

FÖRELÄSNING 1

30/10-2023

( $\frac{10}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{1}$   
extramoments lab)

- Algebraiska ekvationer

$$x^2 - 7x + 2 = 0$$

- Otdinära differentialekvationer (ODE)

$$f''(x) - 7f'(x) + 2f(x) = 2$$

- Partiella differentialekvationer (PDE)

$$f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y) = 0$$

Exempel

Löss ODE:n  $f''(t) + \omega^2 f(t) = a(t)$   
Lagivet tal  $\hookrightarrow$  given funktion

Skriv om som system av ODE:er för

$$\begin{cases} u_1(t) = f(t) \\ u_2(t) = f'(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = -\omega^2 u_1 + a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix}}_{\bar{u}'} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{\bar{u}} + \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}$$

Vill diagonalisera A

Egenvärden:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\omega$$

Egenvektorer

$$\begin{pmatrix} -i\omega & 1 \\ -\omega^2 & -i\omega \end{pmatrix} \Rightarrow \text{eigenvektor } E = \begin{bmatrix} 1 \\ i\omega \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i\omega & 1 \\ -\omega^2 & i\omega \end{pmatrix} \Rightarrow E = \begin{bmatrix} 1 \\ -i\omega \end{bmatrix}$$

sammantaget:

$$A \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{bmatrix}}_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{bmatrix}}_B$$

$$A = TDT^{-1}$$

Lös nu ODE:n:

$$u = A\bar{u} + \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{(T^{-1}\bar{u})'}_{:= \bar{v}(t)} = \underbrace{T^{-1}A}_{DT^{-1}} \bar{u} + T \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{v}' = D\bar{v} + \frac{1}{2iw} \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} v_1'(t) = iwv_1(t) + \frac{1}{2iw} a(t) \xrightarrow{(*)} \\ v_2'(t) = -iwv_2(t) - \frac{1}{2iw} a(t) \xleftarrow{\text{helt oberoende av varandra}} \end{cases}$$

(\*)  $\Rightarrow$  löser \* med integrerande faktor,  $\exp(-cwt)$

$$(e^{-cwt} v_1(t))' = \frac{1}{2iw} e^{-iwt} a(t)$$

$$v_1(t) = C_1 e^{cwt} + \int_0^t \frac{1}{2iw} e^{-iwt-s} a(s) ds + C_1$$

pss. för  $v_2$  ( $w \rightarrow -w$ ):

$$v_2(t) = C_2 e^{-iwt} - \int_0^t \frac{1}{2iw} e^{-iwt-s} a(s) ds$$

$$f(t) = u_1(t), \quad \bar{u} = T\bar{v}, \quad u_1 = v_1 + v_2$$

$$\text{svart: } f(t) = A \cos(wt) + B \sin(wt) + \int_0^t \frac{\sin(w(t-s))}{w} a(s) ds$$

### Exempel

Lös PDE:n:

$$\underbrace{xyu_x(x,y) - x^2 u_y(x,y) - y \cdot u(x,y)}_{\text{principal del}} = \underbrace{xy}_{\text{inhomogen}} \quad \text{längst! Ordnning 1 för } u(x,y)$$

Tricket: vi gör ett variabelbyte

$$\begin{cases} s = x \\ t = f(x,y) \end{cases}$$

Välj  $f(x,y)$  smart så att bara  $u_s$ , ej  $u_t$  blir kvar

$$\text{Kedjeregeln: } \frac{\partial u}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial s}{\partial x}}_1 \underbrace{\frac{\partial u}{\partial s}}_{f'_s} + \underbrace{\frac{\partial t}{\partial x}}_{f'_t} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\frac{\partial u}{\partial t}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \underbrace{\frac{\partial s}{\partial y}}_0 \underbrace{\frac{\partial u}{\partial s}}_{f'_s} + \underbrace{\frac{\partial t}{\partial y}}_{f'_t} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\frac{\partial u}{\partial t}}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{-2iw} = \begin{bmatrix} -iw & -1 \\ iw & 1 \end{bmatrix}$$

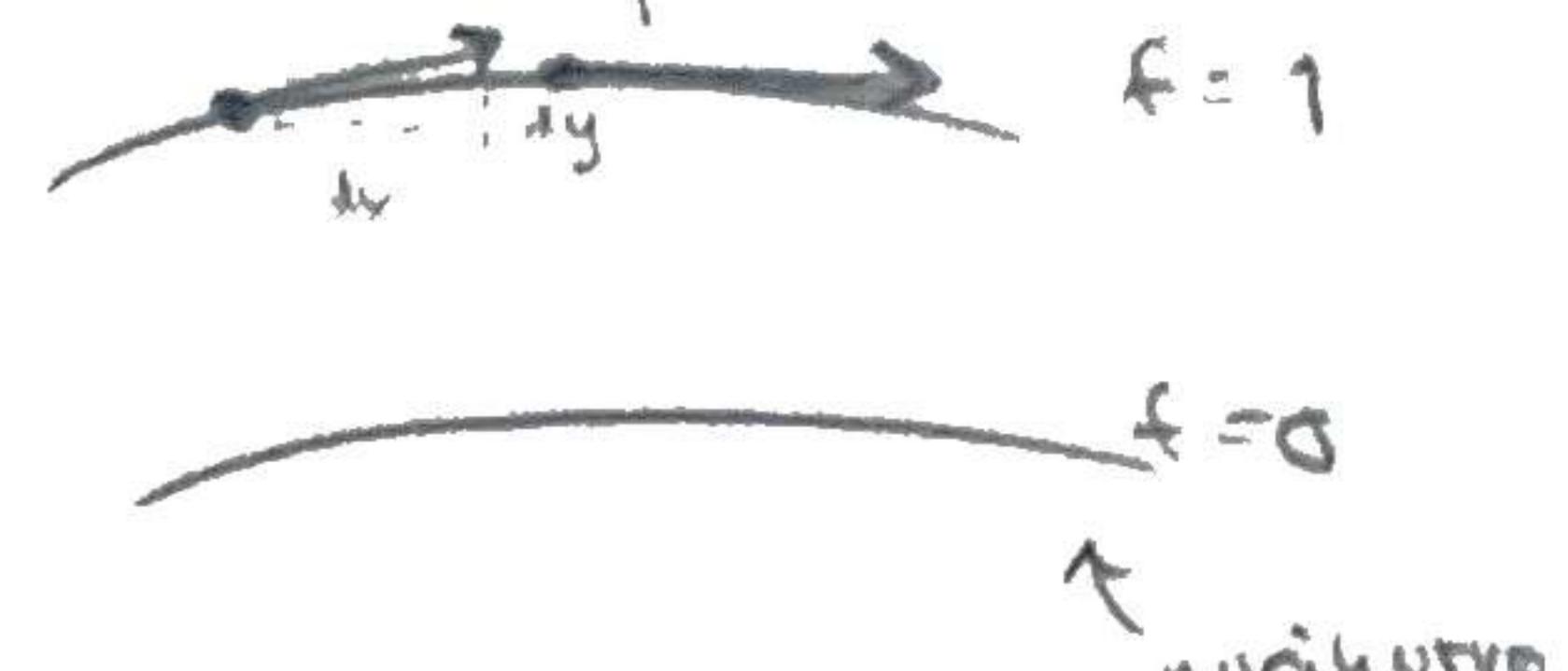
insatt  $\Rightarrow$

$$xy(u'_s + f_x' u'_t) - x^2(f_y' u'_t) - yu = xy$$

- vektorfältet  
pekar längs  
nivåkurvorna

$$\text{krav: } xyf'_x - x^2f'_y = 0$$

$$\Leftrightarrow (xy, -x^2) \cdot \nabla f(x,y) = 0$$



Geometriskt, vektorfältet  $(xy, -x^2)$  flödar längs  $f$ :s nivåkurvor

Lös den karakteristiska ekvationen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x^2}{xy} = -\frac{x}{y}$$

finns  
oändligt många  
specifierade av  
integrations-  
konstanten

Lös denna separata ODE:

$$ydy = -xdx$$

$$\int ydy = - \int xdx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \Leftrightarrow$$

$C = \frac{x^2+y^2}{2}$  (integrationskonstanten  $C$  specificeras nivåkurvan)

$$\text{välj } f(x,y) = C = \frac{x^2+y^2}{2}$$

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}$$

I st-planet blir PDE:n:

$$xyu'_s - yu = xy, \Rightarrow xu'_s - u = x$$



Ersätt alla  $x, y$  med  $s, t$ :

$$\boxed{su'_s - u = s} \quad u(s,t)$$

Detta är en ODE i  $s$ , med  $t$  som parameter

$$1u'_s - \frac{1}{s}u = 1 \quad \text{integrande faktor} = e^{-\ln(s)} = \frac{1}{s} \leftarrow \text{förslag med udette}$$

$$\left(\frac{1}{s} \cdot u\right)'_s = \frac{1}{s} \quad \frac{1}{s}u = \ln(s) + C(t) \quad \hookrightarrow \text{godtycklig envariabel funktion}$$
$$u = s(\ln(s) + C(t))$$

Allmänna lösningen:

$$u(x,y) = x(\ln(x) + C\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right))$$

- Finn partikulär lösningen som uppfyller  $u(1,y) = y \quad \forall y \geq 0$

$$u(1,y) = 1\left(0 + C\left(\frac{1+y^2}{2}\right)\right) = y \quad \forall y \geq 0$$

$$C(\alpha) = \sqrt{2\alpha - 1} \quad \alpha \geq \frac{1}{2}$$

idiot variabel  $\left(\alpha = \frac{x^2+y^2}{2}\right)$

$$\text{Svar: } u(x,y) = x(\ln(x) + \sqrt{x^2+y^2-1})$$

## FÖRELÄSNING 2 31/10-2023

### Värmelämningsekvationen (diffusionsekvationen)

$$\partial_t u = k \Delta u + f \quad \hookrightarrow \text{VÄ}$$

Sökes: värme fördelning  $u = u(t, x, y)$

här rumsvariabler

#### Fouriers lag

$$J = -k \nabla u \quad \begin{matrix} \rightarrow \text{värme flödar från kallt till varmt} \\ \downarrow \quad \hookrightarrow \text{positiv konstant} \\ \text{värmeflöde} \end{matrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \iint_{\Omega} u \, dx \, dy \right) = \iint_{\partial\Omega} J \cdot (-\nu) \, ds = \stackrel{\substack{\rightarrow \text{normalvektorn} \\ \rightarrow \text{Gauss sats}}}{-} \iint_{\Omega} \operatorname{div}(u) \, dx \, dy = \iint_{\Omega} \operatorname{div}(k \nabla u) \, dx \, dy$$

$\left. \begin{matrix} \text{värmeenergi i } \Omega \\ \text{ökning av } \end{matrix} \right\} \quad \left. \begin{matrix} \text{inflöde genom} \\ \partial\Omega \end{matrix} \right\}$   
 $+ \iint_{\Omega} f \, dx \, dy \quad \forall \Omega$   
 $\left. \begin{matrix} \text{ytter värmetillförsel} \end{matrix} \right\}$

$$\Rightarrow \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k \nabla u) - f \right) \, dx \, dy = 0, \quad \forall \Omega$$

$$\partial_t u = \underbrace{\operatorname{div}(k \nabla u)}_{= k \operatorname{div}(\nabla u)} + f \quad \forall t, x, y$$

$$= k \operatorname{div}(\nabla u) \quad \text{om } k = \text{konstant}$$

$$= k \Delta u = k(u_{xx}'' + u_{yy}'')$$

#### Definition

Laplaceoperatorn  $\Delta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  är  $\Delta u = (\partial_1^2 + \partial_2^2 + \dots + \partial_n^2)u$

#### Notation

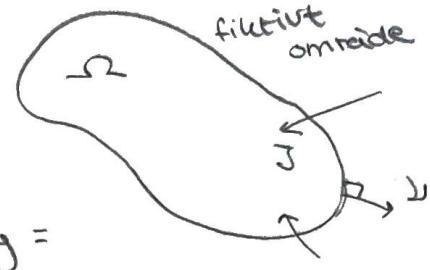
$$\partial_1 u = \partial_{x_1} u = \frac{\partial u}{\partial x_1} = u'_{x_1}$$

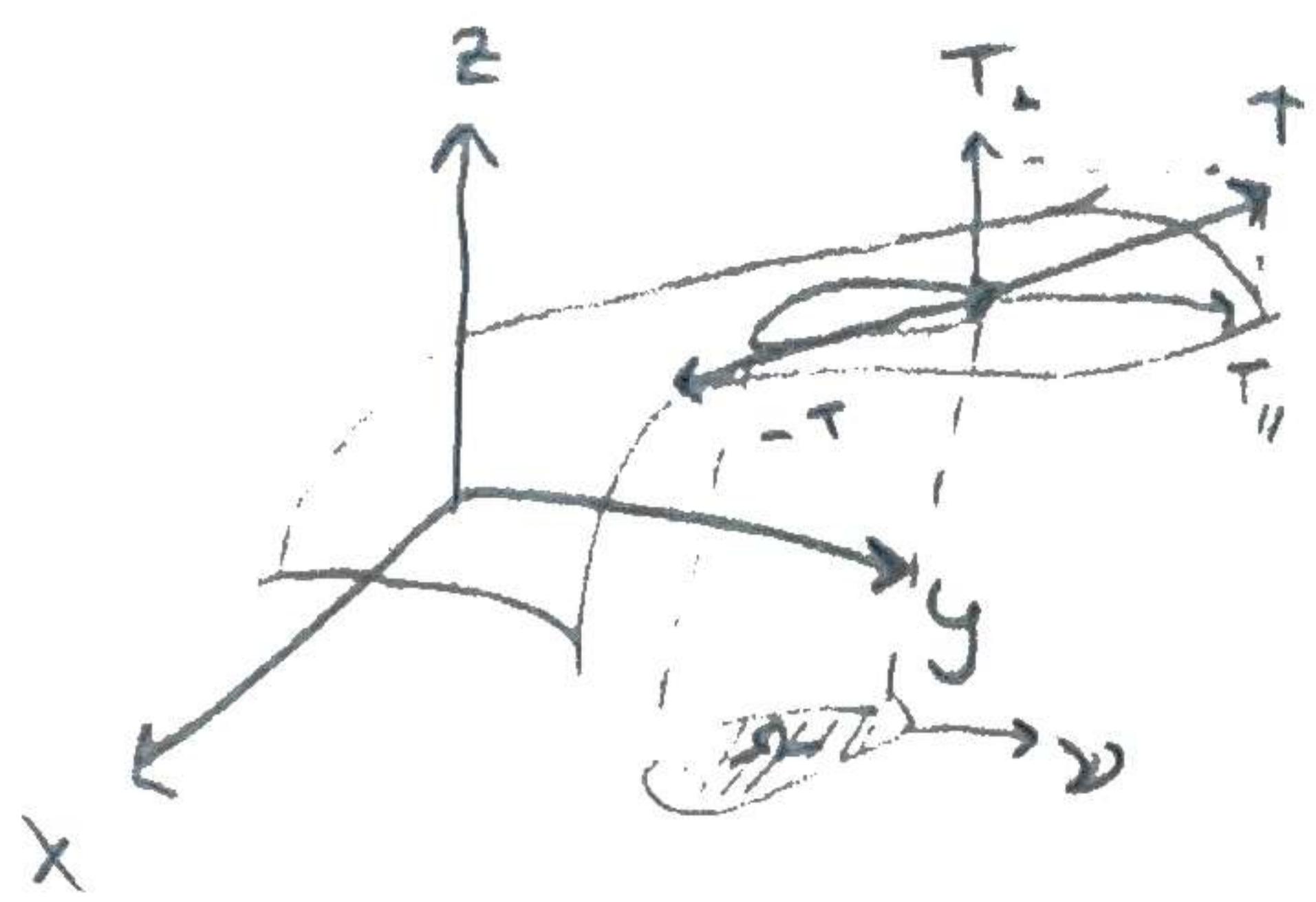
#### Vägetekvationen

$$\partial_t^2 u = c^2 \Delta u + f$$

Sökes: vertikala läget  $u = u(t, x, y)$  hos ett svängande membran (t.ex. trumma)

Fiktivt utsnitt av membranet ovanför  $\Omega$





Newtonens 3:e lag  
 $T + (-T) = 0$  spännskrafter

Linjär approximation  
 Horisontella delen  $T_{11}$  har  
 konstant längd  $=: k$  (xy-planet)

$T$  är riktad längs membranet  
 $\Rightarrow$  vertikala komponenten  $T_z = k \cdot \frac{\partial u}{\partial z}$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = u \cdot \nabla u$$

Newtonens 2:a lag:  $F = m \cdot a$

$$\int_{\Omega} k \frac{\partial u}{\partial z} ds + \underbrace{\iint_{\Omega} \tilde{f} dx dy}_{\text{vertikala spännskrafter}} = \underbrace{\iint_{\Omega} g \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx dy}_{\text{ytter kraft}} + \Omega$$

Gauss

$$\Rightarrow \iint_{\Omega} \left( k \Delta u + \tilde{f} - g \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) dx dy = 0 \quad \Omega$$

$$\Rightarrow g \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k \Delta u + \tilde{f}, \quad \forall t, x, y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{k}{g} \Delta u + \frac{\tilde{f}}{g} \quad \begin{matrix} \frac{k}{g} = c^2 \\ \downarrow \\ (\nabla^2) \end{matrix} \quad \partial_t^2 u = c^2 \Delta u + f$$

### Laplaces ekvation

vid jämvikt,  $u = u(x, y)$  är tidsoberoende lösning till  
 (VÄ) eller (VÅ), gäller Laplace ekvation

$$-\Delta u = f \quad (\text{kallas Poissons ekvation då } f \neq 0)$$

### Klassificering av 2:a ordningens linjära PDE:er

PDE för  $u(x_1, \dots, x_n)$ ,  $x_1 = t$ ,  $x_2 = x$ ,  $x_3 = y$

$$\sum_i \sum_j a_{ij} u''_{x_i x_j} + \sum_i a_i u'_{x_i} + a \cdot u = f \quad (*)$$

principal delen, vi kan representera denna med en  
 symmetrisk matris  $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Låt  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  vara  
 $A$ :s egenvärden

(\*) är elliptisk om alla  $\lambda_i \neq 0$  och alla har samma tecken

### Exempel

$$\text{Laplace} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

(\*) är hyperbolisk om alla  $\lambda_i \neq 0$  och exakt ett  $\lambda_i$  har motsatt tecken mot övriga  $n-1$

### Exempel

Vägkvationen,  $\partial_t^2 u = c^2 \Delta u + f \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -c^2 & 0 \\ 0 & 0 & -c^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = -c^2$

(\*) är parabolisk om exakt ett  $\lambda_i = 0$  och övriga har samma tecken.

### Exempel

Värmeledningsekvationen,  $\partial_t u = k \Delta u + f \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = -k$

### Start- och randvillkor

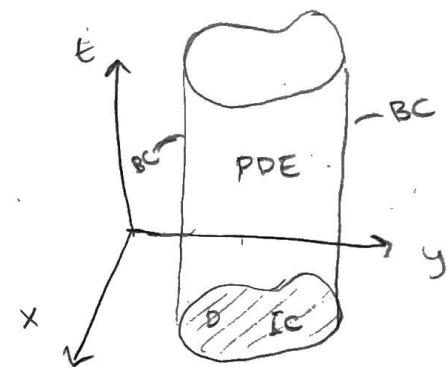
Behövs för att entydigt bestämma en partikulär lösning till PDE-problemet.

#### Startvillkor (IC)

(VÄ)  $u(0, x, y)$  given

(VÄ)  $u$  och  $u'$  givna vid  $t=0$

(Δ) finns ej N.A (not applicable)



$$(\ast\ast) T_2 = k \frac{\partial u}{\partial t}$$

#### Randvillkor (BC)

• Dirichlets BC:  $u$  given på  $\partial D$

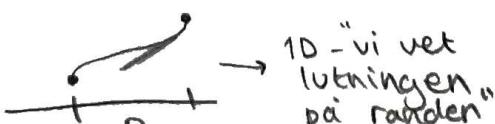
(VÄ) temperaturen är känd på  $\partial D$

(VÄ) membranets läge är känd på  $\partial D$

$$\nabla \cdot J = -k \nabla u \cdot \underline{\underline{n}}$$

• Neumanns BC

$\frac{\partial u}{\partial n}$  är känd på  $\partial D$



"vi vet lutningen på randen"

(VÄ) värmeflödet tvärs  $\partial D$  är känd \*

"usimbassäng"

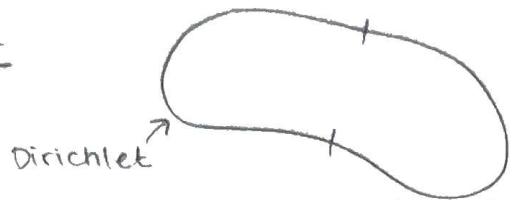
(VÄ) vertikala spänningar känd på  $\partial D$ . (\*\*)  
(Naturligt randvillkor för västenvagor)

• Robins BC:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + g \cdot u = g \text{ = känd funktion på } \partial D$$

$\hookrightarrow g > 0$

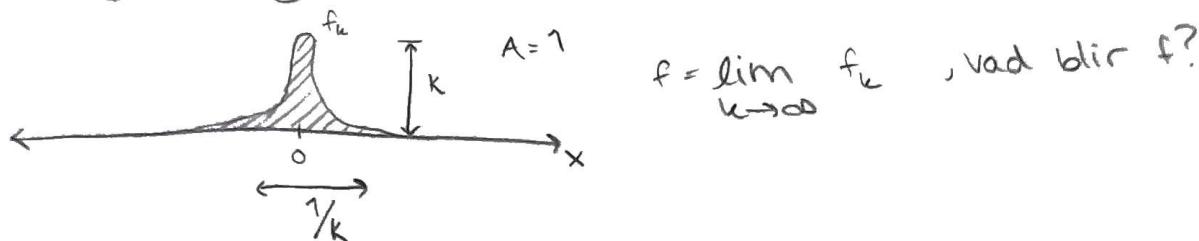
• Blandade BC



## FÖRELÄSNING 3 (2/11 - 2023)

"Man blir handikappad om man försöker jobba med PDE:er utan distributioner"

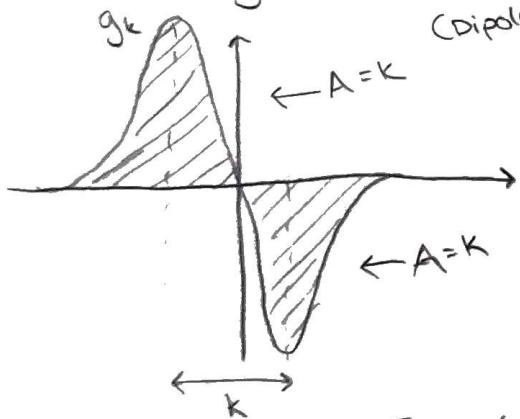
Många viktiga "funktioner" är inte funktioner



$$f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k, \text{ vad blir } f?$$

Punktvärt gränsvärde blir (dipoler)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x=0 \end{cases}$$



$$g = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k, \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x=0 \end{cases}$$

nämt

Detta är rätt väldelöst matematiskt. Detta för att dessa egentligen är distributioner och inte funktioner.

En funktion sker punktvärt ett output  $y$  för varje punkt  $x$ . Inte alltid så i verkligheten. För en distribution vet man istället medelvärdet  
Viktat medelvärdet:

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx, \text{ där } \varphi \text{ är en viftfunktion/testfunktion}$$

(+ och  $g=1$ )

### Definition

En testfunktion  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  s.a.

1) alla partiella derivator av alla ordningar ska existera som kontinuerliga funktioner ( $C^\infty_0$ )

2)  $\exists R < \infty$  s.a.  $\varphi(x) = 0 \quad \forall |x| > R$

En viftfunktion är en testfunktion där  $\varphi \geq 0$  och  $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$

Låt  $D(\mathbb{R}^n)$  vara mängden testfunktioner

### Exempel

Låt  $f(x)$  vara lokalt integrerbar funktion dvs.

att  $\int_{|x| < R} |f(x)| dx < \infty \quad \forall R$ . För varje  $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$

är medelvärdet  $\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx$  konvergent. Detta då

$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) \varphi(x)| dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$  då  $\varphi=0$  då  $|x|>R$  och  $\varphi \leq C$  då  $|x| \leq R$

### Exempel

Punktmassan (i:a grafen denna föreläshning)  $f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ .

