

MATEMATIK

Göteborgs Universitet

Tentamen i Partiella differentialekvationer F3, TMA690

2019-01-17, kl. 8.30-12.30

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosor.

Examinator: Andreas Rosén

Telefonvakt: Henrik Imberg, ankn. 5325

Totalt antal skrivningspoäng är 50. Till dessa läggs bonuspoäng. Betygsgränser: 20 poäng för betyget 3, 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget VG, inklusive bonus.

Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara väl skrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.

Lösningförslag och besked om rättning och granskning lämnas på kursens hemsida.

1. Bestäm $u(x, y)$ som löser ekvationen

$$u'_x + 2xy^2u'_y = x^3y^2$$

och uppfyller $u(0, y) = 0$ för $y > 0$.

(7p)

2. Låt $D \subset \mathbf{R}^2$ vara en öppen och begränsad mängd i planet med slät rand ∂D .

(a) Definiera funktionsrummet $H^1(D)$. Förklara varför $H^1(D)$ är ett Hilbertrum.

(2p)

(b) Låt f vara en kontinuerlig funktion på $\overline{D} = D \cup \partial D$ och antag att $u \in C^2(\overline{D})$ löser variationsproblemet

$$\int_D (\langle \nabla u, \nabla \phi \rangle + u\phi) dx = \int_D f\phi dx$$

för alla $\phi \in H^1(D)$. Härled det randvärdesproblem som u löser, det vill säga en differentialekvation i D och ett randvillkor på ∂D . Visa att variationsproblemet och randvärdesproblemet är ekvivalenta för $u \in C^2(\overline{D})$.

(4p)

(c) Förklara varför randvillkoret i (b) är naturligt.

(1p)

3. Betrakta funktionen $u(t, x)$ som löser $u''_{tt} = \Delta u$ för $t > 0$, $x \in \mathbf{R}^n$, med startvillkoren $u(0, x) = 0$ och

$$u'_t(0, x) = \begin{cases} 1 - |x|^2, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Beräkna $u(t, 0)$ för alla $t > 0$

(a) i dimension $n = 1$,

(3p)

(b) i dimension $n = 2$, och

(3p)

(c) i dimension $n = 3$.

(3p)

Var god vänd!

4. (a) Definiera rummet $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ av distributioner på $\mathbf{R}$. (2p)
 (b) Beräkna derivatan $u' \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ av den distribution som ges av

$$u[\phi] = \int_0^1 (1-x)\phi(x)dx, \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}).$$

Skissa u' . (3p)

- (c) Undersök om $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \sin(nx)$ existerar i distributionsmening och beräkna i så fall gränsvärdet. (3p)
5. (a) Bestäm en Greensfunktion för övre halvplanet

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ; x \in \mathbf{R}, y > 0\},$$

till exempel genom spegling i $y = 0$. (4p)

- (b) Använd denna Greensfunktion för att lösa Dirichletproblemet

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & y > 0, \\ u(x, 0) = 1, & 1 < x < 5, \\ u(x, 0) = 0, & x \leq 1 \text{ eller } x \geq 5. \end{cases}$$

(3p)

6. Låt $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ; 0 < x < \pi, 0 < y < \pi\}$ och $0 < T < \infty$.

- (a) Formulera och bevisa den svaga maximumprincipen för värmelednings-
 ekvationen $u'_t = \Delta u$ på området $D \times (0, T)$. (4p)
- (b) Antag att

$$\begin{cases} u'_t(t, x, y) = \Delta u(t, x, y), & (x, y) \in D, t > 0, \\ u(t, x, y) = 0, & (x, y) \in \partial D, t > 0, \\ 0 \leq u(0, x, y) \leq \sin x \sin y, & (x, y) \in D. \end{cases}$$

Visa att $0 \leq u(t, x, y) \leq e^{-2t} \sin x \sin y$ för alla $(x, y) \in D$ och $t > 0$. (3p)

