

**TMA 690 Partiella differentialekvationer F3, 2001-10-26**

Telefonjour/rond: Richards Grzibovski, tel. 0740-459022

Hjälpmiddel: Beta och CTH-typgodkänd kalkylator.

=====

1. a) Härled en lösning  $u$  till ekvationen  $-\Delta u = \delta$  i  $R^3$ , där  $\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(x)$ ,

$$\delta_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi\epsilon^3} & \text{för } |x| < \epsilon \\ 0 & \text{för } |x| > \epsilon. \end{cases}$$

b) Visa hur lösningen i a) kan utnyttjas till att lösa  $-\Delta u = f$  för godtycklig funktion  $f$ .

c) Låt  $f$  vara funktionen som är  $= \frac{3}{4\pi}$  i  $\{x : |x| < 1\}$  och  $= 0$  för övrigt, och beräkna lösningen  $u(x)$  enligt b) i någon (valfri) punkt i rummet, alternativt, undersök huruvida lösningen i a) multiplicerad med  $e^{-|x|}$  ger en lösning till ekvationen  $-\Delta u + u = \delta$ . (10p)

2. Formulera en rand-elementmetod för (approximativ) lösning av problemet

$$-\Delta u = 0 \quad \text{i } \Omega, \quad u = g \quad \text{på } \partial\Omega,$$

där  $\Omega$  är ett begränsat område i  $R^3$ , och  $\partial\Omega$  är randen till  $\Omega$ . (10p)

3. a) Formulera cG1 metoden för tidsdiskretisering av  $\dot{u} + au = f$  för  $t > 0$ , med givet begynnelsevillkor  $u(0) = u_0$ .

b) Vilket numeriskt problem kan uppstå om  $a$  är stort i förhållande till tidssteget.

c) Vad menas med residualfelet och hur figurerar detta i en a posteriori feluppskattning för metoden.

d) Skissera huvuddragen i härledningen av en sådan uppskattning.

e) Spelar tecknet på  $a$  någon roll i sammanhanget, t.ex. för (dual)problemets stabilitetsegenskaper? (10p)

4. a) Betrakta "Schrödingerekvationen"

$$i\dot{u} - \Delta u = 0 \quad \text{i } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{på } \partial\Omega,$$

där  $i = \sqrt{-1}$  och  $u = u_1 + iu_2$ . Visa (genom att multiplicera med  $\bar{u} = u_1 - iu_2$  och betrakta imaginärdelarna) att kvantiteten  $\int_\Omega |u|^2$  (dvs "totalsannolikheten") är tidsberoende.

b) Betrakta motsvarande "egenvärdesproblem", dvs att hitta tal  $\lambda$  och motsvarande lösningar  $u \neq 0$  sådana att

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{i } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{på } \partial\Omega.$$

Visa att sådana  $\lambda$  måste vara  $> 0$ , och ange sambandet mellan  $\|u\|$  och  $\|\nabla u\|$  för motsvarande egenfunktioner  $u$ .

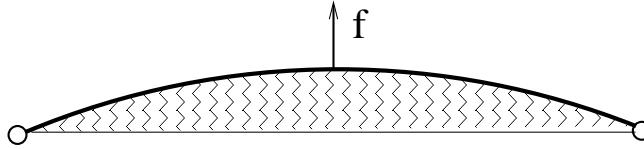
Vilket är det minsta värde på konstanten  $C$  för vilken olikheten  $\|u\| \leq C \|\nabla u\|$  kan tänkas gälla för alla funktioner  $u$  sådana att  $u = 0$  på  $\partial\Omega$ , uttryckt i minsta egenvärdet  $\lambda_1$ ? (10p)

Var god vänd !