Ej en funktion men det finns fortfarande en naturlig definition av medelvärdet

$\langle f, \varphi \rangle = \varphi(0)$ . Varför? Eftersom  $\langle f, \varphi \rangle \approx \langle f_k, \varphi \rangle$  då  $k$  stor

$$\langle f_k, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x) \varphi(x) dx \approx \varphi(0) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x) dx}_{\approx \varphi(0) \text{ där } f_k(x) \neq 0} = 1$$

OBS! Om  $f$  är funktion är  $\langle f, \varphi \rangle$  alltid integral. Annars är distribution alltid  $\varphi(0)$

### Definition

En distribution  $F$  på  $\mathbb{R}^n$  är en tillordning/funktion/operator etc där  $F: D(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  (mappar funktioner till reella tal). Den behöver uppfylla två krav:

1)  $F$  är linjär ( $\langle F, af + b\varphi \rangle = a\langle F, \varphi \rangle + b\langle F, \varphi \rangle$ )

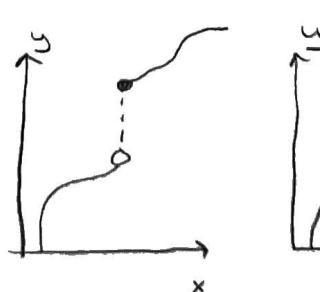
2) Medelvärdet  $\langle F, \varphi \rangle$  är väldefinerat  $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$

Låt  $D'(\mathbb{R}^n)$  vara mängden av distributioner i  $\mathbb{R}^n$ . OBS! Blanda inte ihop  $D$  och  $D'$ ! Formeln  $\langle S_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$  för  $a \in \mathbb{R}^n$  definierar Diracs- $\delta$ -distribution:  $a \in \mathbb{R}^n$

### Exempel

$$f_1(x) = x^2, f_2(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$$

$f_1$  och  $f_2$  kommer ha samma distribution då enskilda punkter ej påverkar



har  
summa  
distribution  
exempelvis

Allmänt: Om  $f_1$  och  $f_2$  är lika i distributionsmening så är  $f_1(x) = f_2(x)$  om  $f_1$  och  $f_2$  är kontinuerliga i  $x$ .

## Svaga derivator

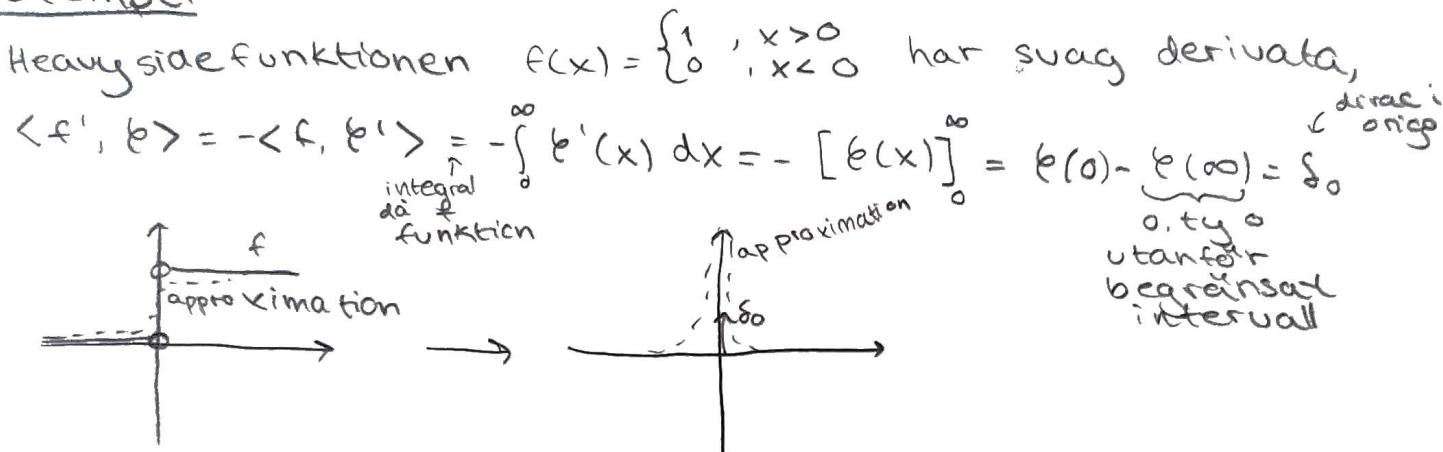
Den klassiska derivatan  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

av en funktion existerar inte alltid. Vad är derivatan i distributionsmening? Dvs. formeln för derivata av  $f$ :s medelvärden. Om  $f$  existerar som funktion vet vi att  $\langle f', \epsilon \rangle = \int f'(x) \epsilon(x) dx \stackrel{\text{PF}}{=} [f(x) \epsilon(x)]_0^\infty - \int f(x) \epsilon'(x) dx = -\langle f, \epsilon' \rangle$

## Definition

Den svaga derivatan (distributionderivatan)  $\partial_{x_k} F, F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  är distributionen med medelvärdet  $\langle \partial_{x_i} F, \epsilon \rangle = -\langle F, \partial_{x_i} \epsilon \rangle \quad \forall \epsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

## Exempel



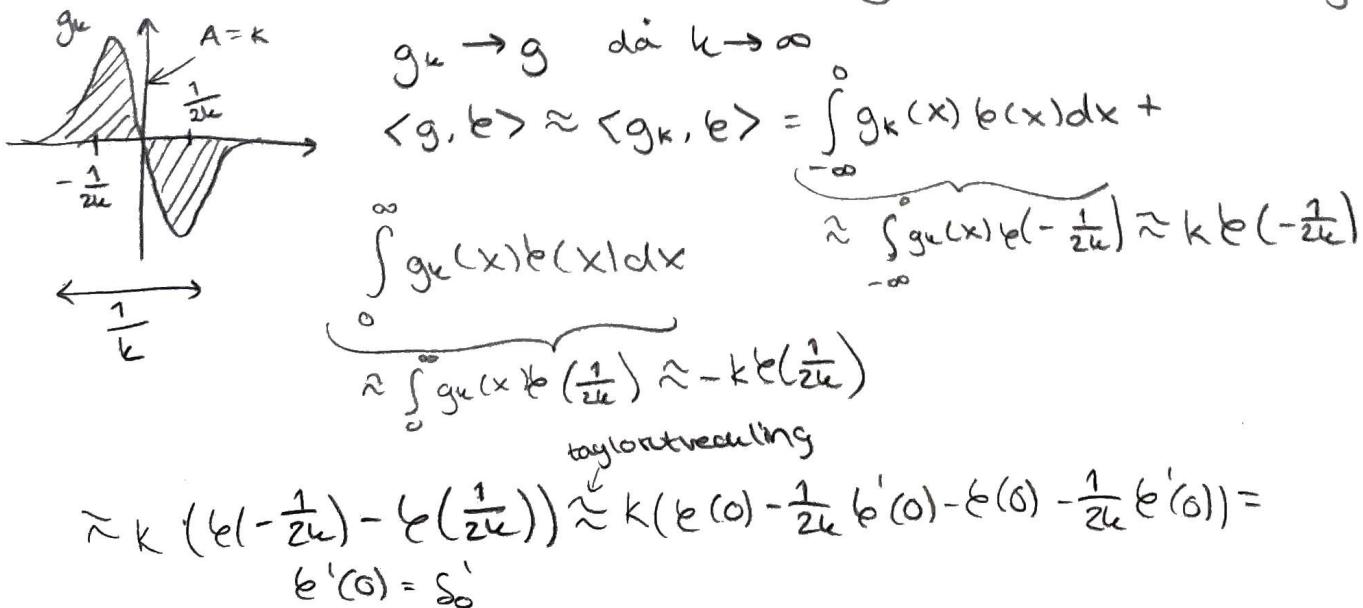
## Exempel

Svaga derivatan av varje distribution existerar. Vad blir Dirac- $\delta$ :s derivata?

### Lösning:

$$\langle s_0, \epsilon \rangle = -\langle s_0, \epsilon' \rangle = -\epsilon'(0). \text{ Hur kan vi tolka detta?}$$

Påstående:  $s_0'$  är dipolen från början av föreläsningen.



# STORGRUPPSÖVNING 1 (2/11 - 2023)

OBS! Tentafrågor tas överlag från boken, fast med ändrade tal. Rekommenderade uppgifter saknas efter viktighet

(14) Lös  $x\partial_x u - y\partial_y u + u = x$ ,  $u(x, x) = x^2$  (typisk tentauppgift)

## Lösning

Vi vill göra ett variabelbyte som transformeras till ODE

$$\begin{cases} s = x \\ t = f(x, y) \end{cases}, \text{ vi vill hitta } f.$$

Betrakta principdelen  $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ , separabel ODE  $\Rightarrow -\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$   
 $\Rightarrow -\ln(y) = \ln(x) + C$

Lös ut  $C$ .  $C = \ln(xy)$ . Då  $C$  är konstant är  $e^C$  konstant.  
Vi kan därmed ta  $C = xy$  om vi vill (blir lättare)

$$\begin{cases} s = x \\ t = xy \end{cases} \text{ Kedjeregeln } \Rightarrow \begin{cases} \partial_x u = \partial_s u + y \partial_t u \\ \partial_y u = x \partial_s u + x \partial_t u \end{cases} \text{ Stoppa in i PDE:n}$$

$x(\partial_s u + y \partial_t u) - y(x \partial_t u) + u = x \Leftrightarrow x \partial_s u + u = x$ . Byt allt till  $s \partial_s u + u = s$ . Vi har nu en ODE i s. Lös denna linjära ODE.

$$\partial_s u + \frac{1}{s} u = 1, \text{ integrerande faktor } e^{\ln(s)} = s.$$

$$(su)'_s = s \Rightarrow su = \int s ds = \frac{s^2}{2} + C(t)$$

$$u(s, t) = \frac{s}{2} + \frac{1}{s} C(t)$$

$$\text{Äterga till } x, y \Rightarrow u(x, y) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} C(xy) \quad (\text{Allmän lösning!})$$

Hitta partikulärslösning mha. randvillkor.

$$u(x, x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} C(x^2) = x^2, C(x^2) = x^3 - \frac{x^2}{2} \text{ Låt } \alpha = x^2$$

$$C(\alpha) = \alpha^{\frac{3}{2}} - \frac{\alpha}{2}, \text{ stoppa in } C(xy) \Rightarrow u(xy) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \left( (xy)^{\frac{3}{2}} - \frac{xy}{2} \right) = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \sqrt{xy^3}$$

## Lite mer teori

### Definition

Ett PDE problem (PDE + IC+BC) kallas välställt om:

1) Det finns en lösning för varje val av data

2) Lösningen är entydig

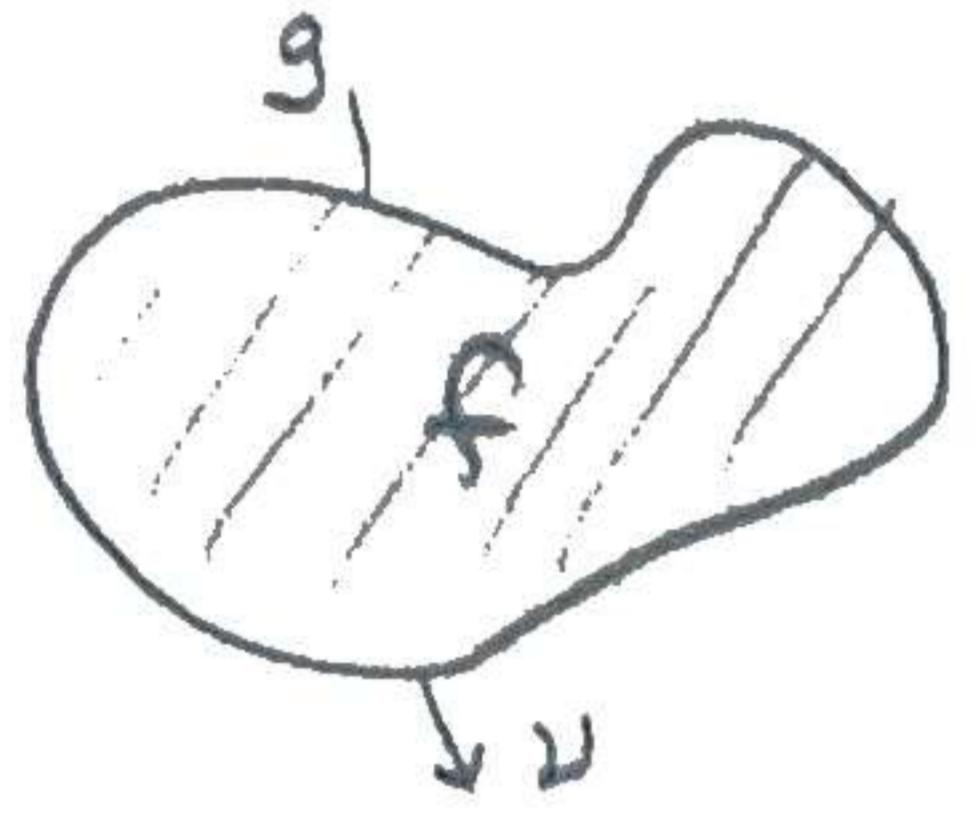
3) Lösningen ska bero kontinuerligt på data

I praktiken betraktar man ett funktionsrum med

tillåten data. 2) är typiskt enbart att kontrollera.  
Görs ofta med Greens (första) formel.

### Exempel

$-\Delta u = f \text{ i } D$ ,  $u=g$  på randen. Två indata (f och g). Visa entydighet



Antag att  $w_1$  och  $w_2$  är två lösningar.

Låt  $v = w_1 - w_2$ . Vi vill visa att  $v=0$ .

$$\Delta v = \Delta(w_1 - w_2) = f - (-f) = 0 \text{ i } D.$$

$v=0$  på randen ty båda = g

Vi löser därför PDE:n  $\begin{cases} \Delta v = 0 \text{ i } D \\ v = 0 \text{ på } \partial D \end{cases}$

$$\int_{\partial D} v \partial_n v ds = \iint_D (v \Delta v + \nabla v \cdot \nabla v) dx dy \Rightarrow 0 = \nabla v \Rightarrow v = \text{konstant}$$

konstant = 0 ty 0 på randen  $\Rightarrow v=0 \Rightarrow w_1=w_2 \Rightarrow$  Entydig  
lösning ■

1.5  $\begin{cases} \Delta u = f \text{ i } D \\ \partial_n u = g \text{ på } \partial D \end{cases}$

Visa att om  $\iint_D f dx dy \neq \int_{\partial D} g ds$  så existerar ingen lösning.

Tolka resultatet fysiskt

### Beweis

Fysiker säger att  $\iint_D f =$  ytterre värmeförlust till försel och  $\int_{\partial D} g =$  värmeförlust ut genom randen. Vi har jämfört. Om man inte har några idéer, pröva alltid Greens formel

$$\iint_D f dx dy = \iint_D \Delta u dx dy, \int_{\partial D} g ds = \int_{\partial D} 1 \cdot \partial_n u ds = \iint_D \Delta u dx dy.$$

De är alltså lika endast då lösning existerar ■

1.11  $\begin{cases} \partial_t u = k \Delta u + f, t > 0, x \in D & (I) \\ u = g \text{ vid } t = 0, x \in D & IC (II) \\ u = h \text{ vid } t > 0, x \in \partial D. BC (III) & \end{cases}$  LÖS!

Antag att  $u_0$  löser (I) och (II). Visa hur det räcker att lösa problemet för  $f=g=h=0$  för att finna  $u$ .

### Lösning

Låt  $u = u_0 + u_1$ . Vi söker alltså  $u_1$ .  $u_1 = u - u_0$  löser PDE-problem

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - k \Delta u_1 = f - f = 0 & (\text{ty } u_0 \text{ löser } t > 0, x \in D) \\ u_1 = g - g = 0, t = 0, x \in D & (u = g, u_0 = g) \\ u_1 = h - u_0 = h, t > 0, x \in \partial D & \text{villda} \end{cases}$$

Detta lösas och ger  $u_1$ , vilket sedan ger  
 $u = u_0 + u_1$

1.2  $\begin{cases} w_1'(t) = \frac{6}{5}w_1(t) - \frac{2}{5}w_2(t) \\ w_2'(t) = -\frac{2}{5}w_1(t) + \frac{9}{5}w_2(t) \end{cases}$  Finn alla lösningar till detta system av ODE:er.

Lösning

$$\bar{w}'(t) = A\bar{w}(t), A = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$$

Beräkna egenvärden och egenvektorer

Egenvärden

$$\det(A - \lambda I) = \frac{1}{5^2} \begin{vmatrix} 6-5\lambda & -2 \\ -2 & 9-5\lambda \end{vmatrix} = 0 = (6-5\lambda)(9-5\lambda)-4$$

$$50 - 75\lambda + 25\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow 2 - 3\lambda + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$

Egenvektorer

$$\lambda_1 = 1: \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda_2 = 2: \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Sammantaget har vi att

$$A \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}_T = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}_T \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_D$$

$$A = TDT^{-1}$$

$$T^{-1}\bar{w}' = T^{-1} \cdot T D T^{-1} \bar{w}$$

$$(T^{-1}\bar{w})' = \bar{v}' = D\bar{v} \Rightarrow \begin{cases} v_1' = v_1 \\ v_2' = 2v_2 \end{cases} \quad (\text{Om du inte kan lösa denna ska du skämmas!})$$

$$\Rightarrow v_1 = c_1 e^t, v_2 = c_2 e^{2t}$$

$\bar{w} = T\bar{v}$ . Vi får därmed svaret

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c_1 e^t + c_2 e^{2t} \\ c_1 e^t - 2c_2 e^{2t} \end{bmatrix}$$

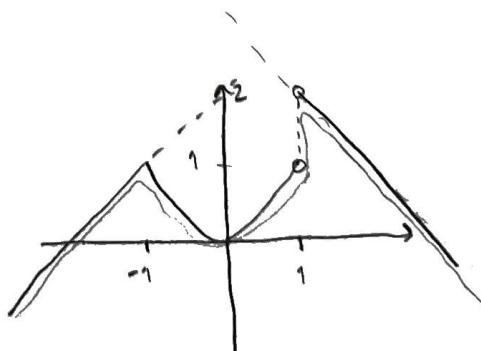
STORGROPPSSÖVNING 2

7/11-2023

Exempel

Beräkna den svaga derivatan av

$$f(x) = \begin{cases} 2+x, & x < -1 \\ x^2, & -1 \leq x < 1 \\ 3-x, & x > 1 \end{cases}$$



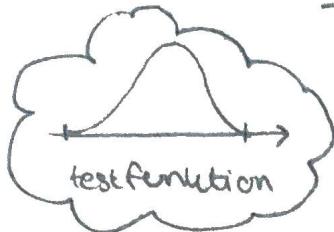
Lösning

Låt  $t$  vara en testfunktion

$$\langle f', t \rangle \stackrel{\text{def}}{=} -\langle f, t' \rangle = - \left[ \int_{-\infty}^{-1} (2+x) t'(x) dx + \int_{-1}^1 x^2 t'(x) dx \right]$$

$$+ \int_{-1}^{\infty} (3-x) e'(x) dx \Big| = - \left[ [(2+x)e(x)] \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e(x) dx + \right.$$

$$\left[ x^2 e(x) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 2x e(x) dx + [ (3-x)e(x) \Big|_{-1}^{\infty} - \int_{-1}^{\infty} 1 \cdot e(x) dx \right]$$

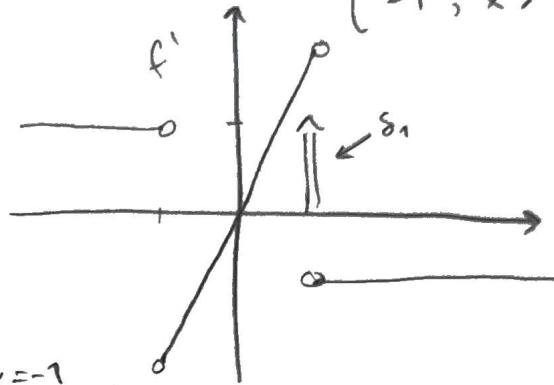


$$= - \left[ 1 \cdot e(-1) - 0 + 1 \cdot e(1) - 1 \cdot e(-1) + 0 - 2e(1) \right]$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e(x) dx \quad \text{där } g(x) = \begin{cases} 1, & x < -1 \\ 2x, & -1 < x < 1 \\ -1, & x > 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(punktvis} \\ \text{derivata)} \end{matrix}$$

$$= \underbrace{e(1)}_{\langle \delta_1, e \rangle} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(x) e(x) dx}_{\langle g, e \rangle}$$

$$\therefore f' = g + \delta_1$$



OBS! Ingen spräng för  $f = x = -1$   
 $\Rightarrow$  inget Dirac- $\delta$  i  $x = -1$  för  $f'$ . Spräng då  $x = 1 \Rightarrow$   
 $1 \cdot \delta_1$  för  $f'$ !

### Definition

med prim distribution

utan prim  
testfunktion

$F_1, F_2, \dots, F \in D'(\mathbb{R}^n)$ . Vi säger att  $F_k \rightarrow F$  svagt eller i distributionsmening om  $\langle F_k, e \rangle \rightarrow \langle F, e \rangle$  då  $k \rightarrow \infty$ ,  $\forall e \in D(\mathbb{R}^n)$ .

### Exempel

(Från tenta 230112). Finn  $c_k \in \mathbb{R}$  s.a.  $c_k e^{-kx^2} \rightarrow \delta_0$  svagt



### Lösning

Behöver visa

$$\langle c_k e^{-kx^2}, e \rangle \rightarrow \langle \delta_0, e \rangle$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^2} e(x) dx =$$

$$= c_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^2} e(x) dx$$

obs! kräver  
uniform konvergen

$$\left\{ kx^2 = (\sqrt{k}x)^2, y = \sqrt{k}x, dy = \sqrt{k}dx \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} e\left(\frac{y}{\sqrt{k}}\right) \frac{dy}{\sqrt{k}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} e\left(\frac{y}{\sqrt{k}}\right) dy$$

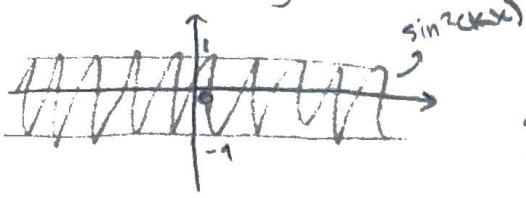
$$\approx \frac{1}{\sqrt{k}} e(0) \sqrt{\pi} \text{ då } k \rightarrow \infty$$

$$\text{Välj } c_k = \sqrt{\frac{k}{\pi}}$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} e(0) dy$$

(2.2)  $f_k(x) = \sin^2(kx)$ . Visa att  $f_k$  konvergerar svagt då  $k \rightarrow \infty$  och bestäm gränsdistributionen

Lösning



Gissning: konvergerar mot  $\frac{1}{2}$

Behöver visa att

$$\int \sin^2(kx) \epsilon(x) dx \rightarrow ?$$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2(kx) \epsilon(x) dx \right| \stackrel{PI}{=} \left| \left[ -\frac{\cos(kx)}{k} \epsilon(x) \right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k} \epsilon'(x) dx \right|$$

$$\leq \frac{1}{k} \int_{-A}^A |\cos(kx)| |\epsilon'(x)| dx \leq \frac{1}{k} \cdot c \cdot 2A \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Nu:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin^2(kx) \epsilon(x) dx = \begin{cases} \cos(2y) = 1 - 2\sin^2(y) \\ \sin^2(y) = \frac{1 - \cos(2y)}{2} \end{cases} =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2kx) \right) \epsilon(x) dx$$

Som ovan:  $\left| \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2kx) \epsilon(x) dx \right| \stackrel{PI}{=} \left| 0 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2kx)}{2k} \epsilon'(x) dx \right|$

$$\leq \frac{1}{2k} \int_{-A}^A |\sin(2kx)| |\epsilon'(x)| dx \leq \frac{1}{2k} \cdot c \cdot 2A \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Om  $\epsilon' = 0$  utanför  $(-A, A)$ .