7. Låt $D \subset \mathbf{R}^2$ vara ett begränsat och enkelt sammanhängande område i planet med slät rand.

- (a) Definiera dubbelskiktspotentialen i D , av en funktion h på ∂D . (1p)
 (b) Ange randvärdena på ∂D av din dubbelskiktspotential i (a). (1p)
 (c) Beskriv algoritmen för att lösa Dirichletproblemet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{i } D, \\ u = f & \text{på } \partial D, \end{cases}$$

med dubbelskiktspotentialer. (3p)

① Karakteristisk ekvation är

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2$$

Lösning som separabel ODE:

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int 2x dx$$

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{y} = C$$

Lämpligt variabelbyte är

$$s = x^2 + \frac{1}{y}$$

$$t = x$$

da de karakteristiska kurvorna de motsvarar $s = \text{konstant}$,

Notera att $(x, y) \mapsto (s, t)$ är invertierbar för $y > 0$.

Kedjeregeln:

$$u'_x = 2x u'_s + 1 \cdot u'_t$$

$$u'_y = -\frac{1}{y^2} u'_s + 0$$

PDEn blir:

$$(2x u'_s + u'_t) + 2xy^2 \left(-\frac{1}{y^2} u'_s \right) = x^3 y^2$$

$$u'_t = x^3 y^2 = t^3 \frac{1}{(s-t^2)^2}$$

$$u(s, t) = \int t^3 \frac{1}{(s-t^2)^2} dt = t^2 \frac{\frac{1}{2}}{s-t^2} - \int \frac{t}{s-t^2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \frac{t^2}{s-t^2} + \frac{1}{2} \ln(s-t^2) + C(s)$$

↑ godtycklig funktion.

$$u(x, y) = \frac{1}{2} x^2 y - \frac{1}{2} \ln y + C\left(x^2 + \frac{1}{y}\right)$$

C bestäms genom att sätta $x=0$:

$$0 = u(0, y) = -\frac{1}{2} \ln y + C\left(\frac{1}{y}\right), \quad \forall y > 0$$

$$\therefore C(s) = -\frac{1}{2} \ln s, \quad \forall s > 0$$

Svar: $u(x, y) = \frac{1}{2} x^2 y - \frac{1}{2} \ln(x^2 y + 1)$

↑ förenkling!

② (a) $H^1(D) := \{u \in L_2(D) ; u_{x_i} \in L_2(D), i=1, \dots, n\}$ ②
 där $u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ är distributionsderivatan, som
 vi kräver är en funktion

$$u_{x_i} \in L_2(D) := \{(\text{Lebesguemätbar}) f: D \rightarrow \mathbb{R} ; \int_D |f(x)|^2 dx < \infty\}$$

Normen $\|u\|_{H^1}$ ges av en skalärprodukt

$$\|u\|_{H^1} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{H^1}} \quad \text{där}$$

$$\langle u, v \rangle_{H^1} := \int_D (\langle \nabla u, \nabla v \rangle + uv) dx.$$

P.g.a detta och att $H^1(D)$ är fullständigt i
 bemärkelsen att varje Cauchy-följd konvergerar
 mot en gränsv funktion i $H^1(D)$ säger vi att $H^1(D)$
 är ett Hilbert rum.

(b) Antag u löser variationsproblemet (V).

Green $\Rightarrow$

$$(*) \int_D f \varphi dx = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \varphi ds + \int_D (-\Delta u + u) \varphi dx, \quad \forall \varphi \in H^1(D).$$

Velj först $\varphi \in C_0^\infty(D)$ som konvergerar snett
 $\hookrightarrow 0$ på ∂D !

mot Diracdeltaet δ_{x_0} , givet $x_0 \in D$.

Detta visar

$$f(x) = \int_D f \delta_{x_0} dx = 0 + \int_D (-\Delta u + u) \delta_{x_0} dx = -\Delta u(x_0) + u(x_0)$$

Da $-\Delta u + u = f$ identiskt i D ger (*):

$$\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \varphi ds = 0, \quad \forall \varphi \in H^1(D).$$

P.s.s. genom att ta $\varphi \rightarrow \delta_{y_0}$, $y_0 \in \partial D$, följer

att $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ identiskt på ∂D .