5. Betrakta problemet

$$u'''' = f - u \quad \text{för } 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, u(1) = 0, u''(0) = 0, u''(1) = 0.$$

- a) Ge en fysikalisk tolkning av ekvation och randvillkor, med ledning av figuren.  
b) Formulera en cG1 finit elementmetod för problemet, utgående från följande



ekvivalenta *system* av ekvationer:

$$\begin{cases} u'' - v = 0 \\ v'' + u = f. \end{cases}$$

Ange speciellt hur nodvärdesvektorn  $U$  kan beräknas från lastvektorn  $F$  uttryckt i tillhörande styvhets- och massmatriser.

- c) Härled en stabilitetsuppskattning för lösningen  $u$  och  $v$  (alternativt motsvarande diskreta lösning  $U$  och  $V$ ) i termer av  $f$ . Tips: Multiplicera ekvationerna med  $v$  resp.  $u$ . Uppskattningen  $\|v\| \leq C \|v'\|$  som i uppgift 4, kan också bli användbar. (10p)

Lycka till / K.E.

**TMA 690 Partiella differentialekvationer F3, 2001-10-26**

1. a) Räkna i polära koordinater med  $r = |x|$ , och sök lösning  $u = u(r)$  sådan att  $\Delta u = r^{-2}(r^2 u')' = -\delta_\epsilon$ , dvs

$$r^2 u' = \int r^2 (-\delta_\epsilon) = \begin{cases} -\frac{3}{4\pi\epsilon^3} \frac{r^3}{3} + C_1 & \text{för } r < \epsilon \\ C_2 & \text{för } r > \epsilon. \end{cases}$$

Insättning av  $r = 0$  ger  $C_1 = 0$ , varefter kontinuitet för  $r = \epsilon$  ger  $C_2 = -\frac{1}{4\pi}$ . Division med  $r^2$  och ny integration ger

$$u(r) = \begin{cases} \dots & \text{för } r < \epsilon \\ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} + C_3 & \text{för } r > \epsilon. \end{cases}$$

Då  $\epsilon \rightarrow 0$  erhålls  $u(r) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r}$ , dvs  $u(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|}$ .

b) Lösning ges av  $u(x) = \int_{R^3} \frac{1}{4\pi|x-y|} f(y) dy$ .

c) Beräkna  $u(x)$  i  $x = (0, 0, R)$  för  $R > 1$  (lättast integral fås med  $R = 0$ ) med hjälp av rympolära koordinater  $r(\cos(\phi)\cos(v), \sin(\phi)\sin(v), \cos(v))$ :

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{|y| < 1} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|} \frac{3}{4\pi} dy \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{3}{4\pi} \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(R-r\cos(v))^2 + r^2 \sin^2(v)}} r^2 \sin(v) d\phi dv dr \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{3}{4\pi} 2\pi \int_0^1 \int_0^\pi \frac{r^2 \sin(v)}{\sqrt{R^2 - 2Rr\cos(v) + r^2}} dv dr \\ &= \frac{6}{16\pi} \int_0^1 \frac{r}{R} [\sqrt{R^2 - 2Rr\cos(v) + r^2}]_{v=0}^{v=\pi} dr \\ &= \frac{6}{16\pi} \frac{1}{R} \int_0^1 2r^2 dr = \frac{1}{4\pi R}. \end{aligned}$$

c) Sätter  $u = e^{-r} \frac{1}{4\pi r}$  och beräkna

$$\begin{aligned} \Delta u &= r^{-2}(r^2 u')' = r^{-2}(r^2(-e^{-r} \frac{1}{4\pi r} - e^{-r} \frac{1}{4\pi r^2}))' \\ &= r^{-2} \frac{1}{4\pi} (-e^{-r} r - e^{-r})' = r^{-2} \frac{1}{4\pi} e^{-r} r = u, \end{aligned}$$

dvs  $-\Delta u + u = 0$  för  $r > 0$  v.s.v. För att visa att  $-\Delta u + u = \delta$  noterar vi att  $-\Delta u + u = -\Delta \frac{1}{4\pi r} - \Delta(e^{-r} - 1) \frac{1}{4\pi r} + e^{-r} \frac{1}{4\pi} = \dots$