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2(kx) \epsilon(x) dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \epsilon(x) dx = 0$$

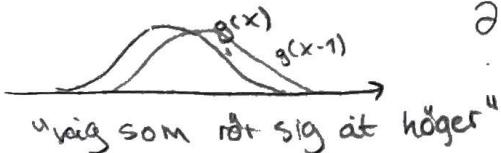
svar  $\sin^2(kx) \rightarrow \frac{1}{2}$

(2.11) Låt  $g(y)$  vara en integrabel envariabelfunktion. Låt  $u(t, x) = g(x - ct)$ . Visa att  $\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u$  i svag mening

Lösning

Antag att  $g$  är slät  $\partial_t^2 u = (-c)^2 \cdot g''(x - ct)$

$$\partial_x^2 u = g''(x - ct)$$



Antag nu inte att  $g$  är slät. Låt  $\epsilon$  vara en testfunktion  
 Visa:  $\langle \partial_t^2 u, \epsilon \rangle = c^2 \langle \partial_x^2 u, \epsilon \rangle$   
 $= (-1)^2 \langle u, \partial_t^2 \epsilon \rangle = (-1)^2 \langle u, \partial_x^2 \epsilon \rangle$

$\downarrow$   
 beror av  $t$  och  
 $x$  i detta fall

$$\Leftrightarrow \iint_{\mathbb{R}^2} \underbrace{u(t,x)}_{g(x-ct)} \partial_t^2 \epsilon(t,x) dt dx = c^2 \iint_{\mathbb{R}^2} \underbrace{u(t,x)}_{g(x-ct)} \partial_x^2 \epsilon(t,x) dt dx$$

Gör variabelbytet  $\begin{cases} \xi = x-ct \\ \eta = x+ct \end{cases}$  (standard för vågekvationen)

Kedjeregeln

$$\partial_t \epsilon = -c \partial_\xi \epsilon + c \cdot \partial_\eta \epsilon$$

$$\partial_x \epsilon = 1 \cdot \partial_\xi \epsilon + 1 \cdot \partial_\eta \epsilon$$

$$\Rightarrow \partial_t^2 \epsilon = (-c \partial_\xi \epsilon + c \partial_\eta \epsilon)^2 \epsilon = c^2 (\partial_\xi^2 \epsilon + \partial_\eta^2 \epsilon - 2 \partial_\xi \partial_\eta \epsilon)$$

$$\partial_x^2 \epsilon = (\partial_\xi + \partial_\eta)^2 \epsilon = \partial_\xi^2 \epsilon + \partial_\eta^2 \epsilon + 2 \partial_\xi \partial_\eta \epsilon$$

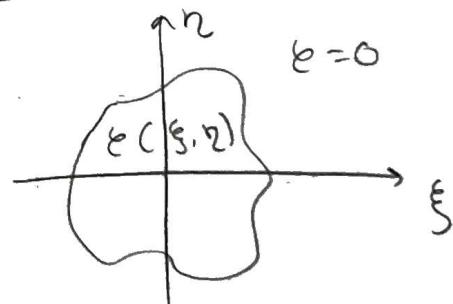
Jacobian:

$$\frac{dt dx}{d\xi d\eta} = \frac{1}{\frac{d\xi}{dt} \frac{d\eta}{dx}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -c \\ 1 & c \end{vmatrix}} = \frac{1}{2c}$$

$$\Rightarrow \iint g(\xi) \underbrace{(\partial_t^2 \epsilon - c^2 \partial_x^2 \epsilon)}_{-4c^2 \partial_\xi \partial_\eta \epsilon} \frac{1}{2c} \cdot d\xi d\eta = 0 \xrightarrow{\text{vi tar bort konstanter}}$$

$$\iint g(\xi) \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \xi \partial \eta} d\xi d\eta$$

inget  $\eta$   
 beroende



Itererad integration

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \eta \partial \xi} d\eta \right) d\xi \stackrel{?}{=} 0$$

ej frigetecken!

$\underbrace{\frac{\partial}{\partial \eta} (\epsilon_\xi)}$

$$\left[ \epsilon_\xi (\xi, \eta) \right]_{-\infty}^{\infty} = 0 \quad \& \quad \xi$$

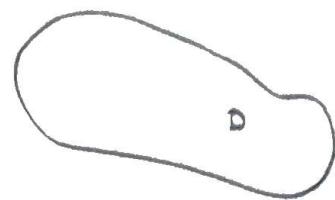


## FÖRELÄSNING 4

9/11-2023

### Sobolevrummet $H^1(D)$

$D \subseteq \mathbb{R}^n$  är ett begränsat område (öppen mängd) med "snärlig" rand  $\partial D$ .



### Funktionsrum

$$L_2(D) = \{f : D \rightarrow \mathbb{R} ; \int_D |f(x)|^2 dx < \infty\}$$

$$\|f - g\|_{L_2(D)} = \left( \int_D |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

### Exempel

Vareje begränsad funktion tillhör  $L_2(D)$

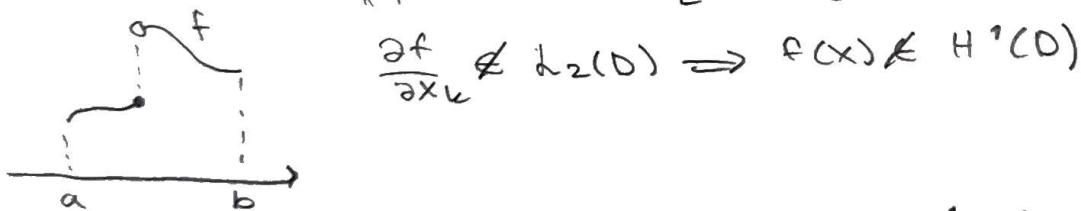
- $H^1(D) = (W^{1,2}(D)) = \{f \in L_2 ; \text{de svaga partiella derivatorna } \frac{\partial f}{\partial x_k} \in L_2, k=1, \dots, n\} = \text{Sobolevrummet.}$

Avståndet i  $H^1(D)$ :  $\|f - g\|_{H^1} = \left( \underbrace{\int_D |\nabla f(x) - \nabla g(x)|^2 dx}_{\sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_k} - \frac{\partial g}{\partial x_k} \right|^2} + \|f(x) - g(x)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

Som mängder:  $H^1(D) \subset L_2(D)$  men normerna är olika

### Exempel

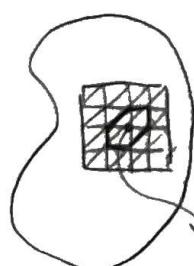
(n=1)  $f(x)$  uppenbart i  $L_2(D)$  ty begränsad



$f \in L_2(D)$  och  $f \in H^1(D)$

( $f'$  kan ha ett språng och vara diskontinuert men har inget dirac-s!!)

(n=2) FEM



(kanten har värde 0, p har värde 1. Ser ut som ett tölt)

töltfunktion f för nod p:

$$f(p) = 1$$

$f = 0$  i övriga punkter

$f =$  linjär funktion på varje triangel

Här är  $f$  en Sobolev-funktion,  $f \in H^1(D)$  (analogt med resonemanget i 1-dimension)

OBS! Att  $\frac{\partial f}{\partial x_k} \in L_2(D)$  betyder att det existerar en funktion  $g_k \in L_2(D)$  sådan att  $\int g_k(x) \psi(x) dx = - \int f(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_k}(x) dx$  för alla  $\psi \in D(D) = \{ \text{helt släta } \psi(x) \text{ som är } \neq 0 \text{ bara på en kompakt delmängd av } D \}$



$L_2(D)$  och  $H^1(D)$  är Hilbertrum dvs. fullständigt funktionsrum med skalärprodukt s.a.  $\|f\| = (\langle f, f \rangle)^{\frac{1}{2}}$  (rund enhetssfär utan hål)

Skalärprodukter här är:

$$\langle f, g \rangle_{L_2} = \int_D f(x) \cdot g(x) dx$$

$$\langle f, g \rangle_{H^1} = \int_D (\nabla f(x) \cdot \nabla g(x)) + f(x) \cdot g(x) dx$$

### Randvärden och Poincaré's olikhet

$H^1$ -funktioner (men ej allmänna  $L_2(D)$ -funktioner) har randvärden:

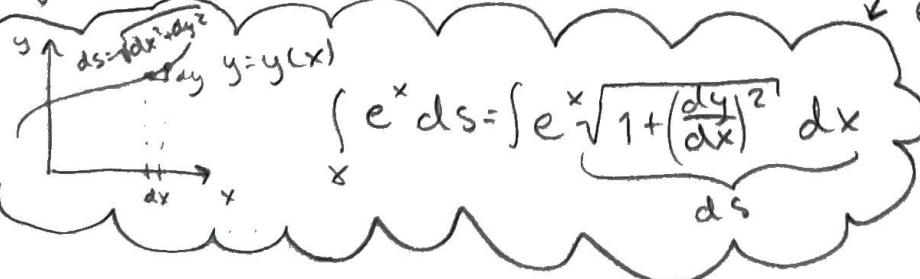
Proposition (2.2.3)

$$f \in H^1(D) \Rightarrow f|_{\partial D} \in L_2(\partial D)$$

Mer precist:  $\exists C < \infty$  s.a.  $\int_{\partial D} |f(x)|^2 ds(x) \leq C \iint_D (|\nabla f(x,y)|^2 + |f(x,y)|^2) dy$



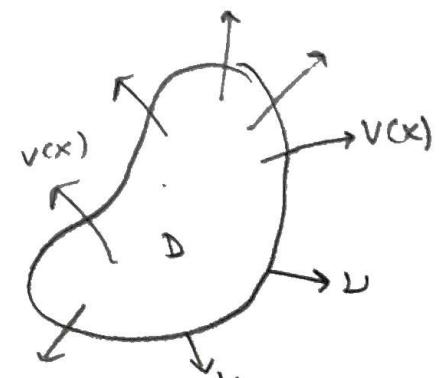
$\forall f \in H^1(D)$



### Beweis

Låt  $V$  vara ett slätt vektorfält i  $\mathbb{R}^n$   
s.a.  $\langle V(x) \cdot V(x) \rangle \geq 1, \forall x \in \partial D$

Använd Gauss sats på  $f^2 \cdot V$ :



$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \int_{\partial D} |f|^2 ds &\leq \underbrace{\int_{\partial D} |f|^2 \nu \cdot \nabla ds}_{\nu \cdot (\nabla f^2 V)} = \left| \iint_D \underbrace{\operatorname{div}(f^2 V)}_{2f \nabla f \cdot V + f^2 \operatorname{div}(V)} dx dy \right| \\
 &\leq \iint_D (2|f| \cdot |\nabla f| \cdot |V| + |f|^2 \cdot |\operatorname{div}(V)|) dx dy \\
 &\leq C \iint_D (2|f| \cdot |\nabla f| + |f|^2) dx dy \\
 &\leq |f|^2 + |\nabla f|^2 \\
 \Rightarrow \int_{\partial D} |f(x)|^2 ds(x) &\leq C \iint_D (|\nabla f(x,y)|^2 + |f(x,y)|^2) dx dy
 \end{aligned}$$

### Definition

$$H_0^1(D) = \{ f \in H^1(D); f \Big|_{\partial D} = 0 \}$$

$$\|f\|_{H^1} = \left( \int_D |\nabla f(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ "den homogena somalenvnormen"}$$

Problem:  $\|f\|_{H^1} = 0$  om  $f$  är konstant

$$\text{Betrakta de 2 termerna: } \|f\|_{H^1(D)}^2 = \int_D (|\nabla f|^2 + |f|^2) dx$$

- Vi kan ha  $\int |\nabla f|^2 \gg \int f^2$

t.ex.  $f(x) = \sin(kx)$  på  $D = (0, 2\pi)$

$$\int (f')^2 dx = k^2 \cdot \pi, \int f^2 dx = \pi$$

- $f(x) = \text{konstant}$  funktion

$$\Rightarrow \int |\nabla f|^2 = 0$$

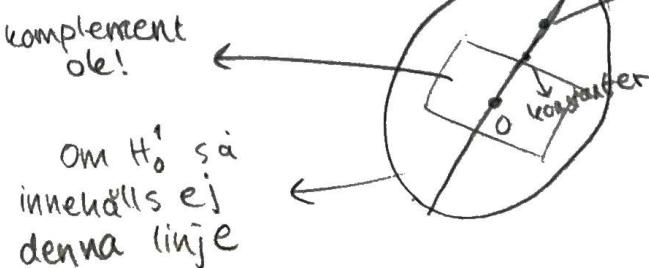
### Poincaré's olikhet

$$\exists C < \infty \text{ s.a. } \int_D f(x)^2 dx \leq C \int_D |\nabla f|^2 dx, \forall f \in H_0^1(D)$$

"näste var  
en nolla!"

OBS! Om  $f(x) = \text{konstant}, K \neq 0 \Rightarrow f \notin H_0^1(D)$

\* Antag  $D$  är  
begrenset!



## Beweis

(i dimension n=1) D=(a,b) intervall av längd

L=b-a, vi vill visa:

$$\int_a^b f(x)^2 dx \stackrel{?}{\leq} C \int_a^b (f'(x))^2 dx \text{ om } f(a)=f(b)=0$$

$$f(x) = \int_a^x f'(t) dt \text{ om } f(a)=0$$

$$\Rightarrow |f(x)| = \left| \int_a^x 1 \cdot f'(t) dt \right| \stackrel{\text{cauchy-schwartz olikhet}}{\leq} \left( \int_a^x 1^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_a^x (f'(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow |f(x)|^2 \leq (b-a) \int_a^b f'(t)^2 dt \quad \forall x \in (a,b)$$

$$\Rightarrow \int_a^b |f(x)|^2 dx \leq \underbrace{L^2}_{=C} \cdot \int_a^b f'(t)^2 dt$$

■

OBS! C blir stort för långa intervall. Den bästa konstanten C i Poincaré's olikhet är  $C = \frac{1}{\lambda_1}$  där  $\lambda_1$  är det första Dirichlet egenvärdet för D (se kapitel 4)

$$\text{För } D=(a,b): \lambda_1 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \Rightarrow C = \frac{L^2}{\pi^2}$$

FÖRELÄSNING 5 9/11-2023

## Variationsformulering av BVP

Ett abstrakt variationsproblem (V,a,L) är ett linjärt ekvationssystem.

$$a(u, \epsilon) = L(\epsilon), \forall \epsilon \in V$$

där  $u \in V$  sökes

- V = funktionsrum
- $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  bilinjär funktional
- $L: V \rightarrow \mathbb{R}$  linjär funktional

## Exempel

$$\text{Dirichletproblem: } \begin{cases} -\Delta u = f & i D \\ u = 0 & \text{på } \partial D \end{cases} \quad \begin{matrix} ① \\ ② \end{matrix}$$

För att hitta  $(V,a,L)$ :  
multiplicera  $-\Delta u = f$  med  $\epsilon$  och integrera över D:

$$\iint_D f \cdot \mathbf{k} dx dy = \iint_D (-\Delta u \cdot \mathbf{k}) dx dy \stackrel{\text{Green's}}{=} \int_{\partial D} \partial_y u \cdot \mathbf{k} ds +$$

$\underbrace{\quad}_{L(\mathbf{k})}$

$$\iint_D \nabla u \cdot \nabla \mathbf{k} dx dy$$

$\underbrace{\quad}_{a(u, \mathbf{k})}$

Välj  $v = H_0^1(D)$

$u$  löser variationsproblemet

Vi har visat: om  $u$  löser ① och ②  $\Rightarrow \iint_D \nabla u \cdot \nabla \mathbf{k} dx dy = \iint_D f \cdot \mathbf{k} dx$

( $u$  sägs vara en svag lösning till  
BVP om  $u$  löser variationsproblemet)  $\downarrow$   $\forall \mathbf{k} \in H_0^1(D)$   
gäller ekivalens?

Visar nu  $\Leftarrow$

Antag att  $u$  är en svag lösning  $\star$  ty vi antar  $\mathbf{k} \in H_0^1(D)$

$\bullet u \in H_0^1(D) \Rightarrow$  ② gäller

green

$\downarrow$

$$\text{För att visa ①: } -\iint_D \Delta u \cdot \mathbf{k} dx = \int_{\partial D} \partial_y u \cdot \mathbf{k} ds - \iint_D \nabla u \cdot \nabla \mathbf{k} dx$$

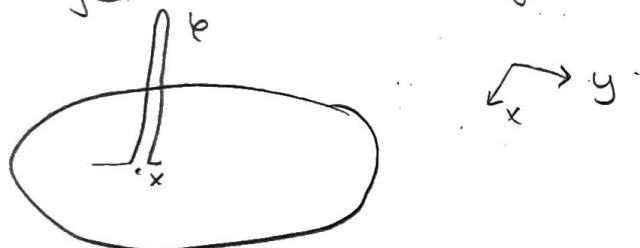
$$= \iint_D f \cdot \mathbf{k} dx$$

enligt  $D$   
antagande  $\star$

$\therefore -\Delta u = f$  i distributionsmening

Grenom att låta  $\mathbf{k} \xrightarrow{\text{svagt}} s_x$  för given  $x \in D$

följer  $-\Delta u = f$  i varje  $x$  där  $\Delta u$  och  $f$  är kontinuerliga



### Finita elementmetoden FEM

Ett variationsproblem  $(V, a, L)$  lösas numeriskt genom att approximera funktionsrummet  $V$  med ett ändlig dimensions underrum  $V_N$  med bas  $e_1, e_2, \dots, e_N$ .

Lösningen  $u$  sökes i  $V_N$ :  $u(x) = u_1 \cdot e_1(x) + u_2 \cdot e_2(x) + \dots + u_N \cdot e_N(x)$  och vi kräver  $a(u, v) = L(v)$  för  $v = e_1, \dots, e_N$

$$\text{Linjäritet} \Rightarrow a(u, e_i) = \sum_{j=1}^N u_j a(e_j, e_i) = L(e_i), \quad i=1, \dots, N$$

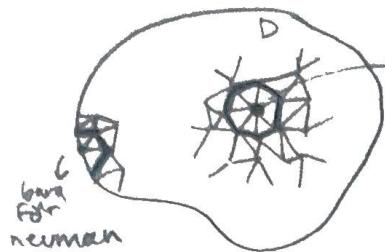
$$\therefore \vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} \text{ löser } A\vec{u} = b$$

$(A_{ij}) (b_i)$

## Exempel

För Dirichletproblemet är  $A_{ij} = \iint_D \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx$   
och  $b_i = \iint_D f(x) \cdot \varphi_i(x) dx$

Enklaste valet av FEM-basfunktioner  $\varphi_i$  är tältfunktioner för en given triangulering av  $D$ .



nod  $i$   $i$  är en inte nod  $\varphi_i = 1$  i nod  $i$   
och  $\varphi_i = 0$  i alla andra noder och  
 $\varphi_i$  är linjär på varje triangel

## Exempel

Variationsformulering av Neuman problemet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{i } D \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{på } \partial D \end{cases} \quad \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix}$$

skit i randvärden?

Välj nu funktionrummet  $V = H^1(D)$  (Inga randvärden för  $v$ )

För att finna  $a, L$ : multiplicera med  $\varphi \in H^1(D)$  och använd Green

$$\iint_D f \cdot \varphi dx = - \iint_D \Delta u \cdot \varphi dx \stackrel{\text{Green}}{=} - \int_{\partial D} \partial_\nu u \cdot \varphi ds + \iint_D \nabla u \cdot \nabla \varphi dx$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\iint_D \nabla u \cdot \nabla \varphi dx}_{=: a(u, \varphi)} = \underbrace{\iint_D f \cdot \varphi dx}_{=: L(\varphi)} + \underbrace{\int_{\partial D} g \cdot \varphi ds}_{=: L(\varphi)}$$

Vi har visat att:

$u$  löser

$u \in H^1(D)$  löser variationsproblem

$$① \text{ och } ② \Rightarrow$$

$$\iint_D \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \iint_D f \cdot \varphi dx + \int_{\partial D} g \cdot \varphi ds$$

Vi visar nu  $\Leftarrow$

$$\forall \varphi \in H^1(D)$$

$$② ??$$

① : Antag att  $u$  är en svag lösning

$$-\iint_D \Delta u \cdot \varphi dx \stackrel{\text{Green}}{=} - \int_{\partial D} \partial_\nu u \cdot \varphi + \iint_D \nabla u \cdot \nabla \varphi dx \stackrel{\text{antagandet}}{=}$$

$$- \int_{\partial D} \partial_\nu u \cdot \varphi ds + \iint_D f \cdot \varphi dx + \int_{\partial D} g \cdot \varphi ds =$$

$$\int_{\partial D} (\partial_\nu u - g) \mathbf{k} ds = \iint_D (\Delta u + f) \mathbf{k} dx \quad \forall \mathbf{k} \in H^1(D)$$

\* Tag först bara  $\mathbf{k} \in H_0^1(D)$

$$\Rightarrow \iint_D (\Delta u + f) \mathbf{k} dx = 0 \quad \forall \mathbf{k} \in H_0^1(D)$$

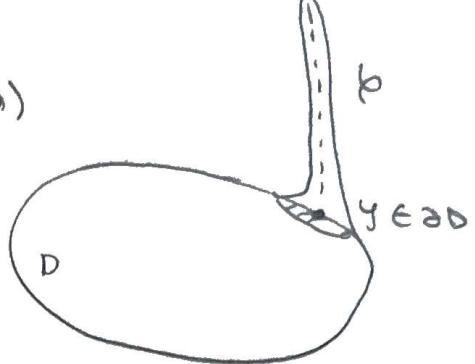
Som i Dirichletproblemet följer  $-\Delta u = f$  i  $D$

\* Eftersom  $-\Delta u(x) = f(x) \quad \forall x \in D$

$$\text{följer } \int_{\partial D} (\partial_\nu u - g) \mathbf{k} ds = 0 \quad \forall \mathbf{k} \in H^1(D)$$

Låt  $\mathbf{k} \xrightarrow{\text{svagt}} \delta_y$  på  $\partial D$  för  
givet  $y \in \partial D$

$$x \rightarrow y$$



$\therefore \partial_\nu u = g$  i distributionsmening

så  $\partial_\nu u(y) = g(y)$  i varje punkt där  $\partial_\nu u$  och  $g$  är kontinuerliga

OBS! (2) följer "automatiskt" från  $a(u, \mathbf{k}) = L(\mathbf{k})$

### Definition

Antag att ett BVP har en variationsformulerings  $(V, a, L)$   
Ett randvillkor sägs vara väsentligt om det  
förekommer i definitionen av  $V$ . Annars kallas det för  
naturligt

t.ex. Dirichlet BC är väsentligt:  $V = H_0^1(D)$   
Neumanns BC är naturligt:  $V = H^1(D)$

### FÖRELÄSNING 6 (14/11-2023)

Fråga: När finns det säkert en lösning  $u \in V$  till ett givet  
variationsproblem?  
Viljan  $\rightarrow a(u, \mathbf{k}) = L(\mathbf{k}) \quad \forall \mathbf{k} \in V$ . Svarat är Lax-Milgrams sats

### Lax-Milgrams sats

$$\Rightarrow |a(u, \mathbf{k})| \leq c_1 \|u\| \|\mathbf{k}\|$$

$(V, a, L)$  givena. Antag:

- $V$  är ett Hilbertrum (dvs skalärprodukt och fullständigt)
- $a$  är begränsad och koersiv ( $a(u, u) \geq c \cdot \|u\|^2$ )
- $L$  är begränsad ( $\|L(\mathbf{k})\| \leq c_2 \|\mathbf{k}\|$ )

Då existerar en lösning  $u$  till variationsproblemet

### Beweis

Entydigheten är enkel att bevisa. Antag  $u_1, u_2$  är  
lösningar, så  $u = u_1 - u_2 \in V$   
 $\Rightarrow a(u_1 - u_2, \mathbf{k}) = 0 \quad \forall \mathbf{k}$  ty linjäritet. Välj  $\mathbf{k} = u_1 - u_2$

endimensionell  
dirac-δ på  
randen!

