TMA690
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Partiella differentialekvationer F3 / TM3
Datum: 2013-12-19, kl. 8:30 - 12:30
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: Dawan Mustafa, tel. 070-3088304

---

1. Lös ekvationen $(1+x^2)u_x + u_y = 0$, där $u(0,y) = y^5$. (6p)

2. Låt D vara ett enkelt sammanhängande område i planet och låt $u = u(t,x,y)$ vara lösning till vågekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, \ (x,y) \in D, \ t \geq 0,$$

sådan att $u(t,x,y) = 0$ på ∂D för alla $t \geq 0$. Låt

$$E(t) = \int_D \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dxdy$$

och visa att $E(t) = E(0)$ för alla $t \geq 0$. (6p)

3. a) Det finns en konstant a så att $(x^2+x)\delta' = a\delta$ där δ är Dirac-funktionen. Bestäm a. (4p)
b) Formulera Weierstrass approximationssats och förklara med ord huvudidén i beviset. (4p)

4. Låt $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ vara ett begränsat område och låt g vara kontinuerlig och begränsad sådan att $\int_{\partial\Omega} g\, ds = 0$. Betrakta variationsproblemet: Finn $u \in V$ så att $a(u,v) = L(v)$ för alla $v \in V$, där

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dxdy, \ L(v) = \int_{\partial\Omega} gv \, ds$$

och

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : \int_\Omega v \, dxdy = 0\}.$$

a) Visa att det existerar en entydig lösning u till variationsproblemet genom att åberopa lämplig sats och verifiera antagandena i denna sats. (6p)
b) Antag att $u \in C^2(\bar{\Omega})$ löser variationsproblemet. Visa att u också löser

$$\Delta u = 0 \text{ i } \Omega,$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ på } \partial\Omega,$$
$$\int_\Omega u \, dx = 0.$$

(3p)

6. Betrakta problemet

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx} + u_{yy},\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ &u(0, x, y) = f(x, y), \\ &u_t(0, x, y) = g(x, y). \end{aligned}$$

Lösningen ges av (nedan är $\mathbf{x} = (x, y)$ och $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta)$)

$$u(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{|\boldsymbol{\xi}-\mathbf{x}|\le t} \frac{f(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi}}{\sqrt{t^2 - |\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}|^2}} + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{|\boldsymbol{\xi}-\mathbf{x}|\le t} \frac{g(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi}}{\sqrt{t^2 - |\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}|^2}}. \tag{1}$$

a) Utgå från denna formel och använd Hadamard's method of descent för att härleda d'Alemberts formel i en rumsdimension. (6p)
b) Skriv ned Poissons formel för vågekvationen i tre rumsdimensioner och beskriv kortfattat den väsentliga skillnaden mellan denna formel och (1) som innebär att Huygens princip gäller i tre rumsdimensioner men inte i två rumsdimensioner. (2p)

7. Låt $D \subset \mathbb{R}^2$ och definiera $u \in C(D)$ så att

$$u(x_0) = \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial\Omega} u ds,$$

för varje disk $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| < r\}$ sådan att $\bar{\Omega} \subset D$. Visa att u är harmonisk i D. Motivera väl. (7p) S

8. Låt

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4t}\phi(y)\, dy,$$

där $\phi = \phi(x)$ är begränsad och kontinuerlig för $-\infty < x < \infty$. Alltså u är en lösning till värmeledningsekvationen. Visa att $\lim_{t\to 0} u(t, x) = \phi(x)$ för alla x. (6p)

Betygsgränser: 20-29 p ger betyget 3; 30-39 p ger betyget 4; 40-50 p ger betyget 5.

Lycka till!/HA

2013-12-19.