2. Enligt uppgift 1 ger  $u(x) = \int_\Gamma \phi(y) \frac{1}{4\pi|x-y|} dy$  en lösning till  $\Delta u = 0$  i  $\Omega$ . Sök därför  $\phi$  så att även randvillkoret  $u = g$  uppfylls, dvs

$$\int_\Gamma \phi(y) \frac{1}{4\pi|x-y|} dy = g(x) \quad \text{för } x \in \Gamma.$$

Inför rand-element, dvs delar in  $\Gamma$  i disjunkta element  $K_j$  sådana att  $\Gamma = \cup_{j=1}^m K_j$ , och antar (approximativ lösning)  $\phi(y) = \sum_i \phi_i \Phi_i(y)$  där  $\Phi_i(y) = 1$  på element  $K_i$  och  $= 0$  för övrigt. För att bestämma lämpliga koefficienter  $\phi_i$  används (t.ex.)

$$\int_{K_j} \int_\Gamma \phi(y) \frac{1}{4\pi|x-y|} dy dx = \int_{K_j} g(x) dx, \quad j = 1, \dots, m,$$

vilket ger  $m$  ekvationer för beräkning av koefficienterna  $\phi_1, \dots, \phi_m$  i  $\phi(y)$ , som i sin tur ger  $u(x)$ .

3. a)-d) Se föreläsningssanteckningarna.

e) Ja,  $a < 0$  ger exponentiell tillväxt i problemet, såväl det givna som dualproblemet. Speciellt blir stabilitetskonstanten  $\int_0^T |\dot{\Phi}|$  i a posteriori feluppskattningen stor för stora  $T$ .

4. a) Integration över  $\Omega$  av givna ekvationen  $i \dot{u} - \Delta u = 0$  multiplicerad med  $\bar{u}$  samt partiell integration ger

$$0 = \int_{\Omega} \bar{u} i \dot{u} - \int_{\Omega} \bar{u} \Delta u = \int_{\Omega} i(u_1 \dot{u}_1 + u_2 \dot{u}_2) + u_2 \dot{u}_1 - u_1 \dot{u}_2 + \nabla \bar{u} \cdot \nabla u,$$

med imaginärdel

$$\int_{\Omega} u \dot{u}_1 + u_2 \dot{u}_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} u_1^2 + u_2^2,$$

som alltså måste vara  $= 0$ , dvs  $\int_{\Omega} |u|^2$  är tidsoberoende, v.s.v.

b) Multiplikation av egenvärdesekvationen  $-\Delta u = \lambda u$  med  $u$ , integration över  $\Omega$ , och partiell integration ger

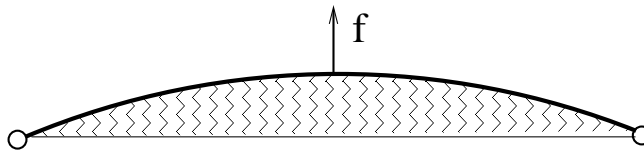
$$\lambda \underbrace{\int_{\Omega} u^2}_{\geq 0} = \int_{\Omega} u(-\Delta u) = \underbrace{\int_{\Omega} |\nabla u|^2}_{\geq 0},$$

dvs  $\lambda \geq 0$  (med sträng olikhet för  $u \neq 0$ ) och  $\|u\| = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \|\nabla u\|$ , dvs konstanten  $C$  i olikheten  $\|u\| \leq C \|\nabla u\|$ , gällande för alla  $u$  sådana att  $u = 0$  på  $\Gamma$ , kan inte vara mindre än  $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$  där  $\lambda_1 > 0$  är det minsta egenvärdet. I själva verket gäller olikheten  $\|u\| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \|\nabla u\|$  för alla  $u$  sådana att  $u = 0$  på  $\Gamma$ , eftersom  $u$  kan uttryckas i egenfunktionerna och dessa är parvis ortogonala, både "utan och med gradienter", dvs  $\int_{\Omega} u_i u_j = 0$  och  $\int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla u_j = 0$  för  $i \neq j$ , men detta ingick inte i uppgiften.