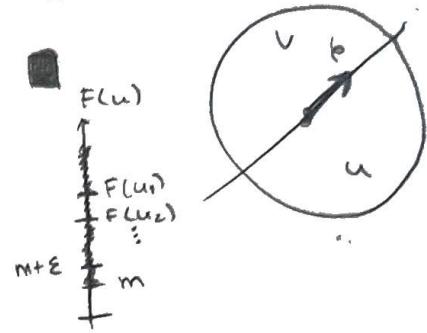
Vi ska nu bevisa existensen. Vi väljer att bevisa för symmetriska  $a(a(u, v) = a(v, u))$

### Lemma

Antag  $(V, a, L)$  som i L-M sats och att  $a$  är symmetrisk. Då poserar  $a$  problemet om  $u$  minimerar  $\frac{1}{2}a(u, u) - L(u) =: F(u)$

### Bevis ( $\Leftarrow$ )

Antag att  $u$  minimerar  $F(u)$ , hat  $b \in V$  och låt  $f(t) = F(u+t b)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .  $f$  antar min i  $t=0 \Rightarrow f(0) = 0$ .  $f'(t) = \frac{1}{2}(a(u, u) + 2t(u, b) + t^2 a(b, b)) - L(u) - tL'(b)$   
 $\Rightarrow \frac{1}{2}2a(u, b) - L'(b) = 0$  (vid  $f'(0)$ )



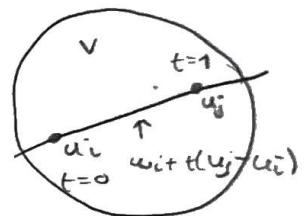
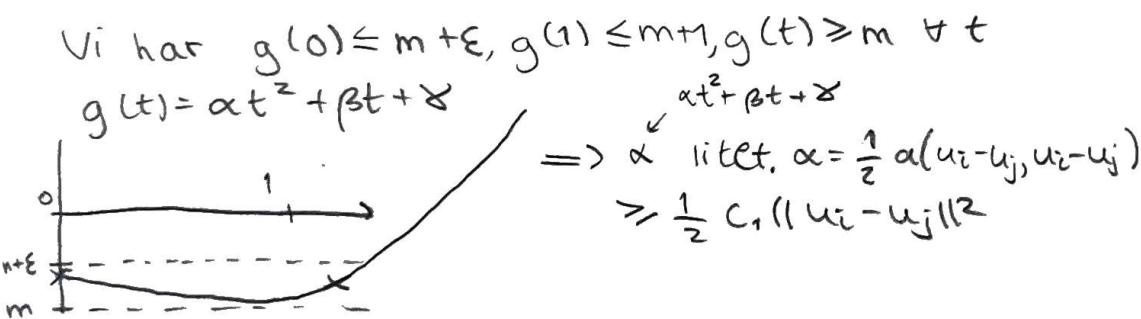
Vi fortsätter nu med beviset av L-M  
Vi visar att  $F(u)$  antar ett minimum.

$$F(u) \geq \frac{1}{2}c_1 \|u\|^2 - c_2 \|u\| \geq -\frac{1}{2} \frac{c_2^2}{c_1} \quad \text{parabel}$$

$F(u)$  är nedåt begränsad. Låt  $m := \inf_{u \in V} F(u)$   
Tag  $u_1, u_2, \dots$  s.a.  $F(u_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} m$

Det räcker att visa att  $\|u_i - u_j\| \rightarrow 0$  då  $i, j \rightarrow \infty$   
(Att det räcker visas med funktionalanalys)

Låt  $\varepsilon > 0$ . Välj  $i, j$  stora s.a.  $F(u_i) \leq m + \varepsilon$ ,  $F(u_j) \leq m + \varepsilon$ . Betrakta  $g(t) = F(u_i + t(u_j - u_i))$



### Exempel

Dirichletproblem - $\Delta u = f$  i  $D$ ,  $u = 0$  på  $\partial D$ . Denna har variationalformulering

$$\underbrace{\iint_D \nabla u \cdot \nabla b \, dx dy}_{a} = \underbrace{\iint_D f \cdot b \, dx dy}_{l} \quad \forall b \in H_0^1(D) \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{Uppfyller dessa kraven} \\ \downarrow \\ \text{för Lax-Milgram?} \end{matrix}$$

- $H_0^1(D) \subseteq H^1(D)$  som är ett Hilbertrum  $\Rightarrow H_0^1(D)$  är också ett Hilbertrum
- $a = \iint_D \nabla u \cdot \nabla b \, dx dy$ . Begränsat?
- $\|a\| = \left\| \iint_D \nabla u \cdot \nabla b \, dx dy \right\| \leq \iint_D |\nabla u| |\nabla b| \, dx dy$

$$\leq \left( \iint_D |\nabla u|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \iint_D |\nabla v|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_1 \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

Koersiv?

$$a = \iint_D |\nabla u|^2 dx dy \stackrel{?}{\geq} C_1 \|u\|_{H^1}^2 \quad \|u\|_{H^1}^2 = \iint_D (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx dy \stackrel{\substack{u \in H^1 \\ \text{(0 på randen)}}}{\leq} (1+C) \iint_D |\nabla u|^2 dx dy \stackrel{\text{Poincaré}}{\leq}$$

$$C_1 = \frac{1}{1+C} \Rightarrow \text{koersiv}$$

$$\bullet |L(b)| \leq \underbrace{\left( \iint_D |f|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}}_{C_2} \underbrace{\left( \iint_D |b|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}}_{\|b\|_{H^1}} \Rightarrow L \text{ begränsad (om } f \in L_2)$$

$L-M$   $\Rightarrow \exists$  en lösning till Dirichletproblem (om  $f \in L_2$ )

### Värmelednings IVP (startvärdesproblem)

Givet källa och  $f(t, \bar{x})$  och startdata  $g(\bar{x})$

$$\begin{cases} \partial_t u = k \Delta u + f, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{I}) \\ u = g, & t = 0, x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{II}) \end{cases}$$

Löses typiskt med Fouriertransformen vid fix  $t$  (transformera  $x$ )

$$\hat{u}(t, \xi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(t, x) e^{-ix \cdot \xi} dx, \text{ eftersom PDE:n gäller på hela } \mathbb{R}^n \text{ (ingen rand)}$$

$$(\text{I}) : F\{\partial_t u\} = k F\{\Delta u\} + F\{f\} \Leftrightarrow \partial_t \hat{u}(t, \xi) = -k |\xi|^2 \hat{u}(t, \xi) + \hat{f}(t, \xi)$$

Fixera  $\xi$  och lös som ODE i  $t$

$$\text{Integrerande faktor } e^{\int k|\xi|^2 t} \Rightarrow \frac{d}{dt} (e^{\int k|\xi|^2 t} \hat{u}) = e^{\int k|\xi|^2 t} \hat{f}$$

$$e^{\int k|\xi|^2 t} \hat{u}(t, \xi) = c(\xi) + \int_0^t e^{\int k|\xi|^2 s} \hat{f}(s, \xi) ds \Rightarrow \hat{u}(t, \xi) = \hat{g}(\xi) e^{-\int k|\xi|^2 t} + \int_0^t e^{-\int k|\xi|^2 (t-s)} \hat{f}(s, \xi) ds$$

Vi måste nu inverstransformera för att ha  $x$  istället

### Definition

Värmekärnan  $H_t(x)$  är funktionen s.a.  $F\{H_t(x)\} = e^{-kt|\xi|^2}$ , där  $H_t(x) = \frac{1}{(4\pi kt)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4kt}}$

Kom nu ihåg faltungens

$$\Rightarrow u(t, x) = g(x) * H_t(x) + \int_0^t H_{t-s}(x) * f_s(x) ds$$

(2.4) Intervall  $D = (0, N+1)$ , Dirichlets BC.

Testfunktioner:  $b_j(x) = \max(0, \min(1-j+x, 1+j-x), j=1, \dots, N)$

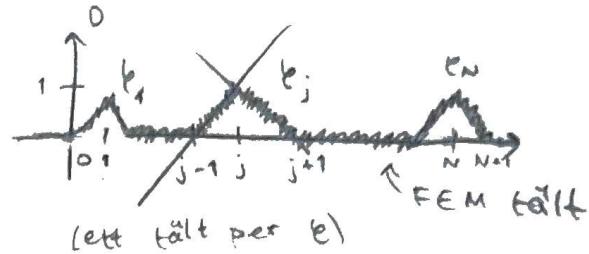
Beräkna styrhetsmatrisen  $A_{ij} = \int_D \nabla b_i \cdot \nabla b_j dx$ . Vad har A för "struktur"?

Lösning

3 fall  
 $\bullet i=j: A_{ij} = \int_{j-1}^{j+1} (\pm 1)^2 dx = 2$

$\bullet i=j\pm 1: A_{ij} = \int_j^{j+1} (+1)(-1) dx = -1$

$\bullet$  Annars  $A_{ij} = 0$



$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & \ddots & -1 & 0 & \dots \\ \vdots & & & & & & \end{bmatrix}$$

skillnad mat  
2-dim, tabell,  
överlappar  
är annorunda

Struktur: A är gles: Många  
 $A_{ij} = 0$

(2.3)  $\begin{cases} -\Delta u = f \text{ i } D & [1] \\ u = 0 \text{ på } \Gamma_D \subset \partial D & [2] \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ på } \Gamma_N \subset \partial D & [3] \end{cases}$

$$\partial D = \Gamma_D \cup \Gamma_N$$

↓  
Dirichlet  
Neumann

BVP med blandade Dirichlet/Neumann BC.

Variationsformulera, visa ekvivalens med BVP, och kontrollera om villkoren i Lax-Milgrens sats är uppfyllda.

Lösning

Sätt  $V = \{u \in H^1(D); u=0 \text{ på } \Gamma_D\}$  Tag  $\mathbf{k} \in V$

$$[1] \Rightarrow \iint_D -\Delta u \cdot \mathbf{k} dxdy = \iint_D f \cdot \mathbf{k} dxdy$$

$\underbrace{\quad}_{L(\mathbf{k})}$

$$\int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial \nu} \mathbf{k} ds = \int_{\Gamma_N} 0 \mathbf{k} ds + \int_{\Gamma_D} 0 \mathbf{k} ds$$

$$-\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot \mathbf{k} ds + \iint_D \nabla u \cdot \nabla \mathbf{k} dxdy = \iint_D \nabla u \cdot \nabla \mathbf{k} dxdy$$

$\underbrace{\quad}_{a(u, \mathbf{k})}$

• Ekvivalensen: Antag  $u \in V$  löser  $a(u, \mathbf{k}) = L(\mathbf{k}) \quad \forall \mathbf{k} \in V$   
 Behöver visa att  $u$  löser  $[1][2][3]$ .

$\hookrightarrow u \in V \Rightarrow [2]$

Vi har:  $\iint_D \nabla u \cdot \nabla \mathbf{k} dxdy = \iint_D f \cdot \mathbf{k} dxdy + \mathbf{k}$

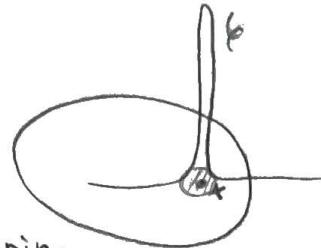
Green →

$$\iint_D \nabla u \cdot \nabla \mathbf{k} dx dy = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{k} ds - \iint_D \Delta u \cdot \mathbf{k} dx dy =$$

$$0 + \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{k} ds - \iint_D \Delta u \cdot \mathbf{k} dx$$

$$\Leftrightarrow \iint_D (\Delta u + f) \mathbf{k} dx dy = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{k} ds$$

Välj först  $\mathbf{k} \in H_0^1(D)$ :



$$\iint_D (\Delta u + f) \mathbf{k} dx dy = 0$$

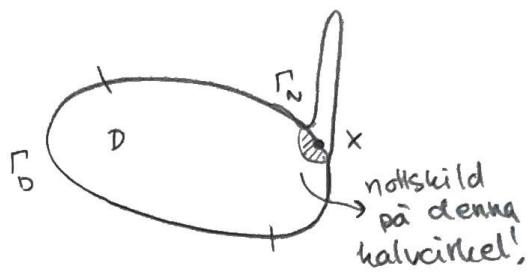
$\therefore -\Delta u = f$  i distributions mening

och därmed i varje punkt  $x$  där  $\Delta u$  och  $f$  är kontinuerta

⇒ ① gäller

Vi har nu att  $0 = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{k} ds \quad \forall \mathbf{k} \in V$

Det följer att  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0$  på  $\Gamma_0$  genom att välja  $\mathbf{k}$  som i figuren.



$$V = \{u \in H^1(D); u=0 \text{ på } \Gamma_0\}$$

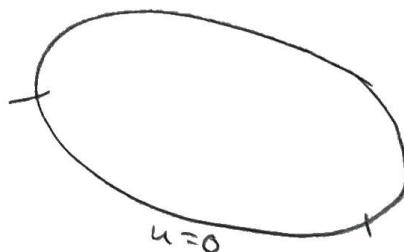
$$a(u, \mathbf{k}) = \iint_D \nabla u \cdot \nabla \mathbf{k} dx dy$$

$$L(\mathbf{k}) = \iint_D f \cdot \mathbf{k} dx dy \quad \text{Kontrollera Lax-Milgram's villkor!}$$

- $H^1(D)$  är ett Hilbertrum,  $V$  är ett slutet underrum, så även  $V$  är ett Hilbertrum
- $a(u, \mathbf{k})$ , bilinjär, begränsad, koersiv

Gäller  $\underbrace{a(u, u)}_{\geq c} \geq c \underbrace{\|u\|_{H^1}}$ , om  $u \in V$ ?

$$\left( \iint_D |\nabla u|^2 dx dy \right) \left( \iint_D (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx dy \right)$$



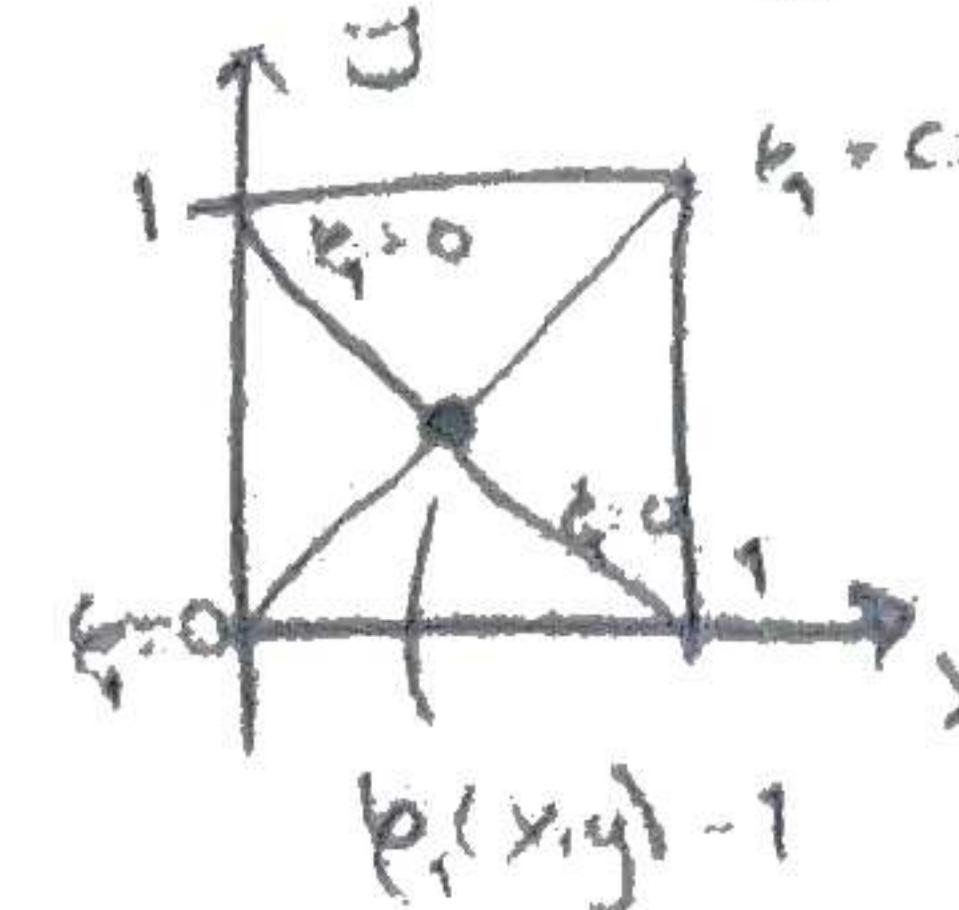
$V$  innehåller inga konstanta funktioner, så Poincaré's olikhet gäller

$$\iint_D (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx dy \leq \iint_D (|\nabla u|^2 + C |\nabla u|^2) dx dy \leq \\ (1+C) \iint_D |\nabla u|^2 dx dy$$

(visa också L begränsad, se lösningsförslag)

2.7  $\Delta u = -4$  på  $D: 0 < x, y < 1$

Approximera  $u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  mha FEM med en nod. Antag  $u=0$  på  $\partial D$



Lösning:

FEM för Dirichletproblem

$$\iint_D \nabla u \cdot \nabla b \, dx \, dy = \iint_D 4 \cdot b \, dx \, dy, \quad b \in H_0^1(D)$$

Discretisering  $u(x,y) \approx u_1 \cdot b_1(x,y)$ , välj  $b = b_1$

$$\Rightarrow u_1 \underbrace{\iint_D |\nabla b_1|^2 \, dx \, dy}_{4 \cdot \iint_{\text{1 triangel}} \, dx \, dy} = 4 \iint_D b_1 \, dx \, dy = 8 \int_0^{\frac{1}{2}} (2y) \, dx = 8 \cdot \frac{(\frac{1}{2})^3}{3} = \frac{1}{3}$$

$\rightarrow$  riktning derivata

$$\Rightarrow u_1 = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{4} = \frac{1}{3} \quad \text{svar: } u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \approx u_1 = \frac{1}{3}$$

2.13  $\begin{cases} -\operatorname{div}(B(x,y) \nabla u(x,y)) = f & : D \subseteq \mathbb{R}^2 \\ u=0 \text{ på } \partial D \end{cases}$

$B(x,y)$  är en symmetrisk  $2 \times 2$  matriks positivt definit med egenvärden

$$0 < c_1 < \lambda_1(x,y), \quad \lambda_2(x,y) \leq c_2 < \infty$$

Variationsformulera!

Lösning:

$$V = H_0^1(D) \text{ väljs } \iint_D -\operatorname{div}(B \nabla u) \cdot b \, dx \, dy = \iint_D f \cdot b \, dx \, dy$$

D vektorfält F

$$-\underbrace{\int_{\partial D} u \cdot (B \nabla u) \cdot \frac{\partial n}{\partial u_B} \, ds}_{\text{"u konormalderivata"}}$$

$$+ \iint_D (B \nabla u) \cdot \nabla b \, dx \, dy$$

L(b)

a(u, b)

FÖRELÄSNING 7 16/11-2023

Fouriertransformering av distributioner

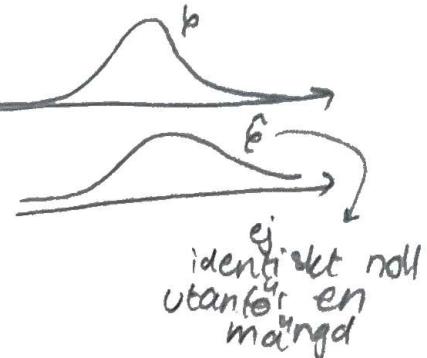
Givet  $F \in D'(\mathbb{R}^n)$ . Vad är  $\hat{F}(\xi)$ ? Fel fråga. Vad är  $\langle \hat{F}, b \rangle$ ? medelvärde

Om  $F$  är en "snäll" funktion:

$$\langle \hat{F}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{F}(\xi) \cdot \varphi(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} F(x) \left( \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi) e^{-i\xi \cdot x} d\xi}_{\hat{\varphi}(x)} \right) dx$$

Tekniskt problem:

$\varphi$  testfunktion  $\Rightarrow \hat{\varphi}$  är en testfunktion  
(för  $\hat{\varphi}(\xi) \neq 0$  nästan överallt)



Vi behöver:

- En större klass av testfunktioner

$$S(\mathbb{R}^n) = \{ \text{Schwartz} \} \stackrel{\text{med t. w.f.}}{\supseteq} \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

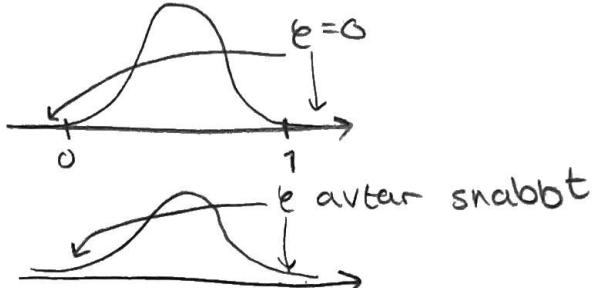
- en mindre klass av distributioner

$$S'(\mathbb{R}^n) = \{ \text{tempererade distributioner} \} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

### Exempel på testfunktioner

- $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} \cdot e^{-\frac{1}{1-x}}, & 0 < x < 1 \\ 0, & x \leq 0, x \geq 1 \end{cases}$$



- $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$

Alla  $\varphi$ :s derivator är  $O(|x|^{-N})$   
för alla  $N < \infty$  då  $x \rightarrow \infty$      $\varphi(x) = e^{-x^2}$

- $F \in S'(\mathbb{R}^n)$ :     $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$

$$\varphi \mapsto \langle F, \varphi \rangle$$

linjär

- $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ :     $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\varphi \mapsto \langle F, \varphi \rangle$$

linjär

### Exempel

Diracdeltat  $\delta_a$  är en tempererad distribution

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a) \text{ existerar } \forall (\varphi \in S(\mathbb{R}^n))$$

### Exempel

$f(x) = e^x$  är en distribution men ej en tempererad distribution

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^x \varphi(x) dx$$

Tag t.ex.  $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}}$  ∈ SCR men  $\int_{-\infty}^{\infty} e^x e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}} dx$   
existerar ej

$$\approx e^{x - \frac{1}{2}x} = e^{\frac{1}{2}x}$$

### Lärdom

Tempererade distributioner som "växer högst polynomieligt  
då  $|x| \rightarrow \infty$ "

### Lemma (3.12)

$$\varphi \in SCR^n \Rightarrow \hat{\varphi} \in SCR^n$$

### Beweis

$$(n=1) \quad \hat{\varphi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(-ix)^k}_{=: \varphi_k(x)} \underbrace{\varphi(x)} e^{-ix\xi} dx \text{ existerar}$$

$$= \varphi_k(x)$$

avtar snabbt

$$\leq C$$

$$\left| (i\xi)^n \hat{\varphi}^{(k)}(\xi) \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\varphi_k(x)}_{\downarrow} \underbrace{(i\xi)^n e^{-ix\xi}}_{\uparrow} dx \right| \stackrel{PT}{=} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{\partial^n \varphi_k(x)}{\partial x^n}}_{\text{avtar snabbt}} \cdot e^{ix\xi} dx \right|$$

■

### Definition

Tempererade distributioner  $F \in S'(\mathbb{R}^n)$  har Fouriertransform  
 $\hat{F} \in S'(\mathbb{R}^n)$  given av  $\langle \hat{F}, \varphi \rangle := \langle F, \hat{\varphi} \rangle \quad \forall \varphi \in SCR^n$

### Exempel

$$F = \delta_a \text{ punkt massa} \Rightarrow \langle \hat{F}, \varphi \rangle = \langle F, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(a) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-ixa} dx$$

$$= \langle e^{-ixa}, \varphi \rangle \because \delta_a \text{ är funktionen } e^{-ixa}$$

$$\text{Speciellt är } \hat{\delta}_0 = 1$$

### Riemann funktionen

Vi löser IVP för (VÅ) med Fouriertransformering

$$\partial_t^2 u = c^2 \Delta u$$

$$\partial_t^2 \hat{u}(t, \xi) = c^2 (-|\xi|^2) \hat{u}(t, \xi)$$

Den allmänna lösningen är:

$$\hat{u}(t, \xi) = A(\xi) \cos(c|\xi|t) + B(\xi) \sin(c|\xi|t)$$

Med startdata

$$u(0, x) = g(x), \quad \partial_t u(0, x) = h(x) \text{ fås}$$

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{g}(\xi) \cos(c|\xi|t) + \hat{h}(\xi) \frac{\sin(c|\xi|t)}{c|\xi|} \rightarrow B(\xi)$$

Definition

Riemannfunktionen  $R_t(x)$  har Fouriertransform

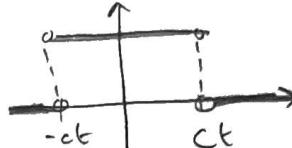
$$F\{R_t(x)\} = \frac{\sin(c|\xi|t)}{c|\xi|}$$

Vet vi  $R_t(x)$  har vi löst IVP för (VÅ):

$$u(t, x) = h(x) * R_t(x) + \frac{\partial}{\partial t} (g(x) * R_t(x))$$

n=1:

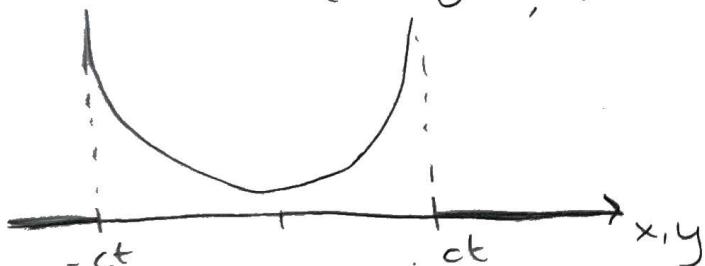
$$R_t(x) = \begin{cases} \frac{1}{2c}, & |x| < c \cdot t \\ 0, & |x| > c \cdot t \end{cases}$$



$$\hat{R}_t(\xi) = \int_{-ct}^{ct} \frac{1}{2c} e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{2c} \frac{e^{-ict\xi} - e^{ict\xi}}{i\xi} = \frac{\sin(c|\xi|t)}{c|\xi|}$$

n=2:

$$R_t(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi c} \frac{1}{\sqrt{c^2 t^2 - x^2}}, & |x| < ct \\ 0, & |x| > ct \end{cases}$$



$$\hat{R}_t(\xi) = \frac{1}{2\pi c} \iint_{\substack{(x_1, x_2) \\ x_1^2 + x_2^2 \leq ct}} e^{\frac{i x_1 \xi_1 - i x_2 \xi_2}{\sqrt{c^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2}}} dx_1 dx_2$$

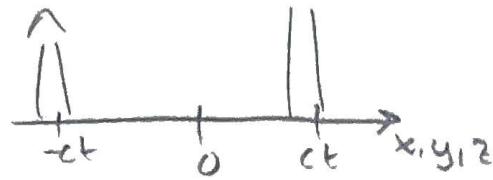
Antag  $\xi = (1|\xi|, 0)$  genom att välja bas

$$\begin{aligned} \hat{R}_t(\xi) &= \frac{1}{2\pi c} \iint_{\substack{x_1^2 + x_2^2 \leq ct \\ x_1^2 + x_2^2 \leq ct}} \frac{e^{-ix_1/\xi_1}}{\sqrt{c^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2}} dx_1 dx_2 = \frac{1}{2\pi c} \iint_{\substack{ct \\ -\sqrt{c^2 t^2 - x_1^2} \\ -\sqrt{c^2 t^2 - x_1^2}}} \frac{1}{\sqrt{c^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2}} dx_2 e^{-ix_1/\xi_1} dx_1 \\ &= \dots = \frac{\sin(c|\xi|t)}{c|\xi|} \end{aligned}$$

n=3:  $R_t$  är distributionen

$$\langle R_t, \varphi \rangle = \frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{|x|=ct} \varphi(x) dS(x)$$