∴ Randvärdesproblemet blir:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{i } D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{på } \partial D \end{cases}$$

Omvänt, om u löser randvärdesproblemet ger (3)

Green:

$$\begin{aligned} \int_D (\langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle + u \varphi) dx &= \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \varphi dS + \int_D (-\Delta u + u) \varphi dx \\ &= 0 + \int_D f \varphi dx, \text{ så } u \text{ löser } d\phi(V). \end{aligned}$$

(c) Neumanns randvillkor är naturligt då det inte förekommer i definitionen av funktionsrummet $H^1(D)$ för (V).

(3) (a) Enligt d'Alembert formel:

$$\begin{aligned} u(t, 0) &= \frac{1}{2} (u(0, t) + u(0, -t)) + \frac{1}{2} \int_{-t}^t u_t'(0, s) ds \\ &= 0 + \frac{1}{2} \int_{-t}^t (1-s^2) ds \\ &= \int_0^t (1-s^2) ds = t - \frac{t^3}{3} \quad \text{om } t < 1 \end{aligned}$$

Om $t > 1$:

$$u(t, 0) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u_t'(0, s) ds = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{konstant.}$$

(b) Vår lösningsformel är nu

$$\begin{aligned} u(t, 0) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{|x| < t} \frac{u(0, x)}{\sqrt{t^2 - |x|^2}} dx + \frac{1}{2\pi} \iint_{|x| < t} \frac{u_t'(0, x)}{\sqrt{t^2 - |x|^2}} dx \\ &= 0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^t \frac{1-r^2}{\sqrt{t^2-r^2}} 2\pi r dr \\ &= \left[(1-r^2)(-1)\sqrt{t^2-r^2} \right]_0^t - \int_0^t 2r \sqrt{t^2-r^2} dr \\ &= t + \left[\frac{2}{3} (t^2-r^2)^{3/2} \right]_0^t = t - \frac{2}{3} t^3 \quad \text{om } t < 1 \end{aligned}$$

Om $t > 1$:

$$\begin{aligned} u(t, 0) &= \left[-(1-r^2)\sqrt{t^2-r^2} + \frac{2}{3} (t^2-r^2)^{3/2} \right]_0^1 \\ &= t + \frac{2}{3} (t^2-1)^{3/2} - \frac{2}{3} t^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Notera: } \frac{2}{3} (t^2-1)^{3/2} &= \frac{2t^3}{3} \left(1 - \frac{1}{t^2} \right)^{3/2} = \frac{2t^3}{3} - t + O\left(\frac{1}{t}\right) \\ &\text{då } t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

(c) Poissons formel ger:

$$u(t,0) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\iint_{|x|=t} u(0,x) dS \right) + \frac{1}{4\pi t} \left(\iint_{|x|=t} u'_t(0,x) dS \right)$$

$$= 0 + (1-t^2) \quad \text{om } t < 1,$$

dä $u'_t(0,x)$ är konstant på sfären $|x|=t$.

Om $t > 1$ ser vi direkt att $u(t,0) = 0$

Svar: (a) $u(t,0) = \begin{cases} t - t^3/3, & t < 1 \\ 2/3, & t \geq 1 \end{cases}$

(b) $u(t,0) = \begin{cases} t - \frac{2}{3}t^3, & t < 1 \\ t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{2}{3}(t^2-1)^{3/2}, & t \geq 1 \end{cases}$

(c) $u(t,0) = \begin{cases} 1-t^2, & t < 1 \\ 0, & t \geq 1. \end{cases}$

(4) (a) $C_0^\infty(\mathbb{R}) = \{ \text{godtyckligt många gånger deriverbara } \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ sådana att } \varphi(x) = 0 \text{ för } |x| > R \text{ för något } R < \infty \}$.

