TMA690
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Partiella differentialekvationer F3 / TM3
Datum: 2012-12-19, kl. 14:00 - 18:00.
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: Magnus Önnheim, tel. 070-3088304
==

1. Finn den allmänna lösningen $u = u(x, y)$ till

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

(5p)

2. a) Antag att u är en harmonisk funktion i disken $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 2\}$ och att $u = 3\sin 2\theta + 1$ då $|x| = 2$. (θ är vinkeln i polära koordinater). Vad är max av u i $\bar{D}$ och vad är värdet av u i origo? (2+3p)
b) Om $\mathbf{x} = (x, y, z)$ så låt $\mathbf{x}^* = (x, y, -z)$. Varför kan inte

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} + \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^*|}$$

vara Greens funktion för området $\{(x, y, z) : z > 0\}$? (2p)

3. Betrakta problemet $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $t \geq 0$, $u(0, x, y, z) = f(x, y, z)$, $u_t(0, x, y, z) = g(x, y, z)$.
a) Använd Poissons formel för att finna u i fallet då $f = 0$ och $g = y + z$. (4p)
b) Antag att $f = 0$ och $g = g(x, y)$, dvs. g är oberoende av z. Använd "Hadamard's method of descent" och härled Poissons formel i två rumsdimensioner i detta fall. (4p)

4. a) Genom $u[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t, t)dt$ definieras en distribution i $\mathbb{R}^2$. Visa att u satisfierar $\partial u/\partial x_1 + \partial u/\partial x_2 = 0$. (4p)
b) Låt V vara ett Hilbertrum och antag att V_h är ett delrum till V. Antag att $u \in V$ och $u_h \in V_h$ uppfyller $< u - u_h, v >= 0$, $\forall v \in V_h$. Visa att detta innebär att $\|u - u_h\| \leq \|u - v\|$, $\forall v \in V_h$. Här är $< \cdot, \cdot >$ skalärprodukten på V och $\| \cdot \|$ den associerade normen. (4p)

5. Låt D vara ett begränsat enkelt sammanhängande område i planet med slät rand ∂D och utåtriktad enhetsnormal n. Visa att den enda lösningen u till

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u^3 = \frac{\partial u}{\partial t},\ (x, y) \in D,\ t \in [0, T] \\
&\frac{\partial u}{\partial n} + u = 0 \text{ för } (x, y) \in \partial D,\ t \in [0, T] \\
&u(0, x, y) = 0 \text{ för } (x, y) \in D
\end{aligned}$$

är $u = 0$. (6p)

6. Låt $u = u(t, x)$ vara lösning till vågekvationen $u_{tt} = u_{xx}$ för $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ sådan att u har begränsade andraderivator. Låt

$$v(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/4t} u(s, x)\, ds.$$

a) Visa att $v(t, x)$ löser värmeledningsekvationen $v_t = v_{xx}$. (4p)
b) Visa att $\lim_{t\to 0} v(t, x) = u(0, x)$. (4p)

7. Formulera och bevisa Lax-Milgrams sats (existens och entydighet är tillräckligt). (8p)

Betygsgränser: 20-29 p ger betyget 3; 30-39 p ger betyget 4; 40-50 p ger betyget 5.

/HA

1, Sök kanonisk form. Den associerade matrisen är

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$ med egenvärdena $\lambda = 0$ och $\lambda = 5$. Egenvektorer

är $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Låt $$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x + y \\ x + 2y \end{bmatrix}$$

Vi har då

$$u_x = u_\xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + u_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} = u_\xi (-2) + u_\eta \cdot 1, \text{ samt}$$

$$u_{xx} = 4u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

$$u_{xy} = -2u_{\xi\xi} - 3u_{\xi\eta} + 2u_{\eta\eta}$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta}$$

Alltså $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} = \ldots = 25u_{\eta\eta}$.

Alltså $u_{\eta\eta} = 0 \Rightarrow u_\eta(\xi,\eta) = f(\xi) \Rightarrow u(\xi,\eta) = \eta f(\xi) + g(\xi)$,

dvs. $u(x,y) = (x+2y) f(-2x+y) + g(-2x+y)$, där

$f, g \in C^2(\mathbb{R})$.