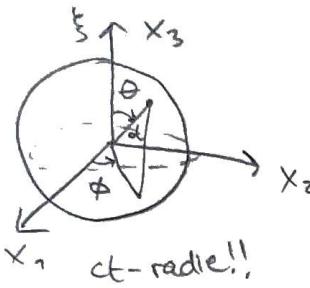
lite missvisande  
ändlig sfär fast  
↑ inte



$$\langle \hat{R}_t, \varphi \rangle = \langle R_t, \hat{\varphi} \rangle$$

$$= \frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{|x|=ct} \hat{\varphi}(x) dS(x) =$$

$$\left\{ \hat{\varphi}(x) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \varphi(\xi) e^{-ix\xi} d\xi \right\} = \iiint_{\mathbb{R}^3} \varphi(\xi) \left( \iint_{|x|=ct} e^{-ix\xi} dS(x) \right) d\xi$$



Sfäriska koordinater  $\Rightarrow$

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{-i|\xi|ct \cos(\theta)} (ct)^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$$

$$= 2\pi (ct)^2 \left[ \frac{1}{i|\xi|} e^{-i|\xi|ct \cos(\theta)} \right]_{\theta=0}^{\pi} = \frac{2\pi ct}{i|\xi|} (e^{i|\xi|ct} - e^{-i|\xi|ct})$$

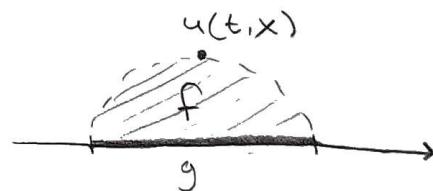
$$\text{gånger } (*) \Rightarrow \frac{\sin(|\xi|ct)}{c|\xi|}$$

FÖRELÄSNING 8 17/11-2023

### Lösningsformler IVP

$$(VÄ) \quad \begin{cases} \partial_t u = k \Delta u, & t > 0 \\ u = g(x), & t = 0 \end{cases}$$

$$u(t, x) = g * H_t(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \frac{1}{4\pi k t^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4kt}} dy$$

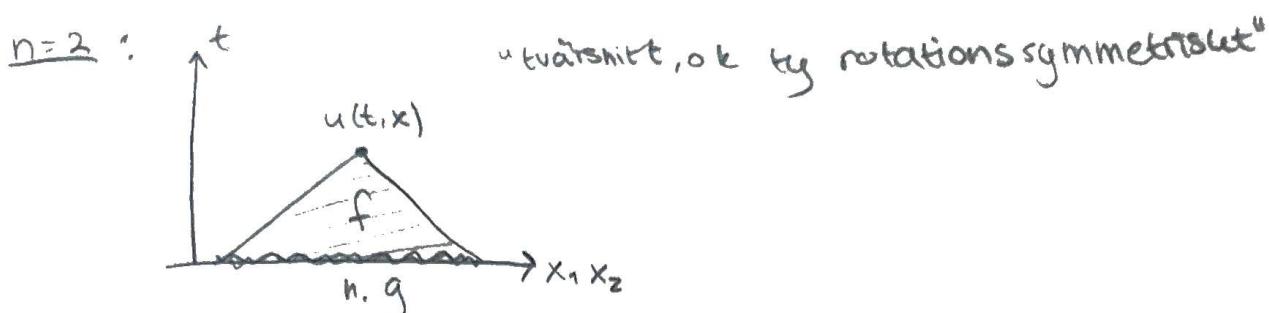
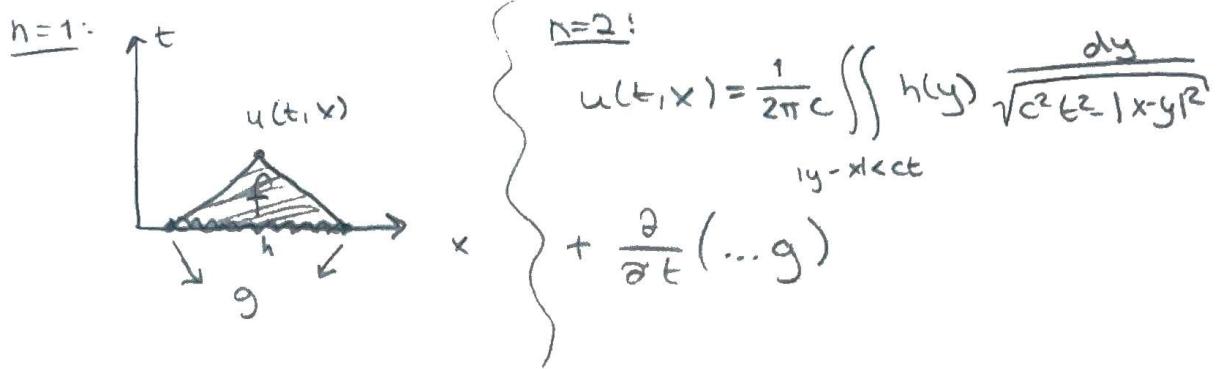


$\therefore u(t, x)$  beror på  $g(y)$   $\forall y \in \mathbb{R}^n$ , men mycket lite då  $|y-x| \gg \sqrt{kt}$

$$(VÅ) \quad \begin{cases} \partial_t^2 u = c^2 \Delta u, & t > 0 \\ u = g(x), & t = 0 \\ \partial_t u = h(x), & t = 0 \end{cases} \Rightarrow u(t, x) = h(x) * R_t(x) + \partial_t(g(x) * R_t(x))$$

n=1: d'Alemberts formel:

$$u(t, x) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) dy + \frac{1}{2} (g(x+ct) + g(x-ct))$$

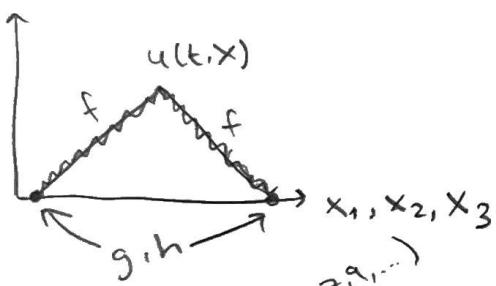


n=3: Kirchoffs formel

$$u(t, x) = \iiint_{R^n} h(y) R_t(x-y) dx + \dots$$

$\{ R_t$  är en sfärisk S-distribution, så  $\iiint \rightarrow \iint dS \}$

$$= \frac{t}{4\pi c^2 t^2} \iint_{|y-x|=ct} h(y) dS(y) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi c t} \iint_{|y-x|=ct} g(y) dS(y) \right)$$



### Utberednings hastighet

(VÅ) Låt  $g=0$  och  $h=\delta_0$ .

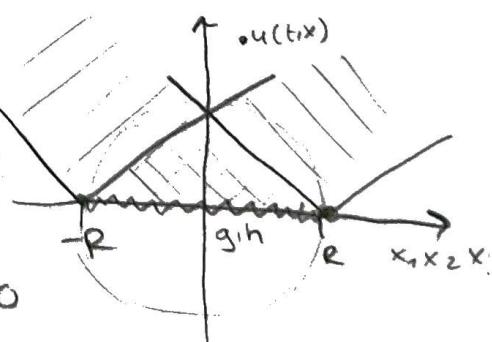
$$\Rightarrow u(t, x) = S_0 * R_t(x) = R_t(x)$$

$$R_t(x) = 0 \text{ om } |x| > ct$$

Dimension  $n=3$  är speciell, då gäller Huygens princip: =  
 $R_t(x) = 0$  även för  $|x| < ct$

### Exempel

Låt  $n=3$  och  $g(y) = h(y) = 0$  för  $|y| > R$   
 Om  $t > \frac{|x|+R}{c}$  har vägen från IC  
 $g$  och  $h$  helt passerat och  $u(t, x) = 0$



$$(\text{VÄ}) \text{ Låt } g = \delta_0 \xrightarrow{\text{värmetränan}} \Rightarrow u(t, x) = \delta_0 * H_t(x) = H_t(x) = \frac{1}{(4\pi k t)^{1/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4kt}}$$

$u(t, x) > 0$  för alla  $t > 0, x \in \mathbb{R}^n$

så (VÄ) har oändlig utbredningshastighet

Fouriers lag är inte helt fysikalisk!

Men för  $|x| > \sqrt{kt}$  är dock  $u(t, x) \approx 0$

### Reversibilitet

Kan vi utifrån startdata beräkna  $u(t, x)$  för  $t < 0$ ?

$$(\text{VÄ}) \hat{u}(t, \xi) = \hat{g}(\xi) \cdot e^{-k|\xi|^2 t}$$

$$(\text{VÅ}) \hat{u}(t, \xi) = \hat{g}(\xi) \cos(c|\xi|t) + \hat{h}(\xi) \frac{\sin(c|\xi|t)}{c|\xi|}$$

- Värmeleddning är en ireversibel process: för  $t < 0$  är  $e^{(kt)|\xi|^2} > 0$  ej en tempererad distribution, så  $H_t$  existerar ej för  $t < 0$ .
- Vägutbredning är en reversibel process, lösningsformeln för  $\hat{u}(t, \xi)$  kan inverstransformeras även för  $t < 0$ .

### Energi bevarande för (VÅ)

Antag  $\partial_t^2 u = c^2 \Delta u$  i  $D$ , med homogena Dirichlet eller Neumann randvillkor. Betrakta vägens energi vid  $t$ :

$$E(t) = \int \left( c^{-2} \underbrace{(\partial_t u)^2}_{\text{rörelseenergi}} + \underbrace{|\nabla u|^2}_{\text{potentiell energi}} \right) dx$$

$$E'(t) = \int \left( c^{-2} \cdot 2 \partial_t u \cdot \partial_t^2 u + 2 \underbrace{(\partial_t \nabla u) \cdot (\nabla u)}_{\nabla(\partial_t u)} \right) dx \stackrel{\text{green}}{=} -$$

$$-\int_D \partial_t u \cdot \Delta u dx + 2 \int_D \partial_t u \cdot \partial_\nu u ds - 2 \int_D \partial_t u \cdot \Delta u dx = 0$$

Detta leder till ett entydighetsbevis för (VÅ). Antag  $u_1$  och  $u_2$  löser (VÅ) med samma källor, samma BC och samma IC. Låt  $u = u_1 - u_2$ .

Då  $\begin{cases} \partial_t^2 u = c^2 \Delta u \\ u=0 \text{ på } \partial D \\ \text{(eller } \partial_\nu u=0) \\ u=\partial_t u=0 \text{ vid } t=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow u(t, x) = 0 \quad \forall t, x$$

Vi får från räkningen ovan:

$E(t)$  är konstant för  $u$ .

$$\Rightarrow E(0) = 0$$

$$\Rightarrow E(t) = 0, \quad \forall t > 0$$

$$u(t, x) = C(t)$$

$$\int_D \left( c^{-2} \underbrace{(\partial_t u)^2}_{\text{rörelseenergi}} + \underbrace{|\nabla u|^2}_{\text{potentiell energi}} \right) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(t) = C \cdot C(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \star$$

# STORGRUPPSÖVNING

21/11-2023

$$(3.2) \quad \begin{cases} \partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u, & t > 0 \\ u = e^x, & t = 0 \\ \partial_t u = \sin(x), & t = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} = g(x) \\ = h(x) \end{matrix}$$

d'Alembert formel ger lösningen

$$u(t, x) = \frac{1}{2} (g(x-ct) + g(x+ct) + \frac{1}{2ct} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) dy) = \dots$$

Härledning av d'Alembert genom variabelbytet

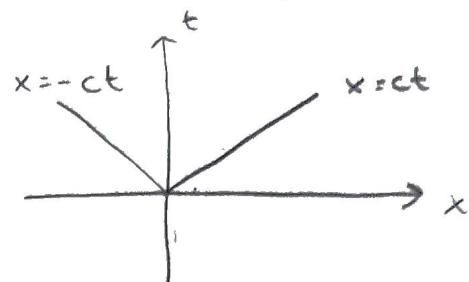
$$\text{Kedjeregeln: } \partial_x u = 1 \cdot \partial_\xi u + 1 \cdot \partial_\eta u$$

$$\partial_t u = c \partial_\xi u - \partial_\eta u$$

$$\Rightarrow (c(\partial_\xi - \partial_\eta))^2 u = c^2 (\partial_\xi + \partial_\eta)^2 u$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\partial_\xi \partial_\eta = 0} \quad \partial_\eta u = f(\eta)$$

$$u(\xi, \eta) = F(\eta) + g(\xi)$$



$$u(t, x) = F(x-ct) + g(x+ct)$$

$$u(0, x) = e^x = F(x) + g(x) \quad (\text{I})$$

$$\partial_t u(0, x) = \sin(x) = -cf(x) + cg'(x) \quad (\Leftrightarrow)$$

$$-\cos(x) = -cf(x) + cg(x) + D \quad (\text{II})$$

$$c(\text{I}) + (\text{II}) \Rightarrow ce^x - \cos(x) = -2cg(x) + D$$

$$c(\text{I}) - (\text{II}) \Rightarrow ce^x + \cos(x) = 2cf(x) - D$$

$$\text{svar: } u(t, x) = \frac{1}{2c} (ce^{x-ct} + \cos(x-ct) + D) + \frac{1}{2c} (ce^{x+ct} - \cos(x+ct) - D)$$

*e<sup>x</sup> icke-tempererad distribution  
gör ej Fouriertransform*

$$(3.3) \quad \begin{cases} \partial_t u = k \partial_x^2 u - a \partial_x u, & a > 0, t > 0 \\ u = g(x), & t = 0 \end{cases} \quad \text{lös!}$$

Fouriertransformera  $x \rightarrow \xi$   $\hat{u}(t, \xi)$

$$\partial_t \hat{u} = k(i\xi)^2 - a(i\xi) \hat{u} = -(k\xi^2 + ia\xi) \hat{u}$$

Lös t-ODE:n:  $\hat{u}(t, \xi) = Ce^{-(k\xi^2 + ia\xi)t}$

$$t=0 \Rightarrow \hat{g}(\xi) = C \quad \text{alltså:}$$

$$\hat{u}(t, x) = \hat{g}(\xi) e^{-(k\xi^2 + ia\xi)t} = \hat{g}(\xi) \cdot e^{-k\xi^2 t} e^{-ia\xi t}$$

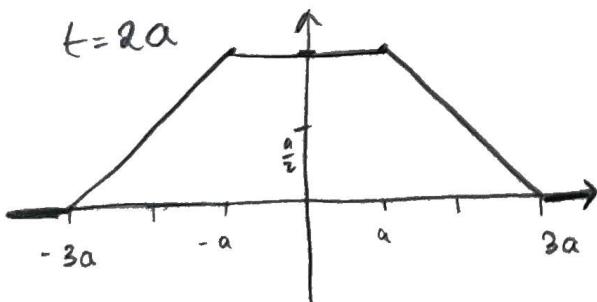
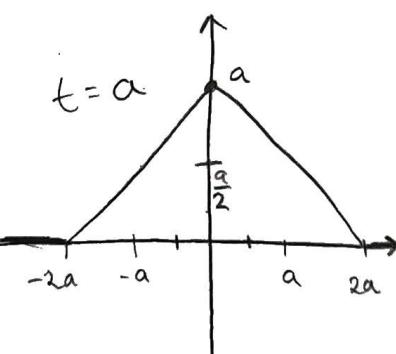
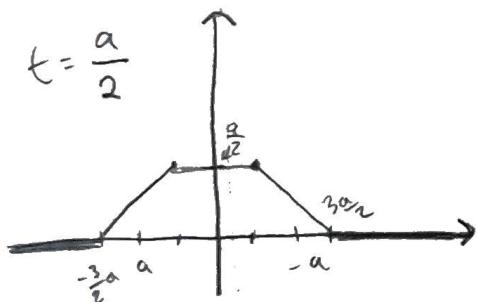
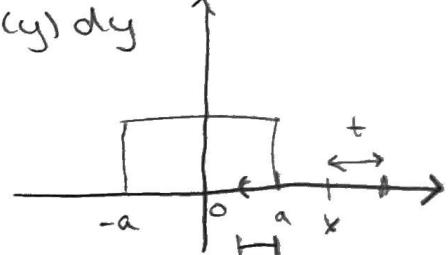
$x$	$\xi$
$f(x) * g(x)$	$\hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi)$
$f'(x)$	$i\xi \hat{f}(\xi)$
$g(x) * \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{ x ^2}{4t}}$	$\hat{g}(\xi) \cdot e^{-\frac{ \xi ^2}{4t}}$
$f(x-c)$	$\int f(x-y) e^{-iy\xi} dy = \int f(y) e^{-ic(y+c)\xi} dy$
<u>svar:</u> $u(t,x) = \int g(y) \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-ct-y)^2}{4t}}$	$= e^{ic\xi} \cdot \hat{f}(\xi)$

(3.4)  $\begin{cases} \partial_t^2 u = \partial_x^2 u & t > 0 \\ u=0 & t=0 \\ \partial_t u = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases} & \end{cases}$

Lös och skissa  $u$  vid  
 $t = \frac{a}{2}, t = a, t = 2a.$

d'Alembert formel  $\Rightarrow u(t,x) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy$

$$= \frac{1}{2} \left| \int_{-a}^a (h(y)) \chi_{(-a,a)}(y) dy \right|$$



(3.10) Visa att  $S_a * f$  är ett translat av  $f$ .

$$S_a(x) * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} S_a(y) \cdot f(x-y) dy = f(x-a)$$

o om  $y \neq a$

Fältnings av distributioner  $F$  och  $G$ :

$$\langle F * G, \epsilon \rangle = \int \left( \int F(y) G(x-y) dy \right) \epsilon(x) dx$$

$$= \iint F(y) G(z) k(z+y) dy dz$$

om  $F$  är en distribution  $\langle F * G, k \rangle = \langle F, \Psi \rangle$

$$\text{där } \Psi(y) = \int G(z) k(y+z) dz$$

(3.12)  $\begin{cases} \partial_t^2 u = \Delta u & , t > 0 \\ u = 0 & , t = 0 \\ \partial_t u = \begin{cases} 1 & , |x| < a \\ 0 & , |x| > a \end{cases} & \end{cases} \quad n=3$

Beräkna  $u(t, x)$

$\circ$ -källan i origo

Kirchoffs formel  $\Rightarrow$

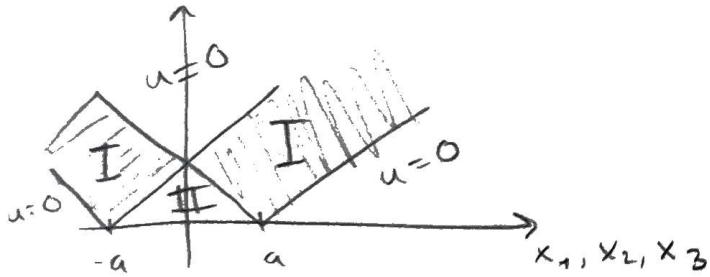
$$u(t, x) = \frac{1}{4\pi t} \iint_{|y-x|=ct} h(y) dS(y)$$

Cossinussatsen ger:

$$a^2 = t^2 + |x|^2 - 2t|x| \cos(\alpha) (*)$$

$$A = \int_0^a (t \cdot d\theta) 2\pi \sin(\theta) = 2\pi t \left[ -\cos(\theta) \right]_0^\alpha = 2\pi t (1 - \cos(\alpha))^{(*)} = 2\pi t \left( 1 - \frac{t^2 + |x|^2 - a^2}{2t|x|} \right) =$$

$$2\pi t \left( \frac{2t|x|}{2t|x|} - \frac{t^2 + |x|^2 - a^2}{2t|x|} \right) = \frac{\pi}{|x|} (a^2 - (t - |x|)^2)$$



svar:  $u(t, x) =$

$$\frac{1}{4\pi t} \cdot \frac{\pi}{|x|} (a^2 - (t - |x|)^2) =$$

$$\frac{1}{4|x|} (a^2 - (t - |x|)^2) \quad i \quad I$$

FÖRELÄSNING 9

23/11-2023

### Eigenfunktioner

#### Exempel

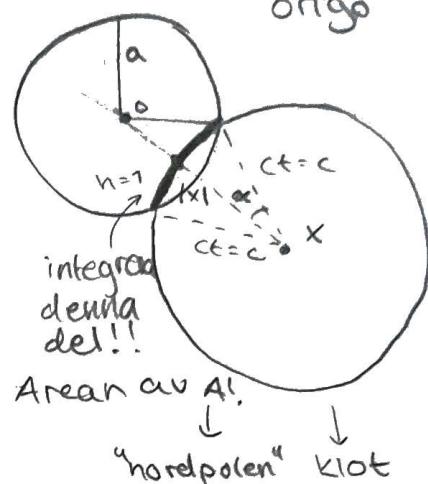
$$D = (0, \pi)$$

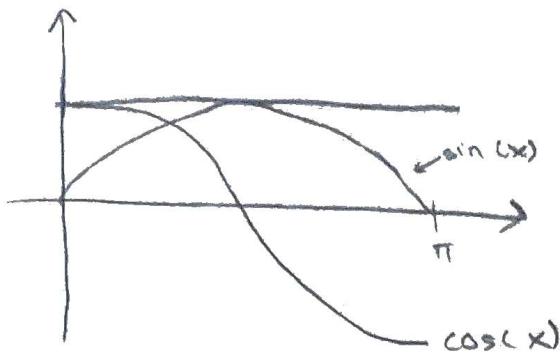
$$e^{ikx} = \cos(kx) + i \sin(kx) \quad k=1, 2, \dots$$

$$f(x) = \sin(kx) \Rightarrow \Delta f = f''(x) = -k^2 f(x) \quad \text{och} \quad f=0 \text{ på } \partial D$$

$$g(x) = \cos(kx) \Rightarrow \Delta g = g''(x) = -k^2 g(x), \quad \partial_n g = g' = 0 \text{ på } \partial D$$

$$k=0, 1, \dots$$





## Definition

- $D \subseteq \mathbb{R}^n$  •  $u$  är en Dirichlet-egenfunktion om  $-\Delta u = \lambda u$  och  $u=0$  på  $\partial D$
- $u$  är en Neumann-egenfunktion om  $-\Delta u = \lambda u$  och  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$  på  $\partial D$

## Sats

Antag  $D$  är ett begränsat område med "snäll" rand.

(1)  $L_2(D)$  har en ON-bas  $e_1(x), e_2(x), \dots$ , där alla  $e_i(x)$  är Dirichlet-egenfunktioner

(2)  $L_2(D)$  har en (annan) ON-bas  $\tilde{e}_0, \tilde{e}_1, \dots$ , där alla  $\tilde{e}_i(x)$  är Neumann-egenfunktioner

Idén är att  $\Delta$  är en symmetrisk operator på  $L_2(D)$ :

$$\langle \Delta u, v \rangle - \langle u, \Delta v \rangle = \iint_D (\Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v) dx \stackrel{\text{green}}{=} \int_{\partial D} \partial_\nu u \cdot v - u \partial_\nu v dx = 0, \text{ med Dirichlet eller Neumann randvillkor}$$

Använd spektralsatsen!

