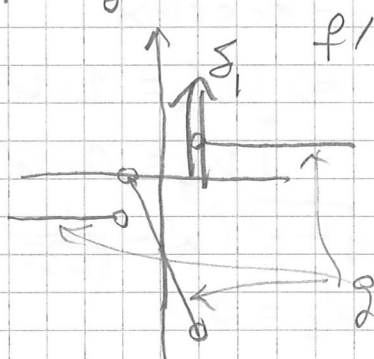
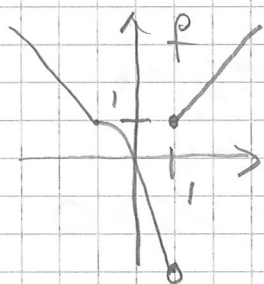
$$u(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{16} (\cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{32}$$

$$\begin{aligned} (4)(a) \langle f', \varphi \rangle &= -\langle f, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^1 (-x) \varphi' dx - \int_{-1}^1 (-x^2 - 2x) \varphi' dx \\ &\quad - \int_1^{\infty} x \varphi' dx \\ &= [x\varphi]_{-\infty}^1 - \int_{-\infty}^1 \varphi dx + [(x^2 + 2x)\varphi]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (2x + 2)\varphi dx \\ &= [x\varphi]_1^{\infty} + \int_1^{\infty} \varphi dx \end{aligned}$$

$$= -\varphi(1) + (3\varphi(1) + \varphi(-1)) - (0 - \varphi(-1)) + \int_{-2}^{\infty} g\varphi dx$$

$$\text{där } g(x) = \begin{cases} -1, & x < -1 \\ -2x - 2, & -1 \leq x < 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Svar:  $f' = 4\delta_1 + g$



$$\begin{aligned}
 (b) \quad \langle f_n, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} n e^{-n|x|} \varphi(x) dx = /x = \frac{y}{n}/ \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} \underbrace{\varphi\left(\frac{y}{n}\right)}_{\rightarrow \varphi(0) \text{ for alle } y} dy \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} \cdot \varphi(0) dy \\
 &= \varphi(0) \cdot 2 \cdot \int_0^{\infty} e^{-y} dy = 2 \varphi(0) = \langle 2\delta_0, \varphi \rangle \\
 &\text{for alle } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \\
 \text{Svar: } f_n &\xrightarrow{\text{svagt}} 2\delta_0
 \end{aligned}$$

$$(5) (a) \quad f(t) = b e^{-at - t^2/2}$$

(læs tex som superskel eDE)

$$\begin{aligned}
 (b) \quad F\{e^{-x^2/4t}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/4t - i\xi x} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4t}(x + 2it\xi)^2 - t\xi^2} dx = /x + 2it\xi = z \cdot \sqrt{4t}/ \\
 &= e^{-t\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz \sqrt{4t} \\
 &= \sqrt{4t} e^{-t\xi^2} \left( \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2 - y^2} dx dy \right)^{1/2} \\
 &= 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr = \pi \\
 \Rightarrow F\left\{ \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t} \right\} &= e^{-t\xi^2} \\
 &= H_t(\xi)
 \end{aligned}$$

(c) Fix  $t$ . Transformere  $x \mapsto \xi$ :

$$\hat{u}_t = -\xi^2 \hat{u} - t \cdot \hat{u}$$

Fix  $\xi$ . Løs ODE i  $t$  enligt (a):

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{u}(\xi, 0) e^{-|\xi|^2 t - t^2/2}$$

Inverstransformere  $\xi \leftarrow x$  for fix  $t$ :

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= g(x) * (H_t(x) \cdot e^{-t^2/2}) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{y^2}{4t} - \frac{t^2}{2}} g(x-y) dy
 \end{aligned}$$



## ⑥ Lex-Milgrams sats

Antag  $V$ : Hilbert rum

$a$ : koersiv och begränsad

$L$ : begränsad

Då har variationsproblemet en lösning.

Se kurskompendiet (3.3.5) för detaljer och bevis.

⑦ (a) Eigenfunktioner är  $\sin(\pi n x) \cdot \sin(\frac{\pi}{2} m y)$   
 $n, m = 1, 2, 3, \dots$

För  $n=m=1$  blir alltså egenvärdet för  $-\Delta$ :

$$\pi^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \pi^2$$

(b) Vi beräknar  $\frac{\iint_D |\nabla \varphi|^2}{\iint_D \varphi^2} = R,$

$$\begin{aligned} \iint_D \varphi^2 &= \int_0^1 (x(1-x))^2 dx \cdot \int_0^2 (y(2-y))^2 dy = \int_0^1 y=2x / \\ &= 2^5 \left( \int_0^1 x^2(1-x)^2 dx \right)^2 \\ &= 2^5 \left( \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} \right)^2 = \frac{2^5}{30^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint |\partial_x \varphi|^2 &= \int_0^1 (1-2x)^2 dx \cdot \int_0^2 (y(2-y))^2 dy = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^5}{30} \\ \iint |\partial_y \varphi|^2 &= \int_0^1 (x(1-x))^2 dx \cdot \int_0^2 (2-2y)^2 dy = \frac{1}{30} \cdot \frac{2^3}{3} \\ \Rightarrow R &= \frac{\frac{1}{3 \cdot 30} (2^5 + 2^3)}{\frac{2^5}{30^2}} = 10 \left( 1 + \frac{1}{4} \right) = \frac{25}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Kontroll: } R = \frac{25}{2} > \frac{5}{4} \pi^2$$

(Notera att  $\pi^2 \approx 10$  och  $\varphi \approx \sin(\pi x) \sin(\frac{\pi}{2} y)$ )

(7') Se lösningsförslag tenten 190117.