2a) Maximumprincipen ger $\max_{\bar{D}} u = \max_{\partial D} u = \max_{\theta} (3\sin 2\theta + 1) = 4$.

Medelvärdessatsen ger $u(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (3\sin 2\theta + 1)\, d\theta = 1$.

2 b) Ty $G \neq 0$ på randen av området, dvs. då $z=0$.

3, a) Poissons formel ger (då $f=0$)

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi t} \int_{|\xi - x| = t} g(\xi)\, d\sigma.$$

Med sfäriska koordinater har vi $\begin{cases} \xi_1 = x + t\sin\theta\cos\varphi \\ \xi_2 = y + t\sin\theta\sin\varphi \\ \xi_3 = z + t\cos\theta \end{cases}$

Vi får alltså

$$u = \frac{1}{4\pi t} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (y + t\sin\theta\sin\varphi + z + t\cos\theta)\, t^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

två termer ger 0

$$= \frac{t}{4\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (y+z)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = t(y+z).$$

3, b) Se boken.

4) $\frac{\partial u}{\partial x_1} = -u\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \phi(t,t)}{\partial x_1}\, dt$, $\frac{\partial u}{\partial x_2} = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \phi(t,t)}{\partial x_2}\, dt$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \phi(t,t)}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi(t,t)}{\partial x_2}\right) dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}\phi(t,t)\, dt =$$

$$= -\left[\phi(t,t)\right]_{-\infty}^{\infty} = 0. \quad \text{V.S.B.}$$

5) Vi har $\frac{d}{dt}\int_D u^2\,dxdy = \int_D 2u_t u\,dxdy = \left[\begin{matrix}\text{använd}\\ \text{ekvationen}\end{matrix}\right]$

$$= 2\int_D u[u_{xx}+u_{yy}-u^3]\,dxdy = 2\int_D u\Delta u - u^4\,dxdy =$$

$$= [\text{Greens första identitet}] = 2\left[\int_{\partial D} u\frac{\partial u}{\partial \nu}\,d\sigma - \int_D \nabla u\cdot\nabla u\,dxdy\right] -$$

$$- 2\int_D u^4\,dxdy = \left[\begin{matrix}\text{randvillkoret}\\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = -u\end{matrix}\right] = 2\left[-\int_{\partial D} u^2\,d\sigma - \int_D |\nabla u|^2\,dxdy -\right.$$

$$\left. - \int_D u^4\,dxdy\right] \leq 0.$$

$$\Rightarrow \int_D u^2(t,x,y)\,dxdy \leq \int_D \underbrace{u^2(0,x,y)}_{=0}\,dxdy = 0.$$

Då $u^2 \geq 0$ är alltså $u \equiv 0$.

V.S.B.

6) $v(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/4t}\,u(s,x)\,ds$

Då u har begränsade andraderivator kan speciellt u inte växa mer än kvadratiskt i t och vi kan därmed derivera under integraltecknet.

6, forts.

Vi har $v_{xx} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/4t} u_{xx}(s,x)\,ds = [u_{xx} = u_{tt}] =$

$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/4t} u_{ss}(s,x)\,ds = [\text{partiell integration}] =$

$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left\{ \underbrace{\left[e^{-s^2/4t} u_s \right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0 \text{ enl. förut.}} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2s}{4t} e^{-s^2/4t} u_s\,ds \right\} =$

$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left\{ \underbrace{\left[\frac{s}{2t} e^{-s^2/4t} u \right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0 \text{ enl. förut.}} + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2s^2}{8t^2} e^{-s^2/4t} u - \frac{1}{2t} e^{-s^2/4t} u \right) ds \right\}$

Vidare har vi $v_t = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left(-\frac{1}{2}\right) t^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/4t} u\,ds + \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s^2}{4t^2} e^{-s^2/4t} u\,ds.$

Alltså $v_t = v_{xx}$. V.S.B.

b) Med variabelsubstitutionen $p = \frac{s}{\sqrt{t}}$ har vi

$v(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/4t} u(s,x)\,ds = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2/4} u(p\sqrt{t}, x)\,dp.$

Beviset följer nu ~~[illegible]~~ av beviset i utdelat material

"Sats om fundamentallösningen till värmeledningsekvationen".