## Exempel

Dirichlet IBVP för (VÅ):

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = c^2 \Delta u, & t > 0, x \in D \\ u = g, \partial_t u = h, & t = 0, x \in D \\ u = 0, & t \geq 0, x \in \partial D \end{cases}$$

För fixt  $t$ , skriver vi  $u(t, x) = u_t(x)$  i Dirichlet-egenbas

$$u_t(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \widehat{u}_t(j) e_j(x), \text{ med } \widehat{u}_t(j) = \iint_D u_t(x) e_j(x) dx$$

generella Fourier-koefficienter

Insatt i PDE:n:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \partial_t^2 \widehat{u}_t(j) e_j(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c^2 \widehat{u}_t(j) (-\lambda_j^2) e_j(x).$$

Fixera  $j$ , lös ODE:n i t:

$$\underbrace{\partial_t^2 \hat{u}_t(j)}_{f''(t)} = -\underbrace{c^2 \lambda_j}_{w^e} \hat{u}_t(j) + f(t)$$

$$\Rightarrow \hat{u}_t(j) = A_j \cos(c\sqrt{\lambda_j}t) + B_j \sin(c\sqrt{\lambda_j}t)$$

Startvillkor:

$$g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{g}(j) e_j(x), \quad h(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{h}(j) e_j(x)$$

$$t=0 \Rightarrow A_j = \hat{g}(j) \quad c\sqrt{\lambda_j} B_j = \hat{h}(j)$$

S.93 i  
boken

$$\therefore u(t, x) = \sum_{j=1}^{\infty} \left( \hat{g}(j) \cos(c\sqrt{\lambda_j}t) + \hat{h}(j) \frac{\sin(c\sqrt{\lambda_j}t)}{c\sqrt{\lambda_j}} \right) e_j(x)$$

Antag  $h=0$  och  $g(x) = e_m(x)$  för något  $m=1, 2, \dots$

$$\Rightarrow u(t, x) = \cos(c\sqrt{\lambda_m}t) e_m(x)$$

Beräkning/konstruktion av  $e_1(x), e_2(x), \dots$

Rayleighkvoten av en funktion  $u \in H^1(D)$  är

$$R(u) := \frac{\iint_D |\nabla u|^2 dx}{\iint_D u^2 dx}$$

• Om  $u$  är en egenfunktion:

$$\iint_D (|\nabla u|^2 + u \Delta u) dx = \int_D u \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \nu}}_{=-\lambda u} ds \quad \text{○ pga. randvärden}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\iint_D |\nabla u|^2 dx}{\iint_D u^2 dx} = R(u)$$

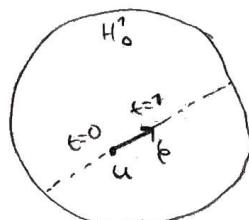
• Om  $u$  inte är en egenfunktion har  $u$  inget egenvärde, men Rayleighkvoten existerar alltid

Proposition 4.1.6

Antag att  $u \in H_0^1(D)$  minimerar  $R(u)$  bland alla funktioner i  $H_0^1(D) \setminus \{0\}$ . Då är, efter normalisering  $u = e_1$ ,

Bewis

Tag  $\epsilon \in H_0^1(D)$  godtycklig och låt



$$f(t) = R(u+t\epsilon)$$

$$R \cdot \min : u \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\iint_D |\nabla u|^2 dx + 2t \iint_D \nabla u \cdot \nabla \epsilon dx + t^2 \iint_D |\nabla (\epsilon)|^2 dx}{\iint_D u^2 dx + 2t \iint_D u \epsilon dx + t^2 \iint_D \epsilon^2 dx} \right) \Big|_{t=0} =$$

$$\frac{2 \iint_D \nabla u \cdot \nabla \epsilon dx \cdot \iint_D u^2 dx - 2 \iint_D u \epsilon dx \cdot \iint_D |\nabla u|^2 dx}{(\iint_D u^2 dx)^2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\iint_D u^3 dx \cdot \iint_D \nabla u \cdot \nabla \epsilon dx}_{\text{D}} = \underbrace{\iint_D u \epsilon dx \cdot \iint_D |\nabla u|^2 dx}_{\text{D}}$$

Låt  $\lambda = R(u)$

$$\int_{\partial D} \partial_n u \cdot \epsilon ds - \iint_D \Delta u \cdot \epsilon dx = \lambda \iint_D u^3 dx$$

$$\therefore \iint_D (\Delta u + \lambda u) \epsilon dx = 0 \quad \forall \epsilon \in H_0^1(D)$$

Som tidigare följer att  $\Delta u + \lambda u = 0$  i D

$\therefore u$  är en Dirichlet-eigenfunktion, så  $u = e_1$

$e_1(x)$ : Minimerar  $R(u)$  för  $u \in H_0^1(D) \setminus \{0\}$   
 $\lambda_1 = \text{detta minimum}$

$e_2(x)$ : Låt  $V_1 = \{u \in H_0^1(D) : \langle u, e_1 \rangle = 0\}$

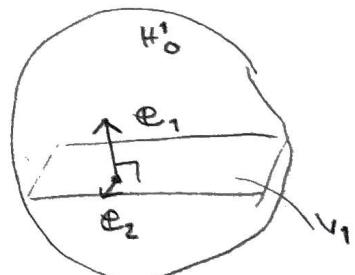
$e_2(x)$  minimerar  $R(u)$  bland  $u \in V_1 \setminus \{0\}$   
 $\lambda_2 = \text{detta minimum i } V_1 > \lambda_1$

$e_3(x)$ :  $V_2 = \{u \in H_0^1(D) : \langle u, e_1 \rangle = \langle u, e_2 \rangle = 0\}$

o.s.v.  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \dots$

Ersätts  $H_0^1(D)$  med  $H^1(D)$  för motsvarande konstruktion av Neumann-eigenfunktionerna

Här:  $0 = \tilde{\lambda}_0 < \tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2 \leq \tilde{\lambda}_3 \leq \dots$



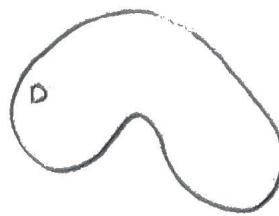
# FÖRELÄSNING 10

23/11 - 2023

## Weyls lag

Betrakta Dirichlet egenvärdena för  $D$ :

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_j(x) = \lambda_j \varphi_j(x) & i D \\ u=0 & p\ddot{o} \partial D \end{cases}$$



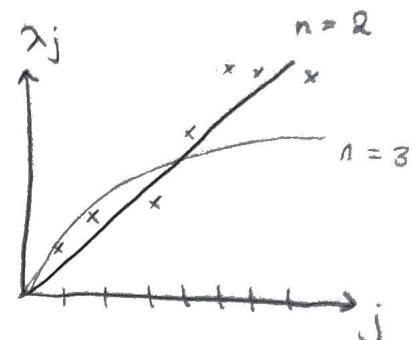
$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$$

$$\underline{n=2}: \lambda_j = \frac{4\pi}{|D|} j + O(j^{\frac{1}{2}}), j \rightarrow \infty$$

↓ Area

$$\underline{n=3}: \lambda_j = \left( \frac{6\pi^2}{|D|} j \right)^{\frac{2}{3}} + O(j^{\frac{1}{3}}), j \rightarrow \infty$$

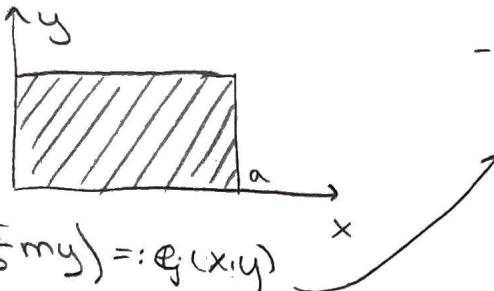
↓ Volym



"Större trumma har lägre ljud"

## Exempel

Rektangeln  
har  
egenfunktioner:



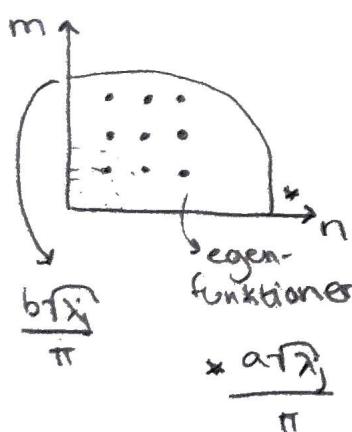
$$-\Delta \varphi_j = \left[ \left( \frac{\pi}{a} n \right)^2 + \left( \frac{\pi}{b} m \right)^2 \right] \varphi_j(x,y)$$

$\lambda_j$

$$\sin\left(\frac{\pi}{a} nx\right) \sin\left(\frac{\pi}{b} my\right) =: \varphi_j(x,y)$$

$$n, m \in \mathbb{R}^+$$

$$\left( \frac{n}{\frac{(an)\lambda_j}{\pi}} \right)^2 + \left( \frac{m}{\frac{(bn)\lambda_j}{\pi}} \right)^2 = 1$$



Da ellipsen sammanfaller med flera  
egenfunktioner får egenvärdet en  
multiplicitet

## Kontroll av Weyl:

Antal egenvärden som är  $\leq \lambda_j$ ?  $\Rightarrow = j^2$  areaen av kvarts-

$$\text{ellipsen} = \pi \left( \frac{an\lambda_j}{\pi} \right) \left( \frac{bn\lambda_j}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{ab}{4\pi} \lambda_j^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \lambda_j \approx \frac{4\pi}{ab} j$$

areaen

## Rayleigh-Ritz approximation (RRA)

Denna beräknar numeriskt Dirichlet egenfunktioner  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$  och egenvärdena  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  från FEM-basfunktioner  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots, \varphi_N(x)$

Styrketsmatrisen  $A = (A_{ij})$ ,  $A_{ij} = \iint_D \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, dx$

Massmatrisen  $B = (B_{ij})$ ,  $B_{ij} = \iint_D \varphi_i \cdot \varphi_j \, dx$

$$u(x) = u_1 \varphi_1(x) + u_2 \varphi_2(x) + \dots + u_N \varphi_N(x)$$

$$\vec{u} = (u_i)$$

$$\text{Rayleigh kvot} \quad R(u) = \frac{\iint_D |\nabla u|^2 \, dx}{\iint_D u^2 \, dx} \xrightarrow{\rightarrow \nabla u \cdot \nabla u} = \frac{\vec{u}^T A \vec{u}}{\vec{u}^T B \vec{u}} = \frac{\vec{u}^T A \vec{u}}{(c \vec{u})^T (c \vec{u})}$$

redvektor

$$\left\{ \text{låt } B = c^2, c^T = c, v = c \vec{u} \right\} =$$

$$\frac{v^T (c^{-1} A c^{-1}) v}{|v|^2}$$

Egenvärdena  $\lambda_j$  är approximativt egenvärdena för matrisen  $c^{-1} A c^{-1}$ .

$$\det(c^{-1} A c^{-1} - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\det(A - \lambda B) = 0}$$

$$c^{-1} A c^{-1} \underbrace{v}_{\vec{u}} = \lambda \underbrace{v}_{c \vec{u}} \Leftrightarrow \boxed{A \vec{u} = \lambda B \vec{u}}$$

Detta ger en algoritm för  $\lambda_j$  och  $\varphi_j(x)$ .

## Fundamentallösning till $\Delta$

Lös  $\Delta u(x) = g(x)$  på hela  $\mathbb{R}^n$  med Fouriertransform

$$-|\xi|^2 \hat{u}(\xi) = \hat{g}(\xi)$$

$$\hat{u}(\xi) = -\frac{1}{|\xi|^2} \hat{g}(\xi)$$

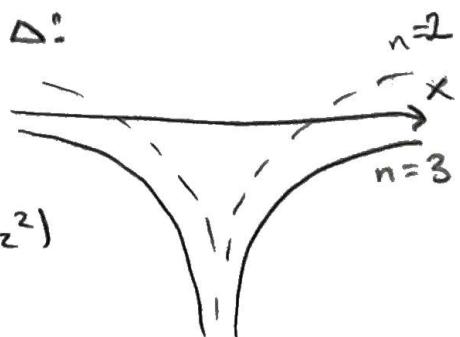
$$u(x) = \Phi(x) * g(x)$$

$\Phi(x)$  är fundamentallösningen för  $\Delta$ :

$$F\{\Phi(x)\} = -\frac{1}{|\xi|^2}$$

$$\underline{n=2}: \quad \Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \ln(|x|) = \frac{1}{4\pi} \ln(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\underline{n=3}: \quad \Phi(x) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|}$$



Beräkning:  $\int_0^\infty F\left(\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\right) dt = \int_0^\infty e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dt, \forall t > 0$

$$\Rightarrow \Phi(x) = - \int_0^\infty \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dt \cdot \frac{1}{|x|^2}$$

$$= \left\{ \frac{|x|^2}{4t} = s^2, s = \frac{|x|}{2\sqrt{t}}, ds = -\frac{|x|}{4t^{\frac{3}{2}}} dt \right\} = - \int_0^\infty \frac{1}{(4\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{4}{|x|} e^{-s^2} ds =$$

$$- \frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{|x|} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{för ett fixt } x$$

### Formler

$$\nabla \Phi(x) = \frac{x}{\sigma_{n-1} |x|^n}$$

→ arean/längden av  
enhetssfären/cirklar

$$\Delta \Phi(x) = S_0 \quad (\Leftrightarrow (-|\xi|^2)(-\frac{1}{|\xi|^2}) = 1)$$

### Greens formler

$$\boxed{1} \quad \int_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = \iiint_D (v \Delta u + \nabla v \cdot \nabla u) dx$$

$$\boxed{2} \quad \int_{\partial D} (u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu}) ds = \iiint_D (u \Delta v - v \Delta u) dx$$

$$\boxed{3} \quad \text{sätt } v(y) = \Phi(y-x) : \boxed{2} \Rightarrow$$

$$\int_{\partial D} (u(y) \partial_\nu \Phi(y-x) - \Phi(y-x) \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)}_{(*)} dy) ds(y) =$$

$$\iiint_D (u(y) S_x(y) - \Phi(y-x) \Delta u(y)) dy = u(x)$$

o då  $u$  är harmonisk

(\*) Dirichlet data (\*\*\*) Neumann data

Green  $\boxed{3}$  beräknar  $u$  i  $D$  om vi vet både Dirichlet och Neumann data på  $\partial D$ . Men endast ett av dessa två BC ska specificeras för att få ett välställt problem

## Dirichletproblemet och dubbelskiktspotentielen

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & i D \\ u = g(x) & \text{på } \partial D \end{cases} \quad \begin{array}{l} (I) \\ (II) \end{array}$$

För att finna  $u(x)$ , låt  $h(y)$  vara en hjälpfunktion/densitet på  $\partial D$

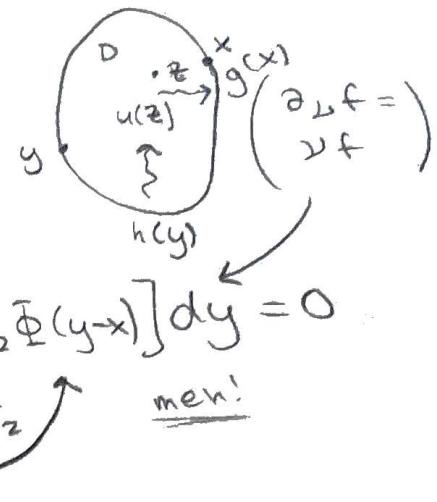
Ansätter:

$$u(x) = \underbrace{\int_{\partial D} h(y) \partial_y \Phi(y-x) ds(y)}_{\text{dubbelskiktspotentielen av } h}, \quad x \in D$$

- Omsett vad  $h(y)$  är, så gäller (I)

$$\Delta_x u(x) = \int_{\partial D} h(y) \Delta_x \left[ \nu_1(y) \partial_1 \Phi(y-x) + \nu_2(y) \partial_2 \Phi(y-x) \right] dy = 0$$

$\downarrow \frac{\partial}{\partial y_1}$        $\downarrow \frac{\partial}{\partial y_2}$       men!



- Välj nu  $h(y)$  s.a.

$$\lim_{z \rightarrow x} \int_{\partial D} h(y) \partial_y \Phi(y-z) ds(y) = g(x), \quad x \in \partial D$$

FÖRELÄSNING 11 24/11 - 2023

## BIE - randintegralsekvation

för Dirichletproblemet

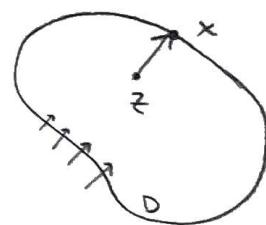
$$\begin{cases} \Delta u = 0 & i D \subseteq \mathbb{R}^2 \\ u = g(x) & \text{på } \partial D \end{cases}$$

Metod:  $u(z) = \int_{\partial D} h(y) \partial_y \Phi(y-z) ds(y), \quad z \in D$

där  $h(y)$  väljs s.a.

$$\lim_{z \rightarrow x} \int_{\partial D} h(y) \partial_y \Phi(y-z) ds(y) = g(x)$$

$\tilde{h}(x) \leftarrow$



## Exempel

$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi} \ln(x_1^2 + x_2^2)$  = potential från en punktladdning i origo

$\partial_y \Phi(x) = \nu \cdot \nabla \Phi(x) = \frac{\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{1}{2\pi} =$  potential från en elektrisk dipol i origo med riktning  $\nu$

Välj  $\nu = (0, -1)$ ,  $y = (0, 0)$

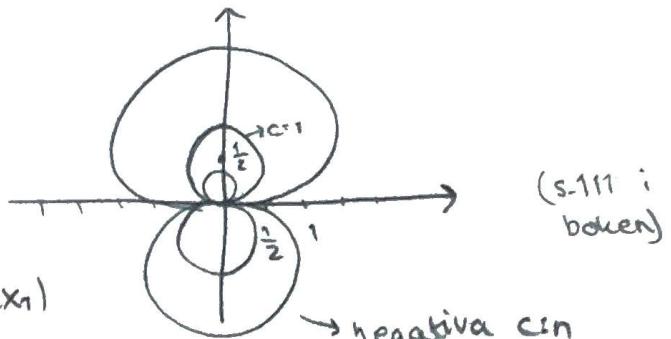
$$\partial_y \Phi(0-x) = \frac{1}{2\pi} \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\text{Låt } v(x_1, x_2) = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

Nivåkurvor  $v=c$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{c} x_2 = x_1^2 + x_2^2$$

$$x_1^2 + \left(x_2 - \frac{1}{2c}\right)^2 = \frac{1}{4c^2}$$



Antag att  $\partial D$  är grafen  $x_2 = f(x_1)$

där  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 0$

$$v(x_1, f(x_1)) = \frac{f(x_1)}{x_1^2 + f(x_1)^2} = \frac{\frac{1}{2} f''(0) x_1^2 + O(x_1^3)}{x_1^2 + (O(x_1^2))^2} = \frac{\frac{1}{2} f''(0) + O(x_1)}{1 + O(x_1^2)}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} f''(0)$$

### Proposition 5.1.6

$$\tilde{K} h(z) \longrightarrow \frac{1}{2} h(x) + \int_{\partial D} h(y) \partial_\nu \Phi(y-x) ds(y) \text{ då } z \in D, z \rightarrow x$$

#### Bewis

Låt  $\epsilon > 0$  vara litet

$$\int_{\partial D} (\dots) = \int_I (\dots) + \int_{II} (\dots)$$

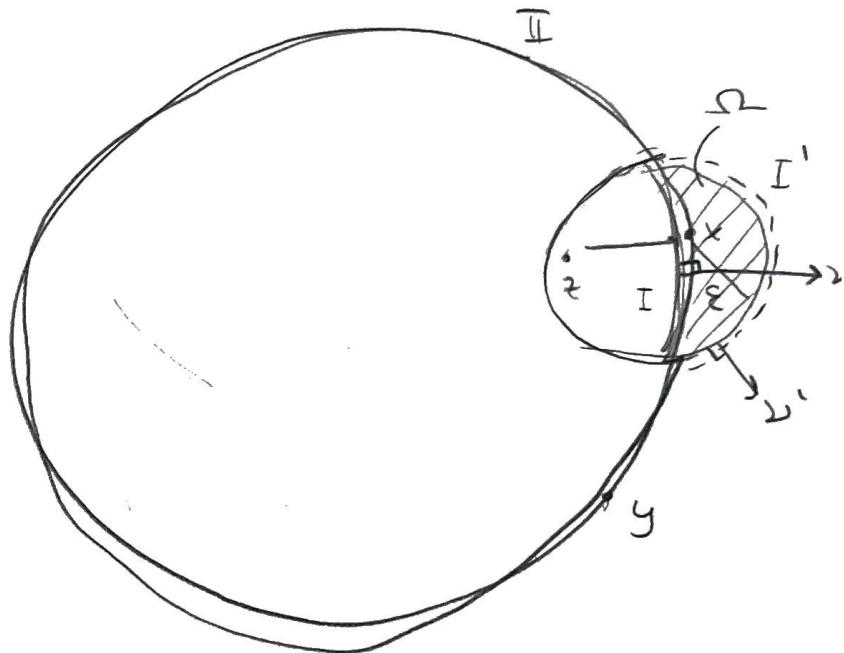
För  $II$ :

$$\int_{II} h(y) \partial_\nu \Phi(y-z) ds(y)$$

$$\approx \int_{II} h(y) \partial_\nu \Phi(y-x) ds(y)$$

bäda på  $\partial D$

$$\approx \int_{\partial D} (\dots)$$



$$\text{För } I: \int_I h(y) \underbrace{\partial_\nu \Phi(y-z)}_{\approx h(x)} ds(y) \approx h(x) \int_I \underbrace{\partial_\nu \Phi(y-x)}_{v \cdot \nabla \Phi} ds(y)$$

$$= h(x) \left[ \int_{I'} v' \cdot \nabla \Phi ds - \iint_D \operatorname{div}(\nabla \Phi(y-x)) dy \right] =$$

$$h(x) \int_{I'} \underbrace{v'(y) \cdot \nabla \Phi(y-x)}_{I' \cap B(x, \epsilon)} ds(y) = h(x) \cdot \frac{1}{2}$$

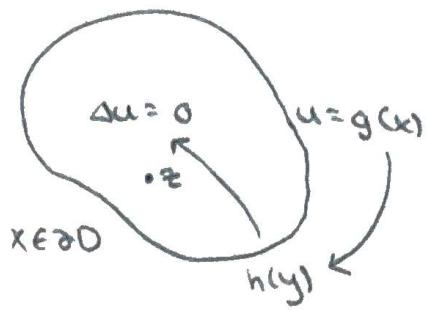
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{y-x}{|y-x|} \cdot \frac{y-x}{2\pi |y-x|^2} \geq \frac{1}{2\pi \epsilon^2}$$

Algoritmen blir:

Givet  $g(x)$  på  $\partial D$ , finn densiteten  $h(y)$  på  $\partial D$  som löser BIE

$$\frac{1}{2}h(x) + \int_{\partial D} h(y) \cdot \partial_y \Phi(y-x) ds(y) = g(x) \quad \forall x \in \partial D$$

$K(x,y)$



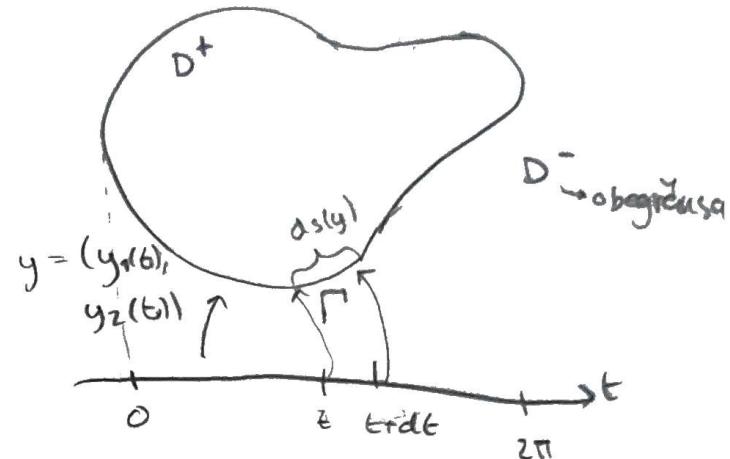
Detta ger lösningen  $u(z) = \int_{\partial D} h(y) \partial_y \Phi(y-z) ds(y), z \in D$

### Nystrom diskretisering

Parametrera kurvan  $\Gamma = \partial D$   
2π-periodiskt

$$\int_{\Gamma} h(y) \partial_y \Phi(y-x) ds(y) =$$

$$\left\{ \frac{ds}{dt} = \sqrt{(y_1'(t))^2 + (y_2'(t))^2} \right\} =$$



$$\int_0^{2\pi} h(y_1(t), y_2(t)) \nabla \Phi(y_1(t), y_2(t) - (x_1, x_2))$$

$$\sqrt{(y_1'(t))^2 + (y_2'(t))^2} dt = \{ \text{Integranden} = :f(t)\} \approx$$

Riemann  
summa  
 $h = \frac{2\pi}{N}$

$$h \sum_{j=0}^{N-1} f(jh)$$

trapetz regeln (räta linjer mellan varje punkt)  
viktigt med lika stora intervall

Diskretisering av BIE:  $\vec{h} = [h(y(0)), h(y(h)), \dots, h(y(h(N-1)))]^t$   
Vi får ett linjärt  $N \times N$  system

$$(\frac{1}{2} I + A) \vec{h} = \vec{g}$$

Utanför lösningen  $\vec{h}$  beräknas  $u(z), z \in D$ , mha trapetz regeln (Riemann summan).