1) $(1+x^2)u_x + u_y = 0 \quad , \quad u(0,y) = y^5.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow y = \arctan x + C$$

Låt $\begin{cases} \xi = y - \arctan x \\ \eta = x \end{cases}$

Vi har $u_x = u_\xi \left(\frac{-1}{1+x^2} \right) + u_\eta$

$$u_y = u_\xi$$

$$\Rightarrow (1+x^2)u_x + u_y = (1+x^2)u_\eta = 0 \Rightarrow u_\eta = 0$$

Alltså $u = f(\xi)$, f godtycklig.

$$u(x,y) = f(y - \arctan x)$$

$$u(0,y) = f(y) = y^5 \Rightarrow f(t) = t^5.$$

Alltså $u(x,y) = (y - \arctan x)^5.$

2) $\partial_t (u_t^2 + u_x^2 + u_y^2) = 2u_t u_{tt} + 2u_x u_{xt} + 2u_y u_{yt} =$

$$= 2u_t \underbrace{(u_{tt} - u_{xx} - u_{yy})}_{0} + 2u_t u_{xx} + 2u_t u_{yy} + 2u_x u_{xt} + 2u_y u_{yt} =$$

$$= 2\nabla \cdot (u_t u_x , u_t u_y).$$

2) Vi har alltså

$$\frac{\partial}{\partial t} E(t) = 2 \int_D \nabla \cdot (u_t u_x, u_t u_y)\, dx dy = [\text{Gauss sats}] =$$

$$= 2 \int_{\partial D} (u_t u_x, u_t u_y) \cdot n \, ds = 0 \text{ ty}$$

$u_t = 0$ på ∂D då $u(t,x,y) = 0$ på ∂D.

Alltså $E(t) = E(0)$ $\forall t \geq 0$.

3) a) Def. av multiplikation och derivata av distribution ger

$$((x^2+x)\delta')[\phi] = \delta'[(x^2+x)\phi] = -\delta[((x^2+x)\phi)'] =$$

$$= -\delta[(2x+1)\phi + (x^2+x)\phi'] = -\phi(0).$$

Alltså är $a = -1$.

b) Se boken.

4) a) Satsen det gäller är Lax-Milgram.

För att verifiera antagandena i denna sats använd Poincarés olikhet i H^1, Cauchy-Schwarz olikhet samt spårolikheten.

4) b) Då $u \in C^2(\Omega)$ kan vi använda Greens första identitet som ger

$$a(u,v) = L(v) \Rightarrow \int_\Omega -v \Delta u \, dxdy + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds \overset{(*)}{=} \int_{\partial\Omega} gv \, ds. \; \forall v \in V.$$

Speciellt har vi för $v \in H_0^1 \cap V$ att

$$\int_\Omega v \Delta u \, dxdy = 0 \Rightarrow \Delta u = 0 \text{ i } \Omega.$$

Då $\Delta u = 0$ i Ω har vi från $(*)$ att

$$\int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_{\partial\Omega} gv \, ds \quad \forall v \in V.$$

Då det finns gott om $v \neq 0$ på $\partial\Omega$ följer att

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g. \text{ på } \partial\Omega.$$

Villkoret $\int_\Omega u \, dxdy = 0$ följer då $u \in V$.

b) Vi har $$\iint_{(\xi-x)^2+\eta^2<t^2} \frac{f(\xi,\eta) \, d\xi d\eta}{\sqrt{t^2-(\xi-x)^2-\eta^2}} = \int_{x-t}^{x+t} d\xi \, f(\xi) \int_{-\sqrt{t^2-(\xi-x)^2}}^{\sqrt{t^2-(\xi-x)^2}} d\eta \Big/ \sqrt{t^2-(\xi-x)^2-\eta^2}$$

Här har vi använt att f är oberoende av η. samt utan att förlora i generalitet låtit $y=0$.

6, Nu gäller att

$$\int_{-\sqrt{\ }}^{\sqrt{\ }} \frac{d\eta}{\sqrt{t^2-(\xi-x)^2-\eta^2}} = \left[\arcsin \frac{\eta}{\sqrt{t^2-(\xi-x)^2}}\right]_{-\sqrt{\ }}^{\sqrt{\ }} = \pi.$$

$$\Rightarrow \int_{x-t}^{x+t} d\xi\, f(\xi) \int_{-\sqrt{\ }}^{\sqrt{\ }} \frac{d\eta}{\sqrt{t^2-(\xi-x)^2-\eta^2}} = \pi \int_{x-t}^{x+t} f(\xi)\, d\xi.$$

Alltså $u(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{x-t}^{x+t} f(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(\xi)\, d\xi =$

$$= \frac{1}{2}\left(f(x+t) + f(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(\xi)\, d\xi.$$

b) se boken

7, Detta är uppgift 4.9 i boken.

8, Se material på hemsidan om värmeledningsekvationen.