$D'(\mathbb{R}) = \{ \text{linjära funktionaler } u: C_0^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \text{ som är kontinuerliga} \}$

↪ i betydelsen att $u[\varphi_n] \rightarrow u[\varphi]$

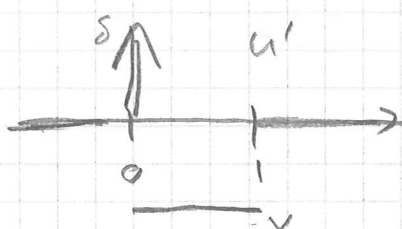
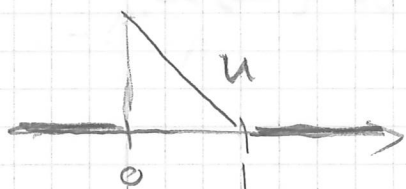
om alla deriverade av $\varphi_n - \varphi \rightarrow 0$ liksom själva φ_n, φ alla är 0 då $|x| > R$ för något $R < \infty$.

(b) Per definition av u' :

$$u'[\varphi] = -u[\varphi'] = -\int_0^1 (1-x)\varphi'(x)dx = -[(1-x)\varphi(x)]_0^1 + \int_0^1 (-1)\varphi(x)dx = \varphi(0) - \int_0^1 \varphi(x)dx$$

Detta visar att

$u' = \delta + v$, där v är funktionen $v(x) = \begin{cases} -1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases}$



(C) För fix $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$:

⑤

$$\int n^3 \sin(nx) \varphi(x) dx = - \int (-n^2 \cos nx) \varphi'(x) dx$$

$$= - \int (n \sin nx) \varphi''(x) dx = \int (-\cos nx) \varphi^{(3)}(x) dx$$

$$= \int \frac{1}{n} \sin(nx) \varphi^{(4)}(x) dx$$

efter 4 partiellintegrationer, så

$$\left| \int n^3 \sin(nx) \varphi dx \right| \leq \frac{1}{n} \underbrace{\int |\varphi^{(4)}(x)| dx}_{< \infty} \rightarrow 0, \text{ då } n \rightarrow \infty$$

Svar: (b) $u' = \delta + v$, $v = \begin{cases} -1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{för } x > 1 \end{cases}$

(c) $n^3 \sin(nx) \rightarrow 0$ svegt

⑤ (a) Laplaces fundamentallösning för $\mathbb{R}^2$ är:

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

Fixera $(x_0, y_0) \in D$, dvs $y_0 > 0$.

Vi söker Greensfunktion

$$G = \Phi(x - x_0, y - y_0) + g_{x_0, y_0}(x, y), \text{ där}$$

$$\Delta g_{x_0, y_0} = 0 \text{ i } D \text{ och } G = 0 \text{ på } \partial D$$

Genom spegling, ansätt

$$g_{x_0, y_0}(x, y) = c \cdot \Phi(x - x_0, y + y_0)$$

$$\text{Uppenbarligen är } \Delta g_{x_0, y_0} = 0$$

i D , välj konstanten c s.s.

$$\Phi(x - x_0, -y_0) + c \Phi(x - x_0, y_0) = 0$$

för alla $x \in \mathbb{R}$.

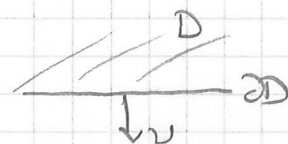
Det är klart att $c = -1$ duger, så

$$G = \frac{1}{4\pi} \ln((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) - \frac{1}{4\pi} \ln((x - x_0)^2 + (y + y_0)^2).$$

(b) Greens andra formel:

$$\int_{\partial D} \left(u \frac{\partial G}{\partial n} - \underbrace{G \frac{\partial u}{\partial n}}_{=0} \right) ds = \int_D \left(u \underbrace{(\Delta G)}_{=\delta_{x_0, y_0}} - \underbrace{\Delta u \cdot G}_{=0} \right) dx$$

$$\Rightarrow u(x_0, y_0) = \int_{\partial D} u \left(-\frac{\partial G}{\partial n} \right) dx$$



$$= -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} - \frac{y+y_0}{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2} \right) \Big|_{y=0} u(x,0) dx \quad (6)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_1^5 \frac{y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2} dx$$