### Sats

Om  $f(t)$  är helt slät och 2π-periodisk

$$\left| \int_0^{2\pi} f(t) dt - h \sum_{j=0}^{N-1} f(jh) \right| = O(h^m) \quad \forall m < \infty$$

superpolynomial  
konvergenshastighet

## Bevis

SKRIV  $f$  i Fourierserie:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikt}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(t) dt &= h \sum_{j=0}^{N-1} f(jh) \\ &\quad \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikjh}}_{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^{N-1} e^{(ikh)j} \right) \hat{f}(k)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{låt } q &= e^{ikh} = \frac{2\pi}{N} \\ \sum_{j=0}^{N-1} q^j &= \frac{q^N - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1 \\ N, \quad q &= 1 \\ (*) &= \frac{e^{ik2\pi} - 1}{q - 1} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |S - \sum| = \left| 2\pi \hat{f}(0) - h \sum_{\substack{k=-N \\ k \neq 0}}^{N-1} \hat{f}(k) \right| =$$

$\xrightarrow{-N \quad 0 \quad N \quad 2N}$

$\hookrightarrow$  sådana att  $N$  delar  $k^n$

STORGRUPPSÖVNING 28/11-2023

- 4.3 Finns det en funktion  $f(x)$  s.a.  $f(0) = f(3) = 0$  och
- $$\int_0^3 f(x)^2 dx = 1 = \int_0^3 (f'(x))^2 dx ?$$

Lösning:  $f$  har Rayleighkvot  $R(f) = \frac{1}{1} = 1$

Vi vet att  $\forall f: R(f) \geq \lambda_1$

Beräkna  $\lambda_1$ :  $D = (0, 3)$

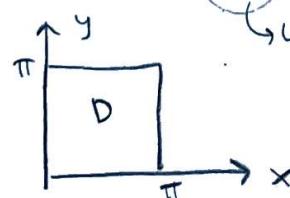
Egenfunktionerna är  $\sin(\frac{\pi}{3}kx) \Rightarrow \lambda_1 = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2$

Eftersom  $\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \neq 1$  så är svaret nej

Notera:  $R(f) \geq \lambda_1 \Leftrightarrow \int_0^3 f^2 dx \leq \left(\frac{1}{\lambda_1}\right) \int_0^3 |\nabla f|^2 dx \quad \forall f \in H_0^1$

- 4.4  $D = (0, \pi)^2$ , beräkna  $R(f)$  för  $f(x,y) = xy(\pi-x)(\pi-y)$

Jämför med  $\lambda_1$



konstanten i Poincarés olikhet

Lösning: Vi har Dirichlets BC.

$\lambda_1$ : egenfunktioner  $\sin(nx)\sin(mx)$

$$\Rightarrow n^2 + m^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$R(k) := \iiint_{\substack{\pi \\ 0 \\ 0}} (xy(\pi-x)(\pi-y))^2 dx dy = \left( \iint_{\substack{\pi \\ 0 \\ \pi^2x^2 - 2\pi x^3 + x^4}} (x(\pi-x))^2 dx \right)^2 = \left( \pi^2 \frac{\pi^3}{3} - 2\pi \frac{\pi^4}{4} + \frac{\pi^5}{5} \right)^2$$

$$= \left( \pi^5 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) \right)^2 = \left( -\frac{\pi^5}{30} \right)^2$$

$$\iiint_{\substack{\pi \\ 0 \\ 0}} \left( \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy = 2 \iint_{\substack{\pi \\ 0 \\ 0}} (x(\pi-x)(\pi-y))^2 dx dy =$$

$$2 \int_0^\pi (\pi^2 - 4\pi x + 4x^2) dx \cdot \int_0^\pi (\pi^2 y^2 - 2\pi y^3 + y^4) dy =$$

$$2\pi^3 \left( 1 - 2 + \frac{4}{3} \right) \pi^5 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) = 2\pi^8 \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{30}$$

$$R(k) = \frac{\pi^8 \frac{2}{30}}{\left( \frac{\pi^5}{30} \right)} = \frac{1}{\pi^2} 20 > 2 \text{ d.v.}$$

5.2 Visa att Neumann-Poincaré operatorn på enhetscirkeln är

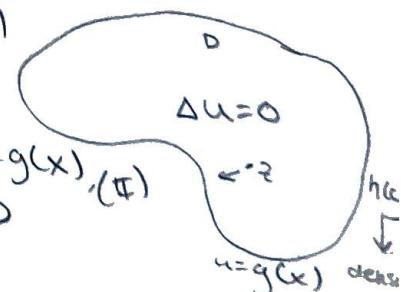
$$Kh(x) = \frac{1}{2} \cdot \text{medelvärdet på cirkeln.}$$

Beräkna lösning  $u$  till Dirichlet problemet

$$\text{lösning } u(z) = \int_{\partial D} \partial_\nu \Phi(y-z) h(y) ds(y) \quad x \in D \quad (\text{I})$$

$$\text{Välj } h(y) \text{ s.a. } \frac{1}{2} h(x) + \int_{\partial D} \partial_\nu \Phi(y-x) h(y) ds(y) = g(x) \quad x \in \partial D \quad (\text{II})$$

Nu:  $D = \text{enhetscirkeln}$



$$\text{enhetscirkel } y \cdot \underbrace{\frac{y-x}{2\pi |y-x|^2}}_{\frac{1-y \cdot x}{2\pi(1+1-y \cdot x)}} = \frac{1-y \cdot x}{2\pi(1+1-y \cdot x)} = \frac{1}{4\pi}$$

$$(\text{II}) \text{ blir: } \frac{1}{2} h(x) + \frac{1}{4\pi} \underbrace{\int_{\partial D} h(y) ds(y)}_{\frac{1}{2}[h]} = g(x) \quad x \in D$$

$\frac{1}{2}[h]$   
medelvärdet av  $h$  på cirkeln

Integrita ekvationen

$$\frac{1}{2} \underbrace{\int_{\partial D} h}_{8\pi \frac{1}{2}[h]} + \frac{1}{2} \underbrace{\int_D [h]}_{2\pi \cdot \frac{1}{2}[h]} = \underbrace{\int_D g}_{2\pi[g]}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} [h] + \frac{1}{2} [h] = [g] \Rightarrow [h] = [g]$$

$$\therefore h(x) = 2g(x) - [g]$$

Sätt nu in  $h(x)$  i (I):  $\partial_{\nu} \Phi(y-z) = \frac{1-y-z}{2\pi(1+|z|^2-2y \cdot z)}$

$$h(y) = 2g(y) - [g]$$

$$\Rightarrow u(z) = \int_{\partial D} \partial_{\nu} \Phi \cdot 2g(y) ds(y) - \int_{\partial D} \partial_{\nu} \Phi [g] ds(y) =$$

$$\left\{ \int_{\partial D} v(y) \Phi(y-z) ds(y) \stackrel{\text{gauss}}{=} \iint_D \underbrace{\operatorname{div} \nabla \Phi(y-z)}_{S_2} dy = 1 \right\} =$$

$$\int_{\partial D} \frac{1}{2\pi} \frac{z(1-y \cdot z)}{1+|z|^2-2y \cdot z} g(y) ds(y) - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} g(y) ds(y) =$$

$$\int_{\partial D} \frac{1}{2\pi} \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2-2y \cdot z} g(y) ds(y) \quad \text{Detta är Poissons formel!}$$

← utfunktion?

(5.4) Visa att

$$x = \lim_{z \rightarrow x} \int_{\partial D} \partial_{\nu} \Phi(y-z) h(y) ds(y) =$$

$$\frac{1}{2} h(x) + \int_{\partial D} \partial_{\nu} \Phi(y-x) h(y) ds(y) \text{ på följande sätt:}$$



① Utvidga  $h(y)$  till en funktion i  $D$ .

② Green 2 med  $h(y)$  och  $\Phi(y-z)$ ,  $z \in D$ , låt  $z \rightarrow x$

③ Green 2 med  $h(y)$  och  $\Phi(y-x)$ ,  $x \in \partial D$ .

Subtrahera!

Lösning

$$\textcircled{2} \quad \iint_D h(y) \Delta \Phi(y-z) \cdot \Phi(y-z) \Delta h(y) dy =$$

$\underbrace{\phantom{\iint_D h(y) \Delta \Phi(y-z) \cdot \Phi(y-z) \Delta h(y) dy}}_{h(z)} \underbrace{\Delta \Phi(y-z)}_{\delta z}$

$$\int_{\partial D} (h(y) \partial_\nu \Phi(y-z) - \Phi(y-z) \partial_\nu h(y)) ds(y)$$

$\Phi$  är svagt singulär, låt  $z \rightarrow x$ :

$$h(x) - \iint_D \Phi(y-x) \Delta h(y) dy = x - \int_{\partial D} \Phi(y-x) \partial_\nu h(y) ds(y)$$

$$\textcircled{3} \quad \iint_D h(y) \Delta \Phi(y-x) - \Phi(y-x) \Delta h(y) dy =$$

$$\int_{\partial D} (h(y) \partial_\nu \Phi(y-x) - \Phi(y-x) \partial_\nu h(y)) ds(y)$$

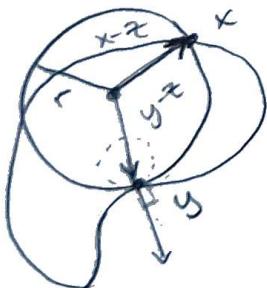


$$\iint_D h(y) \delta_x(y) dy = \frac{1}{2} h(x) \text{ då } x \in \partial D$$

$$\text{Subtraktion} \Rightarrow \frac{1}{2} h(x) = x - \int_{\partial D} h(y) \partial_\nu \Phi(y-x) ds(y) \quad \blacksquare$$

5.8 Visa att för NP-operatorn (Neumann Poincaré) i  $\mathbb{R}^2$  gäller

$$\partial_\nu \Phi(y-x) = \frac{1}{4\pi r} \text{ där } r = \text{radien av cirkeln som tangerar } \partial D \text{ i } y \text{ och som går genom } x.$$



Lösning: Låt  $z =$  cirkelns mittpunkt

$$\partial_\nu \Phi = \nu(y) \cdot \frac{y-x}{2\pi |y-x|^2} = \frac{y-z}{r} \cdot \frac{(y-z)-(x-z)}{2\pi (r^2+r^2-2(y-z) \cdot (x-z))}$$

$$= \frac{1}{4\pi r}$$

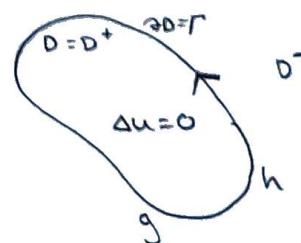
FÖRELÄSNING 12 30/11-2023

### De 4 integralekvationerna

1. Som på tidigare föreläsningar (förra veckan) lösas det inre Dirichletproblemet mha integralekvationen

$$\frac{1}{2} h(x) + \underbrace{\int_{\partial D} \partial_\nu \Phi(y-x) h(y) ds(y)}_{\text{NP operatorn}} = g(x) \quad \forall x \in \Gamma$$

Neumann-Poincaré (NP) operatorn =  $\mathcal{K} h(x)$



$K$  är ett exempel på en s.k. integrooperator  
 $K : L_2(\Gamma) \rightarrow L_2(\Gamma)$ ,  $\partial_\nu \Phi(y-x)$  är  $K$ :s kärna  
 (en kontinuerlig matris)

## 2. Yttre Dirichlet problemet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & i \quad D^- \\ u = g(x) & \text{på } \Gamma \\ \nabla u \rightarrow 0 & \text{då } x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (z \text{ närmar sig } x \in \Gamma)$$

Ansätt  $u(z) = \int_{\partial D} \partial_\nu \Phi(y-z) h(y) ds(y), z \in D^-$

$$-\frac{1}{2} h(x) + K h(x) = g(x), x \in \Gamma$$

ty  
 $\Gamma$ ; samma hälft  
 som normalvektorn

## 3. Inre Neumannproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & i \quad D^+ \\ \partial_\nu u = g(x) & \text{på } \Gamma \end{cases}$$

$$\left( \text{Green 3: } u(x) = \int_{\partial D} (u(y) \partial_\nu \bar{\Phi}(y-x) - \partial_\nu u(y) \bar{\Phi}(y-x)) ds(y) \right)$$

Ansätt enkelskiktspotentialen,

$$u(z) = \int_{\Gamma} \bar{\Phi}(y-z) h(y) ds(y)$$

$\bar{\Phi}(z-y) = \frac{1}{2\pi} \ln(|z-y|)$

$$D(x) \cdot \nabla u(x) = g(x)$$

$$-\frac{1}{2} h(x) + \underbrace{\int_{\Gamma} v(x) \cdot \nabla \bar{\Phi}(x-y) h(y) ds(y)}_{K^* h(x)} = g(x) \quad \forall x \in \Gamma$$

Operatorn  $K^*$  är  $L_2(\Gamma)$  adjunkt (transponat) av NP-operatorn

$$\langle Kh_1, h_2 \rangle_{L_2(\Gamma)} = \int_{\Gamma} \left( \int_{\Gamma} v(y) \cdot \nabla \bar{\Phi}(y-x) h_1(y) ds(y) \right) h_2(x) ds(x) =$$

$$\int_{\Gamma} h_1(y) \left( \int_{\Gamma} v(y) \cdot \nabla \bar{\Phi}(y-x) h_2(x) ds(x) \right) ds(y) = \langle h_1, K^* h_2 \rangle_{L_2(\Gamma)}$$

## 4. Yttre Neumannproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & i \quad D^- \\ \partial_\nu u = g(x) & \text{på } \Gamma \\ \nabla u \rightarrow 0 & \text{då } x \rightarrow \infty \end{cases}$$

## Enkelskiktspotential

$$u(z) = \int_{\Gamma} \Phi(y-z) h(y) ds(y) \quad z \in \Omega$$

$$\rightsquigarrow \text{BIE} \quad \frac{1}{2} h + K^* h = g$$

## Fredholmteori

Hur visar vi att  $(\frac{1}{2} I + K)h = g \iff (I + T)h = g$  har en lösning  $h$  för givet  $g$ ?

liten

$2g$  från steget  
innan, då  
ty körnt

## Exempel

Betrakta  $N \times N$  system  $\overset{N \times N}{\downarrow} \quad \overset{N \times 1}{\downarrow} \quad \overset{N \times 1}{\downarrow}$   
 $Ax = b$  (\*)

Nollrum:  $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n ; Ax = 0\}$

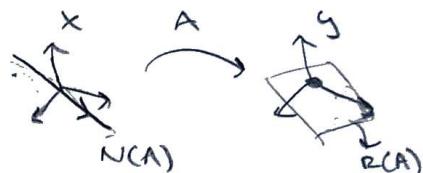
Bildmängd:  $R(A) = \{Ax ; x \in \mathbb{R}^n\}$

## Dimensionsatsen

$$\dim(R(A)) = N - \dim(N(A))$$

↓  
antal dimensioner  
från början

antal dimensioner som försätts



$$\iff \underbrace{N - \dim(R(A))}_{\text{o o m R(A)=R}^N, \text{ dvs. (*) har en lösning}} = \underbrace{\dim(N(A))}_{\text{o o m (*) har en entydig lösning}}$$

∴ Entydighet av lösningar ( $\iff$ ) existens av lösningar

Integralekvationer motsvarar  $N = \infty$ . Här gäller ej dimensionssatsen i allmänhet. ( $\infty - \infty = ?$ )

## Definition

Betrakta en integraloperator  $Tf(x) = \int_{\Gamma} k(x,y) f(y) ds(y), x \in \Gamma$   
på en begränsad  $d'$ -dimensionell yta  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^{n-d'}$

Om  $|k(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^\alpha}$  för något  $\alpha < d$   
säger vi att  $k(x,y)$  är svagt singulär

$T$ :s kärra

En integralekvation  $h+Th=g$  där  $T$  har en svagt singularär kärna kallas för en Fredholm ekvation av andra slaget

### Sats (5.3.5)

Låt  $h+Th=g$  vara en Fredholm ekvation av andra slaget. Då är  $R(I+T) \subseteq L_2(\Gamma)$  ett slitet underrum och  $N(I+T) = \text{span}\{h_1, \dots, h_m\}$  och  $R(I+T)^\perp = \text{span}\{g_1, \dots, g_m\}$  för något heltal  $m < \infty$  och linjärt oberoende  $\{h_j\}$  och  $\{g_j\}$ .

### Tolkning/användning:

- $T$  är "liten" ( $K(x,y)$  är svagt singulär)  $\Rightarrow I+T$  beter sig som en ändlig dimension matris  $A$  och dimensionssatsen gäller.
- En lösning  $h$  till  $h+Th=g$  finns  $\Leftrightarrow \langle g, g_j \rangle = 0 \quad \forall j=1, \dots, m$
- Om  $h$  är en lösning så är den allmänna lösningen  $h(y) + t_1 h_1(y) + \dots + t_m h_m(y), t_j \in \mathbb{R}$

Betrakta den adjunkta integralekvationen

$$h(x) + \int_{\Gamma} K(y,x) h(y) ds(y) = g(x), \quad x \in \Gamma$$

$= T^*h(x)$

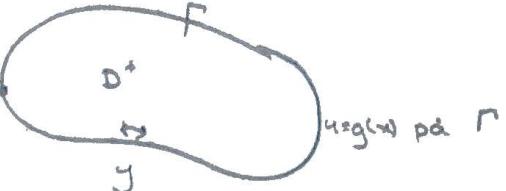
$$\begin{aligned}
 R(I+T^*)^\perp &= \{g; \langle h+T^*h, g \rangle = 0 \quad \forall h\} = \{g; \langle h, g+Tg \rangle = 0 \quad \forall h\} \\
 &= \{g; g+Tg = 0\} = N(I+T) = \text{span}\{h_1, \dots, h_m\} \\
 \text{pss. } N(I+T^*) &= R(I+T)^\perp
 \end{aligned}$$

### Fredholm alternativet

Låt  $h+Th=g$  vara en Fredholm ekvation av andra slaget. Då är följande ekvivalent

- $R(I+T) = L_2(\Gamma)$ : existens för  $I+T$
- $N(I+T) = \{0\}$ : entydighet för  $I+T$
- $R(I+T^*) = L_2(\Gamma)$
- $N(I+T^*) = \{0\}$

Sammanfattnings av BIE:er

NP:  $Kh(x) = \int_{\Gamma} \underbrace{v(y) \cdot \nabla \Phi(y-x)}_{\text{kärnan } K(x,y)} h(y) ds(y)$  

Adjunkt:

$$K^*h(x) = \int_{\Gamma} v(x) \Phi(x-y) h(y) ds(y)$$

1. Inre Dirichlet

$$\frac{1}{2}h(x) + Kh(x) = g(x)$$

2. Yttre Dirichlet

$$-\frac{1}{2}h(x) + K^*h(x) = g(x)$$

3. Inre Neumann

$$-\frac{1}{2}h(x) + K^*h(x) = g(x)$$

4. Yttre Neumann

$$\frac{1}{2}h(x) + K^*h(x) = g(x)$$

$(I + T : \text{"existerar lösningar } h \text{ om och endast om entydiga..."} )$   
 $I + T^* \quad \text{---} \quad \text{---}$

- BIE:erna 1 och 4 är entydigt lösbara: Fredholms alternativet för  $T=2K$  visar att det räcker att kontrollera att

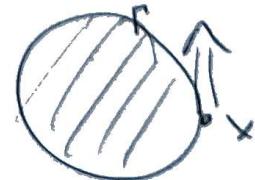
$$\frac{1}{2}h + K^*h = 0 \Rightarrow h = 0 \quad (\text{se S.25 (i) i boken})$$

- BIE:erna 2 och 3 har båda 1-dimensionella nollrum (N) och bildmängds komplement ( $\mathbb{R}^\perp$ ) ( $T=-2K$ ) (se S.25 (ii) i boken)

Exempel

Låt  $h(y) = 1$ ,  $\forall y \in \Gamma$   $Kh(x) = \int_{\Gamma} v(y) \cdot \nabla \Phi(y-x) 1 ds(y) =$  <sup>Gauss</sup>

$$\iint_D \underbrace{\nabla \cdot \nabla \Phi(y-x)}_{\Delta} dy = \frac{1}{2}$$



$$\Rightarrow (-\frac{1}{2}I + K)1 = 0$$

Helmholtz ekvation

(VÅ)  $\partial_t^2 u = c^2 \Delta u$  Om  $u=u(x)$  tidsberoende/statisk  
lösning till (VÅ)  
 $\Rightarrow \Delta u = 0$

Vi betraktar nu mer allmänna tidsharmoniska vågor:

$$u(t, x) = A(x) \cos(\varphi(x) - \omega t) = \underbrace{\text{Re}(v(x) e^{-i\omega t})}_{\begin{array}{l} \text{komplex} \\ \text{amplitud } \rightarrow \text{fas } \rightarrow \text{frekvens } \end{array}} \quad v(x) = A(x) e^{i\varphi(x)}$$

(VÅ) för  $u(t, x) \Leftrightarrow \Delta u - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 u \Leftrightarrow$

$$\text{Re} \left( \Delta v \cdot e^{-i\omega t} - \frac{1}{c^2} (-i\omega)^2 v e^{-i\omega t} \right) = 0$$

$(\frac{\omega}{c})^2 = k^2, k = \text{vägtal}$

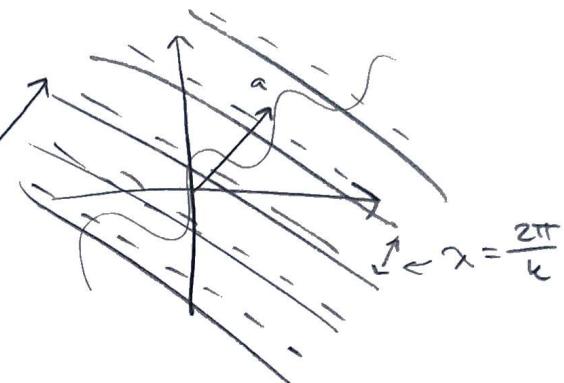
∴ (VR) för  $u(t, x) \Leftrightarrow$  Helmholtz ekvation  $\Delta v + k^2 v = 0$   
för  $v(x)$  (elliptisk)

### Exempel

$$v(x) = e^{ik_a \cdot x}, k > 0, a \in \mathbb{R}^n, |a| = 1$$

$$\Rightarrow u(t, x) = \cos(k \cdot a \cdot x - \omega t)$$

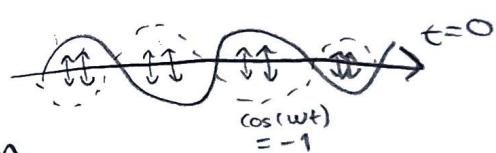
plan fortskrivande våg



### Exempel

$v(x) = A(x) = \text{realvärd lösning till Helmholtz ekvation}$

$$\Rightarrow u(t, x) = \underbrace{\text{Re}(v e^{i\omega t})}_A = A(x) \cos(\omega t)$$



### Fundamentallösning till Helmholtz ekvation

Givet vägtal  $k$ , söker vi  $\Phi_k(x)$  s.a.

- $\Phi_k = \Phi_k(r)$  radiell
- $(\Delta + k^2) \Phi_k = 0$
- $\Phi_k$  är komplexa amplituden för en utgående våg då  $x \rightarrow \infty$

$n=3$ : För  $r > 0$ :

$$\underbrace{\Phi_k''(r) + \frac{2}{r} \Phi_k'(r) + k^2 \Phi_k(r)}_{\Delta \Phi_k} = 0$$

Allmän lösning:

$$\Phi_k(r) = A \underbrace{\frac{1}{r} \cos(kr)}_{\rightarrow \infty \text{ då } r \rightarrow 0} + B \underbrace{\frac{1}{r} \sin(kr)}_{\rightarrow k \text{ då } r \rightarrow 0}$$

singulär lösning i origo

reguljär lösning i origo

$$\bullet A = -\frac{1}{4\pi} \Rightarrow \Phi_k(r) \approx \Phi(r)$$

$$\Rightarrow (\Delta + k^2) \Phi_k = S_0$$

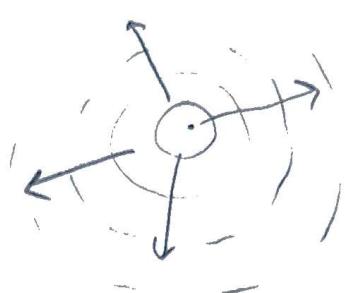
$$\bullet B = -\frac{1}{4\pi} i \Rightarrow \Phi_k(r) = -\frac{1}{4\pi r} \underbrace{(\cos(kr) + i \sin(kr))}_{e^{ikr}} =$$

$$-\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \quad \text{i 3-dimensioner}$$

Hötsvarande väg blir:

$$u(t, x) = \operatorname{Re}(\Phi_k(r)e^{-iwt}) = -\frac{1}{4\pi r} \cos(kr - wt)$$

$$\underline{n=2:} \quad \Phi_k''(r) + \frac{1}{r} \Phi_k'(r) + k^2 \Phi_k(r) = 0$$



har nu allmän lösning

$$\Phi_k(r) = A \cdot Y_0(kr) + B \cdot J_0(kr)$$

Besselfunktioner, ordning 0, 2:a respektive 1:a slaget

Man visar:

$$A = \frac{1}{4} \Rightarrow \Delta \Phi_k + k^2 \Phi_k = S_0, \quad B = -\frac{i}{4} \Rightarrow$$

$$\Phi_k(r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \left( \frac{1}{4} \sin(kr - \frac{\pi}{4}) - \frac{i}{4} \cos(kr - \frac{\pi}{4}) \right) =$$

$$-\frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - \frac{\pi}{4})} \quad \text{då } r \rightarrow \infty$$

Äterigen blir  $\Phi_k$  komplex amplitud för en väg som fortskridet radierat utåt.

