TMA690
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Partiella differentialekvationer F3 / TM3
Datum: 2013-04-04, kl. 8:30 - 12:30
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: Anders Martinsson, tel. 070-3088304

==

1. Finn den allmänna lösningen $u = u(x, y)$ till

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2xy^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

(6p)

2. Finn u som löser $u_{tt} = u_{xx} + \cos x,\ u(0, x) = \sin x,\ u_t(0, x) = 1 + x.$ (6p)

3. Låt $u = u(x, y)$ vara lösning till

$$\Delta u = -2 \text{ i } D = \{(x, y) : |x| + |y| < 1\},$$
$$u = 0 \text{ på } \partial D.$$

Visa att $-\frac{1}{4} \leq u(x, y) \leq \frac{1}{2}$ för $(x, y) \in \bar{D}$.

(6p)

4. Vad blir derivatan av den distribution som ges av

$$u[\Phi] = \int_0^\infty \Phi(x) \cosh x \, dx,$$

och hur skiljer den sig från den vanliga derivatan av $\cosh x$? (5p)

5. Låt $u_h \in V_h$ vara lösning till variationsproblemet $< u_h, v >=< f, v >$, $\forall v \in V_h$, och låt $u \in V$ vara lösning till $< u, v >=< f, v >$, $\forall v \in V$, där $V_h \subset V$. Visa att

$$\|u - u_h\|_V \leq \|u - v\|_V \ \ \forall v \in V_h,$$

där $\| \cdot \|$ är normen associerad till skalärprodukten $< \cdot, \cdot >$ på V. (6p)

6. a) Visa att problemet

$$\Delta u = 0 \text{ i } D = \{r < 1, -\pi \leq \theta \leq \pi\},$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \sin^2 \theta \text{ på } \partial D,$$

saknar lösning. (3p)

b) Visa att problemet $u_{xx} = u_t,\ t < 0,\ u(0, x) = \phi(x)$, (dvs värmeledningsekvationen bakåt i tiden) inte är välställt (well posed). Ledning: Betrakta $u_n(t, x) = g_n(x) f_n(t)$ för lämpliga $g_n(x)$ och $f_n(t)$. (6p)

7. Låt u vara lösning till vågekvationen $u_{tt} = u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$. Antag att $u \in C^2(\mathbb{R}^4)$ och att $u(0,x,y,z)$ och $u_t(0,x,y,z)$ är noll då $x^2+y^2+z^2 > R^2$ för något $R > 0$. Visa att det finns en konstant $C > 0$ (som är oberoende av t, x, y och z) så att

$$t\,|u(t,x,y,z)| < C,$$

för alla t, x, y, z. (6p)

8. Formulera och bevisa Poincarés olikhet för $H_0^1(\Omega)$. (6p)

Betygsgränser: 20-29 p ger betyget 3; 30-39 p ger betyget 4; 40-50 p ger betyget 5.

Lycka till!/HA

TMA690 20130404.

1) $u_x + 2xy^2 u_y = 0$

Karakteristiska kurvor: $\frac{dy}{dx} = 2xy^2$

$\Rightarrow \frac{dy}{y^2} = 2x\,dx$

$\Rightarrow -\frac{1}{y} = x^2 - C$

Alltså låt $\begin{cases} \xi = x \\ \eta = x^2 + \frac{1}{y} \end{cases}$

~~Då låt~~ $\cancel{u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + 2x u_\eta}$ $\cancel{u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y =}$

Då är $u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + 2x u_\eta$

$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = \frac{-1}{y^2} u_\eta$

$\Rightarrow u_x + 2xy^2 u_y = u_\xi + 2x u_\eta + 2xy^2\left(\frac{-1}{y^2} u_\eta\right) = u_\xi$

Alltså $u_\xi = 0 \Rightarrow u = f(\eta) = f\left(x^2 + \frac{1}{y}\right)$ där

f godtycklig C^1 funktion.

2) $u_{tt} = u_{xx} + \cos x$, $u(0,x) = \sin x$, $u_t(0,x) = 1+x$.

Vi vill använda d'Alemberts formel. För att göra det behöver vi ha homogen vågekvation.

Låt $u = v + \cos x \Rightarrow u_{tt} = v_{tt}$ och $u_{xx} + \cos x = v_{xx} - \cos x + \cos x$
$= v_{xx}$

Alltså $v_{tt} = v_{xx}$

$v(0,x) = u(0,x) - \cos x = \sin x - \cos x$

$v_t(0,x) = u_t(0,x) = 1+x$.

d'Alemberts formel ger

$$v(t,x) = \frac{1}{2}\left[\sin(x-t) - \cos(x-t) + \sin(x+t) - \cos(x+t) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} 1+\tilde{x}\, d\tilde{x} = \sin x \cos t - \cos x \cos t +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\tilde{x} + \frac{\tilde{x}^2}{2}\right]_{x-t}^{x+t} = \sin x \cos t - \cos x \cos t + t + xt.$$

Alltså $u = t + xt + \sin x \cos t - \cos x \cos t + \cos x$.

3,

$\Delta u = -2$ i $D = \{(x,y) : |x|+|y| < 1\}$

$u = 0$ på ∂D.