5. a) Fysikaliska tolkning:

$$u'''' = f - u \quad \text{för } 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, u(1) = 0, u''(0) = 0, u''(1) = 0.$$

modellerar en balk med vertikal förskjutning  $u = u(x)$  p.g.a. en vertikal last  $f = f(x)$ , delvis balanserad av en "återhållande" kraft  $u$ . Balken är (momentfritt  $u'' = 0$ ) förankrad med  $u = 0$  för  $x = 0$  och  $x = 1$ .



b) Multiplikation av de två ekvationerna i systemet med testfunktioner  $\phi$  och  $\psi$ , med  $\phi = \psi = 0$  för  $x = 0$  och  $x = 1$ , ger efter partiell integration

$$\begin{cases} \int_0^1 (-\phi' u' - \phi v) = 0 \\ \int_0^1 (-\psi' v' + \psi u) = \int_0^1 \psi f. \end{cases}$$

Indelar  $[0, 1]$  i element  $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ ,  $x_j = j/(m+1)$ , och ansätter styckvis linjära approximativa lösningar  $U(x) = \sum_{j=1}^m U_j \phi_j(x)$  och  $V(x) = \sum_{j=1}^m V_j \phi_j(x)$ , där  $\phi_j(x)$  är de vanliga hatt-bas funktionerna, och söker nodvärden  $U_j$  och  $V_j$  sådana att

$$\begin{cases} \int_0^1 (-\phi_i' U' - \phi_i V) = 0, & i = 1, \dots, m \\ \int_0^1 (-\phi_i' V' + \phi_i U) = \int_0^1 \phi_i f, & i = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Detta ger  $2m$  ekvationer för de  $2m$  sökta nodvärdena  $U = [U_1 \dots U_m]^\top$  och  $V = [V_1 \dots V_m]^\top$ , vilket kan skrivas på matrisform som

$$\begin{cases} -SU - MV = 0, \\ -SV + MU = F, \end{cases}$$

där  $S$  och  $M$  är de vanliga styvhets och massmatriserna med element  $2/h$  respektive  $2h/3$  på diagonalerna,  $-1/h$  resp.  $h/6$  på sub och superdiagonalerna, och nollor för övrigt, och  $F$  är lastvektorn med element  $\int_0^1 \phi_i f$ .

Första ekvationen ger  $V = -M^{-1}SU$  vilket insatt i den andra ger  $(SM^{-1}S + M)U = F$ , dvs  $U = (SM^{-1}S + M)^{-1}F$ .

c) Multiplicerar första ekvationen med  $-v$  och den andra med  $u$ , adderar de två, integrerar, och integrerar partiellt. Detta ger

$$\int_0^1 u^2 + v^2 = \int_0^1 u f,$$

dvs

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 = \int_0^1 u f \leq \|u\| \|f\|,$$

varifrån följer att  $\|u\| \leq \|f\|$ , och därmed att  $\|v\| \leq \|f\|$ .

Alternativt kan första ekvationen multipliceras med  $-u$  och den andra med  $-v$ , adderas, integreras, och integreras partiellt, vilket ger

$$\int_0^1 (u')^2 + (v')^2 = \int_0^1 (-v) f \leq \|v\| \|f\| \leq \|v'\| \|f\|,$$

varav följer att  $\|v'\| \leq \|f\|$  och sedan  $\|u'\| \leq \|f\|$ .

(Med dessa grundläggande stabilitetsuppskattningar givna kan man sedan använda ekvationerna till att uppskatta  $t$ , som t.ex. momentet  $v = u''$ :

$$\|u''\| = \|v\| \leq \|f\|,$$

och  $v''$ :

$$\|v''\| = \|f - u\| \leq \|f\| + \|u\| \leq 2\|f\|,$$

om man så vill.)