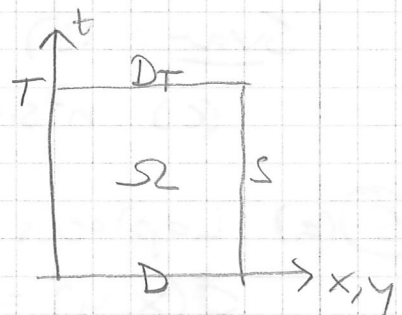
$$= \frac{1}{\pi} \left[\arctan \frac{x-x_0}{y_0} \right]_1^5 = \frac{1}{\pi} \left(\arctan \frac{5-x_0}{y_0} - \arctan \frac{1-x_0}{y_0} \right)$$

Svar: (a) $G = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}$

(b) $u(x,y) = \frac{1}{\pi} \left(\arctan \frac{5-x}{y} - \arctan \frac{1-x}{y} \right)$

(6) (a) Sats: Om $u \in C^2(\bar{\Omega})$

på $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega = D \cup S \cup D_T$



och $u'_t = \Delta u$ på Ω , så antar u ett maxvärde på D (start data) eller på ∂S (rendata).

Beweis: Tag $\varepsilon > 0$ och betrakta hjälpfunktionen

$$v(t,x) = u(t,x) - \varepsilon \cdot t$$

1 maxpunkter för v i det inre Ω och bland slutdata

D_T vet vi att:

$$v'_t \geq 0 \text{ och } \Delta v \leq 0$$

$$\Rightarrow u'_t = \Delta u \quad \text{motsträda.}$$

$$v'_t + \varepsilon \geq \varepsilon \quad \Delta v \leq 0$$

vis maxpunkter måste alltså ligga på D eller S .

För u drar vi slutsatsen:

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\bar{\Omega}} v + \varepsilon \cdot T \leq \max_{D \cup S} v + \varepsilon T$$

$$\leq \max_{D \cup S} u + \varepsilon T$$

Låter vi $\varepsilon \rightarrow 0$ följer slutsatsen.

(b) $v_1 = -u$ löser $v_{1,t} = \Delta v_1$ och $v_1 \leq 0$ på $S \cup D$
 $\Rightarrow u(t, x, y) = -v_1(t, x, y) \geq 0$ i Ω . (7)

$v_2 = u - e^{-2t} \sin x \sin y$ löser $v_{2,t} = \Delta v_2$ och
 $v_2 \leq 0$ på $S \cup D$

$\Rightarrow u(t, x, y) \leq e^{-2t} \sin x \sin y$ i Ω .

Detta gäller för alla $T > 0$, vilket visar uppskattningen.

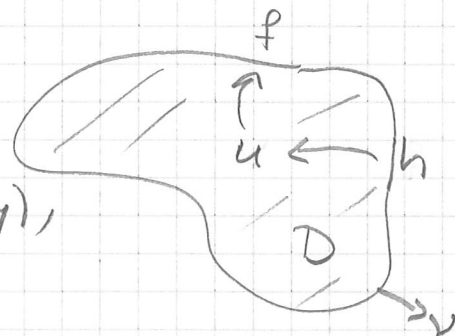
(7) (a) Givet $h: D \rightarrow \mathbb{R}$ är

$$u(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} h(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \ln|y-x| ds(y),$$

$x \in D$,

dubbelshiftpotentiellen i D .

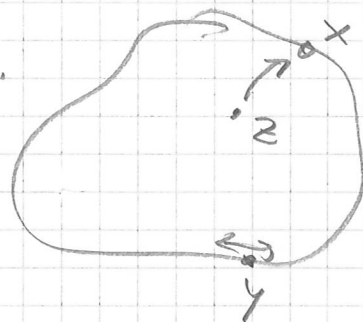
(Definitionen i DC innefattar ett minustecken.)



(b) För $x \in \partial D$ är

$$\lim_{\substack{z \rightarrow x \\ z \in D}} u(z) = \frac{1}{2} h(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} h(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \ln|y-x| ds(y)$$

Se föreläsningsskriftningar/boken.



(c) Orsatt densitet h är

$\Delta u = 0$ i D genom derivering
 under integraltecknet.

Givet Dirichlet datum f löser vi
 integralekvationen

$$\frac{1}{2} h(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} h(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \ln|y-x| ds(y) = f(x), x \in \partial D,$$

för h . Dubbelshiftpotentiellen u i D är

detta h , är Dirichletproblemets lösning enl. (b).