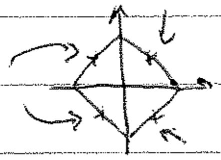
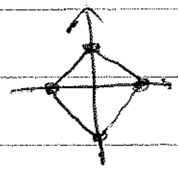
Önskar applicera maxprincipen, alltså vill vi ha harmonisk funktion. Låt $v = u + \frac{1}{2}(x^2+y^2)$,

så att $\Delta v = \Delta u + 2 = -2+2 = 0$

$v = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ på ∂D.

v harmonisk och maxprincipen ger att max och min av antas på randen.

Max av $\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ på ∂D är $\frac{1}{2}$ och min är $\frac{1}{4}$.

(min inträffar i ) (max inträffar i )

$$\max u = \max\Big(v - \underbrace{\tfrac{1}{2}(x^2+y^2)}_{\geq 0}\Big) \leq \max v = \frac{1}{2}$$

$$\min u = \min\Big(v - \underbrace{\tfrac{1}{2}(x^2+y^2)}_{\leq \frac{1}{2}}\Big) \geq \min v - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.$$

4) Derivatan ges av

$$u'[\phi] = -u[\phi'] = -\int_0^\infty \phi'(x)\cosh x\,dx =$$

$$= -\Big[\phi(x)\cosh x\Big]_0^\infty + \int_0^\infty \phi(x)\sinh x\,dx =$$

$$= +\phi(0) + \int_0^\infty \phi(x)\sinh x\,dx.$$

Derivatan skiljer sig pga termen $\phi(0)$.

5) Vi har $\langle u_h, v\rangle = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in V_h$

$$\langle u, v\rangle = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in V$$

$$\Rightarrow \quad \langle u_h - u, v\rangle = 0 \quad \forall v \in V_h.$$

Vi har $\|u-u_h\|^2 = \langle u-u_h, u-u_h\rangle = [\text{Låt } v \in V_h] =$

$$= \langle u-u_h, u-v\rangle + \underbrace{\langle u-u_h, \underbrace{v-u_h}_{\in V_h}\rangle}_{=0} =$$

$$= \langle u-u_h, u-v\rangle \leq [\text{Cauchy-Schwarz}] \leq \|u-u_h\|\,\|u-v\|$$

$$\Rightarrow \quad \|u-u_h\| \leq \|u-v\| \quad \forall v \in V_h.$$

6) a)

$\Delta u = 0$ i D

Greens första identitet ger med $v=1$, $u=u$,

$$\iint_D 1\cdot\Delta u + 0\cdot\nabla u \, dx = \int_{\partial D} 1\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma$$

Då $\Delta u = 0$ är V.L. $= 0$ men om $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r} = \sin^2\theta$ så

är H.L. > 0 vilket leder till motsägelse.

b) Låt $u_n = \frac{\sin nx}{n}\cdot e^{-n^2 t}$, då löser u_n

$u_{xx} = u_t$ för alla n.

Vi har att $u_n(0,x) = \frac{\sin nx}{n} \to 0$ likformigt då $n \to \infty$.

$u \equiv 0$ är lösning då $u(0,x) = 0$. Om problemet

välställt så ska alltså $|u_n(t,x) - 0|$ vara litet

för små $|t|$ då n är stort. Nu gäller dock

att för godtyckligt $t<0$ så $u_n(t,x) \to \infty$ då $n \to \infty$, alltså problemet ej välställt.

7)

Poissons formel ger med $u(0,x) = \phi_0$, $u_t(0,x) = \phi_1$,

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{t} \int_{|\xi - x| = t} \phi_0(\xi)\, d\sigma \right] + \frac{1}{4\pi t} \int_{|\xi - x| = t} \phi_1(\xi)\, d\sigma.$$

Vi har att $\displaystyle \frac{1}{4\pi t} \int_{|\xi - x| = t} \phi(\xi)\, d\sigma = \frac{t}{4\pi} \int_{|\xi| = 1} \phi(x + \xi t)\, d\sigma.$ $(*)$

Alltså $\displaystyle u(t,x) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\xi|=1} \phi_0(x + \xi t)\, d\sigma + \frac{t}{4\pi} \int_{|\xi|=1} \xi \cdot \nabla \phi_0(x + \xi t)\, d\sigma$

$$+ \frac{t}{4\pi} \int_{|\xi|=1} \phi_1(x + \xi t)\, d\sigma.$$

$$\overset{|\xi|=1}{\Rightarrow} \quad |u| \le Ct \int_{|\xi|=1} |\phi(x + \xi t)|\, d\sigma, \quad \text{där } |\phi| \ge |\nabla \phi_0|,\ |\phi| \ge |\phi_1|,\ |\phi| \ge |\phi_0|.$$

ϕ har här egenskapen att $\cancel{\phi \ne 0}$ $\phi(x) = 0$ då $|x| > R$.

Använd $(*)$ igen, vi får

$$|u| \le \frac{C}{t} \int_{|\xi - x| = t} |\phi(\xi)|\, d\sigma = \frac{C}{t} \int_{E := \{\xi : |\xi - x| = t\} \cap \{\xi : |\xi| \le R\}} |\phi(\xi)|\, d\sigma \le$$

$$\le \left[E \text{ kompakt och } |\phi| \le C \text{ på } E \right] \le \frac{C}{t} \int_E d\sigma \le$$

$$\le \left[\int_E d\sigma \le C,\ \text{där } C \text{ oberoende av } t \text{ ty } |\xi| \le R \right] \le \frac{C}{t}.$$