### Definition

$$\Phi_k(r) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}, \quad n=3$$

$$\Phi_k(r) = -\frac{i}{4} \underbrace{(J_0(kr) + i Y_0(kr))}_{H_b^{(1)}(kr)}$$

Hankel funktion av ordning 0, 1:a slaget

En funktion  $v(x)$  som löser  $(\Delta + k^2)v = 0$  (Helmholtz) i  $D^-$  sågs uppfylla sommerfelds strålningsvillkor

$$\text{om } \partial_r v - ikv = O\left(\frac{1}{r^{\frac{n-1}{2}}}\right) \text{ då } r \rightarrow \infty$$

4:e ordet  $v \rightarrow$  än HC

### Akustiska Green 3

Green 2 med  $\Phi_k$  och  $v$  som löser  $\Delta v + k^2 v = 0$  i  $D$ :

$$\int_{\Gamma} (v(y) \partial_{\nu} \Phi_k(y-x) - \Phi_k(y-x) \partial_{\nu} v(y)) ds(y) =$$

$$\iint_D (v \Delta \Phi_k - \Phi_k \Delta v) dy = v(x)$$

$\delta_x - k^2 \Phi_k$        $-k^2 v$

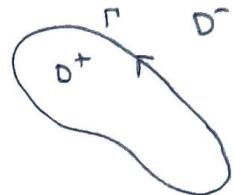
FÖRELÄSNING 14    5/12-2023

### Falska resonanser i BIE:er

Betrakta det yttre Dirichletproblemet för Helmholtz ekvation.

$$\begin{cases} \Delta v + k^2 v = 0 & i D^- \\ v = g(x) & \text{på } \Gamma^* \\ \partial_r v - ikv = O(\frac{1}{r}) & \text{lilla örs} \quad r=|x| \rightarrow \infty \end{cases}$$

Man kan visa att detta BVP har en entydig lösning  $v$ .



Akustiska Green 3 gäller:  $D^-$  om  $v$  uppfyller Sommerfeld sträckningsvillkor:

$$v(x) = - \int_{\Gamma} (h(y) \partial_{\nu} \Phi_k(y-x) - \Phi_k(y-x) \partial_{\nu} h(y)) ds(y)$$

Green sats för  $v$ : Givet  $h$  på  $\Gamma$  (lät

$$v(x) = \int_{\Gamma} h(y) \partial_{\nu} \Phi_k(y-x) ds(y), \quad x \in D^-$$

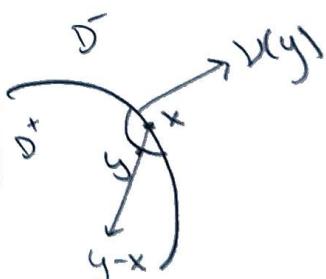
Vi får BIE:n:

$$-\frac{1}{2} h(x) + \int_{\Gamma} h(y) \underbrace{\partial_{\nu} \Phi_k(y-x)}_{K_h(x)} ds(y) = g(x) \quad x \in \Gamma$$

$v(y) \cdot \nabla \Phi_k(y-x)$

När  $y \approx x$

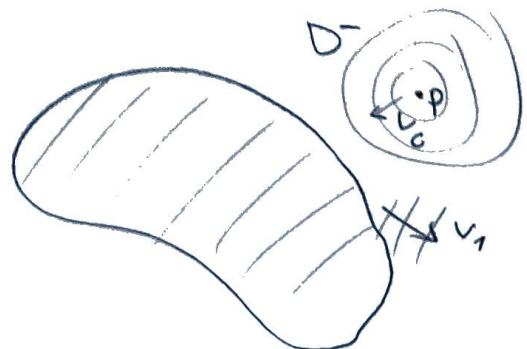
$$\nabla \Phi_k \approx \nabla \Phi = \frac{y-x}{2\pi |y-x|^2}$$



### Exempel

Punktkälla i  $p \in D^-$

$$\begin{cases} \Delta v + k^2 v = \delta_p & i D^- \\ v = 0 & \text{på } \Gamma \\ \partial_r v - ikv = O(\frac{1}{r}), r \rightarrow \infty \end{cases}$$



skriv  $v = v_0 + v_1$ , där  $v_0(x) = \Phi_k(x-p)$

$v = v_1$  som vi i det tidigare exemplet löser

(\*) med  $g(x) = -\Phi_k(x-p)$ ,  $x \in \Gamma$  Figure 6.6

Integralekvationen  $(-\frac{1}{2}I + K_k)h = g$  är lösbar för de flesta  $k > 0$  men inte alla!

### Proposition 6.3.2

$-\frac{1}{2}I + K_k$  är inverterbar  $\Leftrightarrow k^2$  inte är ett Neumann-eigenvärde i  $D^+$ .

### Beweis

( $\Rightarrow$ ): Antag  $\Delta v = -k^2 v$  i  $D^+$ ,  $\partial_\nu v = 0$  på  $\Gamma$   
Akustiska Green  $\Rightarrow v(x) = \int_{\Gamma} (v(y) \partial_\nu \Phi_k(y-x) - \Phi_k(y-x) \partial_\nu v(y)) ds(y)$

Låt  $x \rightarrow \Gamma$ :

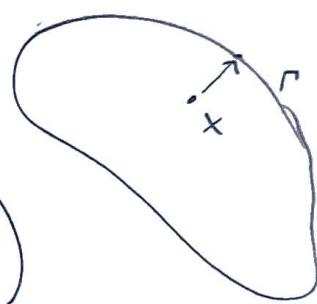
$$v(x) = \underbrace{\frac{1}{2} v(x)}_{\text{egenvariabel}} + K_k v(x)$$

$$0 = -\frac{1}{2} v(x) + K_k v(x)$$

$\therefore v$  ligger i:

$N(-\frac{1}{2}I + K_k)$  alltså ej injektiv  
 $\hookrightarrow$  snörrum

egenvariabel



$v(x)$  kan ej vara 0 på  
randen om den inte  
är det i det inre

### Transmissionsproblem

$K=0$  vägtag resten av föreläsningen!

$p \in D^-$ . Elektrostatiska potentialen från en punktladdning

$$i p = \underbrace{\Phi}_{\frac{1}{2\pi} \ln(|x-p|)}(x-p) = u^o(x)$$

Antag  $D^+$  ett dielektriskt objekt med relativ permittivitet  $\epsilon \neq 1$  (ej vakuum).  $D^-$  = vakuum,  $\epsilon = 1$

Sökes: Potential i  $D^+$

$$\text{Ansätt: } u(x) = \begin{cases} u^+(x) & i D^+ \\ u^o(x) + u^-(x) & i D^- \end{cases}$$

( $u^o$  är känd,  
 $u^+(x), u^-(x)$  okända)

$u^+, u^-$  löser transmissionsproblemet:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u^+ = 0 \text{ i } D^+ \quad [1] \\ \Delta u^- = 0 \text{ i } D^- \quad [2] \\ u^+ - u^- = u^\circ \text{ på } \Gamma \quad [3] \\ \varepsilon \partial_\nu u^+ - \partial_\nu u^- = \partial_\nu u^\circ \text{ på } \Gamma \quad [4] \\ \nabla u^- \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow \infty \quad [5] \end{array} \right.$$

Gauss lag nära  
fysisk grän

En bra fältansats är:

$$\left\{ \begin{array}{l} u^+(x) = u^\circ(x) + \int_{\Gamma} \Phi(y-x) h(y) ds(y), \quad x \in D^+ \\ u^-(x) = \int_{\Gamma} \Phi(y-x) h(y) ds(y), \quad x \in D^- \end{array} \right.$$

[1], [2], [5] är ok oavsett vad  $h$  är. Även [3] är okej, då enkelskiktspotentialen är kontinuerlig tvärs kurvan (logaritmen är en slag singularitet)

Sök nu densitet  $h(y)$  s.a. [4] gäller:

$$x \in \Gamma \Rightarrow \varepsilon (\partial_\nu u^\circ(x) - \frac{1}{2} h(x) + K^* h(x)) - (\frac{1}{2} h(x) + K^* h(x)) = \partial_\nu u^\circ(x)$$

$$-\frac{1}{2} (\varepsilon + 1) h(x) + (\varepsilon - 1) K^* h(x) = -(\varepsilon - 1) \partial_\nu u^\circ$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1} h(x) + K^* h = -\partial_\nu u^\circ$$

$$\lambda \quad \varepsilon > 1 \Leftrightarrow \lambda > \frac{1}{2}$$

$$\varepsilon \in (0, 1) \Leftrightarrow \lambda < -\frac{1}{2}$$

Figure 5.9

### Proposition 5.6.3

Om  $|\lambda| > \frac{1}{2}$  så är  $-\lambda I + K^*$  inverterbar

### Beweis

Enligt Fredholmsalternativet räcker det att visa att  $-\lambda I + K^*$  är injektiv

Antag  $-\lambda h + K^* h = 0$  (och försök visa att  $h=0$ )

Betrakta enkelskiktspotentialen av  $h$ :

$$v^{\pm}(x) = \int_{\Gamma} \Phi(y-x) h(y) ds(y)$$

$$\text{Green 1} \Rightarrow \int_{D^+} (|\nabla v^+|^2 + v^+ \Delta v^+) dx = \int_{\Gamma} v^+ \overbrace{\partial_\nu v^+}^{+\frac{1}{2}h + K^*h} ds(y) \quad (\text{I})$$

$$\int_{D^-} (|\nabla v^-|^2 + v^- \Delta v^-) dx = - \int_{\Gamma} v^- \overbrace{\partial_\nu v^-}^{-\frac{1}{2}h + K^*h = \frac{1}{2}h + \lambda h} ds(y) \quad (\text{II})$$

$\Gamma$   
" "  $v^+$  på  $\Gamma$

$$\left(\frac{1}{2} + \lambda\right)(\text{I}) + \left(-\frac{1}{2} + \lambda\right)(\text{II}) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2} + \lambda\right) \underbrace{\int_{D^+} |\nabla v^+|^2 dx}_{\text{D}^+} + \left(-\frac{1}{2} + \lambda\right) \underbrace{\int_{D^-} |\nabla v^-|^2 dx}_{\text{D}^-} = 0$$

om  $|x| > \frac{1}{2} \Rightarrow$  har samma tecken  $\Rightarrow \nabla v^+ = 0$  i  $D^+$   
 $\nabla v^- = 0$  i  $D^-$

$$\Rightarrow 0 = \partial_\nu v^- - \partial_\nu v^+ = \left(\frac{1}{2}h + K^*h\right) - \left(\frac{1}{2}h + K^*h\right) = h$$

STORGRUPPSÖVNING 7/12-2023

⑤6  $A = \begin{bmatrix} a-1 & a-1 \\ a & a+1 \end{bmatrix} \quad a \in \mathbb{R}$

Beräkna  $N(A)$  och  $R(A)$  & a. Kontrollera dimensionssatsen

Lösning:

$$N(A) = \{x ; Ax = 0\}$$

$$R(A) = \{Ax ; x \in \mathbb{R}^2\}$$

Lös ekvationssystem:

(1)-(a-1)(2)

$$\left[ \begin{array}{cc|c} a-1 & a-1 & y_1 \\ a & a+1 & y_2 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} a-1 & a-1 & y_1 \\ 1 & 2 & y_2 - y_1 \end{array} \right] \xrightarrow{(1)-(a-1)(2)} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & y_2 - y_1 \\ 0 & 1-a & y_1 - (a-1)(y_2 - y_1) \end{array} \right]$$

$N(A)$ :  $a \neq 1 \Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow N(A) = \{0\}$

$$a = 1 \Rightarrow N(A) = \text{span}(-2, 1)$$

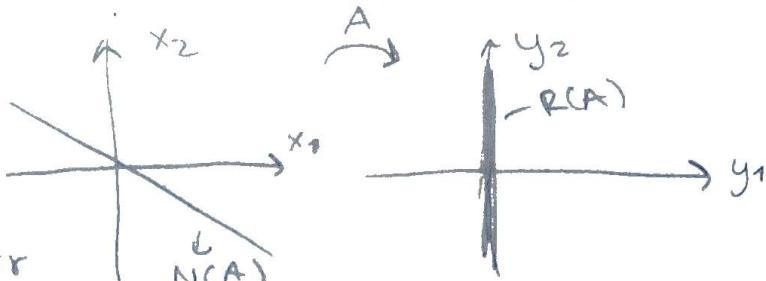
$R(A)$ :  $a \neq 1 \Rightarrow R(A) = \mathbb{R}^2$

$$a = 1 \Rightarrow R(A) = \text{span}(0, 1)$$

Dimensionssatsen:  $2 - \dim(R(A)) = \dim(N(A))$

$$a \neq 1: 2-2=0 \text{ o.v.}$$

$$a=1: 2-1=1 \text{ d.v.}$$



5.9

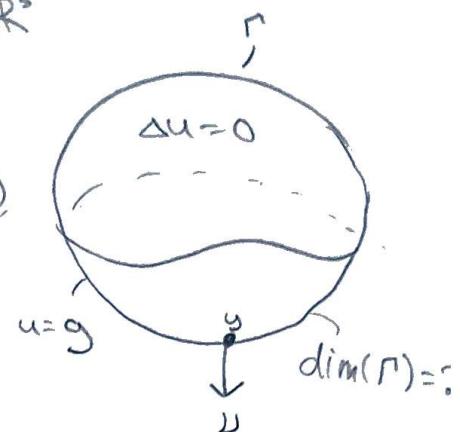
Visa att kärnan för Neumann-Poincaréoperatorn är svagt singulär på en yta  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$

Lösning: Integralkvation:  $-\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|y-x|}$

$$\frac{1}{2} h(x) + \int_{\Gamma} v(y) \cdot \nabla \Phi(y-x) h(y) dS(y) = g(x), \quad x \in \Gamma$$

onregeliteten  $K(x,y)$   
uriktigt!

$$K(x,y) = v(y) \cdot \frac{y-x}{4\pi |y-x|^3}$$



$$\left( \iint_{\substack{\mathbb{R}^2 \\ |x|<1}} \frac{1}{|x|^\alpha} dx_1 dx_2 = \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{r^\alpha} 2\pi r dr}_{\frac{1}{r^{\alpha-1}} = 1 \Leftrightarrow \alpha = 2 \text{ uriktiga exponenter}} < \infty \quad \text{om } \alpha < 2 \right)$$

K svagt singulär om  $|K(x,y)| \leq \frac{c}{|x-y|^\alpha}$  för  $\alpha < 2$

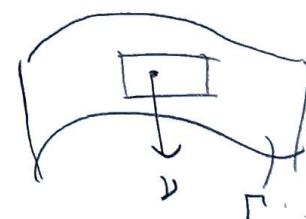
Vi har  $|K(x,y)| \leq \frac{1}{4\pi|x-y|^2}$  detta duger inte Cauchy-Schwartz

Välj koordinatsystem s.a.  $y=(0,0,0)$  och  $v(y)=(0,0,-1)$

$$K(x,y=0) = -\frac{0-x_3}{4\pi(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Låt  $M$  vara grafen till  $x_3 = f(x_1, x_2)$ ,

där  $f(0,0)=0, \nabla f(0,0)=(0,0)$



$$K(x,y) \underset{x \in \Gamma}{=} \frac{f(x_1, x_2)}{(x_1^2+x_2^2+(f(x_1, x_2))^2)^{\frac{3}{2}}}. \frac{1}{4\pi} = \begin{cases} \text{Taylor utveckling:} \\ f(x_1, x_2) = Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_1x_2 + O(|x|^3) \end{cases}$$

$$= \frac{Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_1x_2 + O(|x|^3)}{4\pi(x_1^2+x_2^2+O(|x|^4))^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_1x_2}{x_1^2+x_2^2} + O(|x|)}{4\pi \underbrace{\frac{|x|^3}{|x|^2}}_{|x|} (1+O(|x|^2))^{\frac{3}{2}}}$$

begränsat

$$\leq \frac{C}{|x|} \Rightarrow \alpha=1 \text{ duger alltså svagt singulär}$$

$$6.2 \quad v(x, y) = e^{ikx} + e^{iky} \quad \text{komplex amplitud}$$

$$\Delta v + k^2 v = 0$$

1 Är  $v$  en fortskrivande plan våg?

$$u(t, x) = (*)$$

$$\begin{aligned} & \text{Re}(v(x)) e^{-iwt} \\ & \hookrightarrow \text{realvärd} \\ & A(x) \end{aligned}$$

2 Är  $v$  en stående våg?

3 Är  $v$  en uttaggande våg?

Frågan är om det finns en enhetsvektor  $\bar{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$  s.a.

$$v(x, y) = A e^{i k(x-y)} (\bar{a}_1 \bar{a}_2) ? \Leftrightarrow e^{ikx} + e^{iky} = A e^{i k(a_1 x + a_2 y)} ?$$

Omöjligt ty  $\underbrace{(e^{ikx} + e^{iky})^2 = A^2}_{(1+1+2\cos(k(x-y)))}$  ej konstant  $\Rightarrow$  Nej!!

2 (\*)  $\Rightarrow u(t, x) = A(x) \cos(\omega t)$

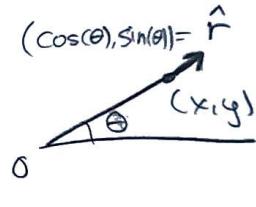
$u$  stående  $\Leftrightarrow \arg(v)$  är konstant

$$v(0, 0) = 1+1=2 \quad \arg = 0$$

$$v\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = i+i=2i \quad \arg = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \text{Nope}$$

3 uttaggande våg  $\Leftrightarrow$  sommerfelds strålningsvillkor

Frågan är om  $\partial_r v - ikv = 0 \quad (\stackrel{\text{litter}}{\rightarrow} \dim=2)$



$$\partial_r v = \hat{r} \cdot \nabla v = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ike^{ikx} \\ ike^{iky} \end{pmatrix} = \cos(\theta) ike^{ikx} + \sin(\theta) ike^{iky}$$

Betrakta  $(x, y) = (x, 0)$  med  $x \ll 0$ : ( $\theta = \pi, y=0$ )

$$\partial_r v - ikv = (-1)ik \sin ikx - ik(e^{ikx} + 1) = 2ike^{ikx} - ik \neq 0$$

Nej!

6.4  $\Delta v + k^2 v = 0$  i  $D$  med sommerfelds strålningsvillkor.

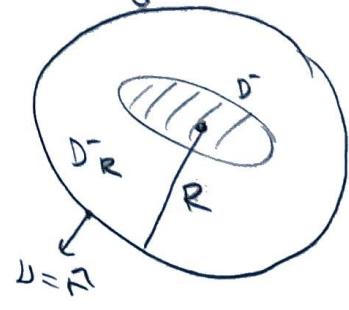
Visa att energiförlödet av  $u(t, x)$  genom  $|x|=R$  alltid är  $\geq 0$ .

Lösning

Från kapitel 3 vet vi att:

$$E(t) = \iint_D \left( \frac{1}{c^2} (\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2 \right) dx$$

$\downarrow$        $\downarrow$   
 kinetisk energi    potentiell energi



$$E'(t) = 2 \int_{|x|=R} \partial_t u \cdot \partial_y u ds$$

Vi visar att  $E'(t) \leq 0$

$$u(t, x) = \operatorname{Re}(v(x)e^{i\omega t}) \quad \partial_t u = \operatorname{Re}(v(x)(-i\omega)e^{-i\omega t})$$

$$\partial_y u = \operatorname{Re}(\partial_y v e^{-i\omega t})$$

ty  $v = \int u$   
i detta fall  $\approx ikv$

Vet:  $\partial_y v - ikv \approx 0$  enligt sommerfeld

$$\Rightarrow E'(t) = -2 \int_{|x|=R} k \cdot \omega (\operatorname{Re}(v e^{-i\omega t}))^2 ds \geq 0$$

## FÖRELÄSNING 15 7/12-2023

Kom ihåg Green 3:

$u$  harmonisk i  $D \Rightarrow$

$$u(x) = \int_{\partial D} (u(y) \partial_y \Phi(y-x) - \underbrace{\Phi(y-x) \partial_y u(y)}_{\text{vill eliminera denna term}}) ds(y)$$

för att lösa Dirichlet



### Definition

Fixera  $x \in D$ . Vi säger att  $G(y) = G(y, x)$  är en Greenfunktion för  $D$  med pol i  $x$ , om

$$G(y, x) = \Phi(y-x) + g(y) \quad \begin{matrix} \text{dåna sär} \\ \text{fixa punkter} \end{matrix}$$

- $\Delta_y g(x) = 0 \quad (\Leftrightarrow \Delta_y G = \delta_x) \quad i \ D$
- $g(x) = -\Phi(y-x) \quad \text{på } \partial D \quad (\Leftrightarrow G(y, x) = 0 \quad \text{då } y \in \partial D)$

Känner vi  $G$  för ett givet område, så kan vi lösa Dirichletproblemet:

$u$  och  $v(y) = G(y, x)$  i Green 2

$$\Rightarrow \iint_D (u \Delta G - G \Delta u) dy = \int_{\partial D} (u \partial_y G - g \partial_y u) dy$$

$$u(x) = \int_{\partial D} u(y) v(y) \cdot \nabla_y G(y, x) ds(y)$$

$y \in \partial D$   
 $x \in D$

Poissonkärnan  $P(y, x)$  för  $D$

## Proposition

För varje fixt  $x \in D$  är  $P(y, x) > 0 \quad \forall y \in \partial D$   
och

$$\int_{\partial D} P(y, x) ds(y) = 1$$

so

## Beweis

$$\int_{\partial D} P ds = \int_{\partial D} v(y) \cdot \nabla G(y, x) ds(y) \stackrel{\text{Gauss}}{=} \iint_D \underbrace{\operatorname{div} \nabla G}_{\Delta} dy = 1$$

På nästa föreläsning ska vi se att  
 $G \leq 0$

$$P = \partial_y G \geq 0$$

■

## Proposition 7.1.4

$$G(y, x) = G(x, y) \quad \forall x, y \in D \quad x \neq y$$

## Beweis

Green 2 med  $u(z) = G(z, x)$   
 $v(z) = G(z, y) \Rightarrow$

$$\iint_D (u \partial_z v - v \partial_z u) dz = \iint_D (y \partial_y v - x \partial_x u) ds(z) = u(y) - v(x) = 0$$

$$= G(y, x) - G(x, y) = 0$$

■

Bara för enkla områden (halvplan, cirkelskivor, ...) kan vi explicit räkna ut  $G$ , typiskt mha en speglingsmetod.

Grundidén: Om  $\partial D$  är plan, kan vi välja

$$G(y, x) = \Phi(y-x) - \underbrace{\Phi(y-x)}_{g(x,y)}$$

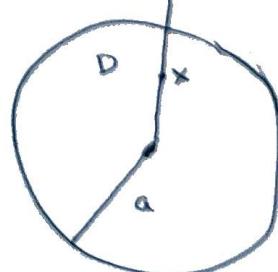


En variant fungerar för cirklar

## Exempel

$$D = \{(x_1, x_2); x_1^2 + x_2^2 < a^2\}$$

Använd "multiplikativ" spegelpunkt



$$x^* = \frac{a^2}{|x|^2} x \Rightarrow |x^*| = \frac{a^2}{|x|}, |x||x^*| = a^2$$

Testa  $G(y, x) = \Phi(y-x) - \Phi(y-x^*)$

$$\Delta_y G = \delta_x - 0 : \square$$

$$|y|=a \Rightarrow \Phi(y-x) - \Phi(y-x^*) = \frac{1}{4\pi} \ln\left(\frac{|y-x|^2}{|y-x^*|^2}\right) = \left\{ |x|=r \right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \ln\left(\frac{a^2 + r^2 - 2y \cdot x}{a^2 + (\frac{a^2}{r})^2 - 2y \cdot \frac{a^2}{r} \cdot x}\right) = \frac{1}{4\pi} \ln\left(\frac{a^2 + r^2 - 2y \cdot x}{r^2 + a^2 - 2y \cdot x} \cdot \frac{r}{a^2}\right) =$$

$$\frac{1}{4\pi} \ln\left(\frac{r^2}{a^2}\right) = \frac{1}{4\pi} \ln\left(\frac{|x|^2}{a^2}\right)$$

→ konstant map. y

Korrigerar:

$$G(y, x) = \frac{1}{4\pi} \ln\left(\frac{|y-x|^2}{|y-x^*|^2 |x|^2}\right) = \left\{ \begin{array}{l} \text{polära: } y = re^{ik} \\ x = re^{i\theta} \end{array} \right\} =$$

$$\frac{1}{4\pi} \ln\left(\frac{a^2}{r^2} \frac{s^2 + r^2 - 2rs \cos(k-\theta)}{s^2 + \frac{a^4}{r^2} - 2s \frac{a^2}{r} \cos(k-\theta)}\right)$$

⇒ Poisson kärnan för cirkel skivan

$$P(y, x) = \partial_y G(y, x) = \left. \frac{\partial G}{\partial s} \right|_{s=a} = \dots = \frac{1}{2\pi a} \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2a \cos(k-\theta)}$$

Analogt kan vi för Neumannproblemets arbeta med Neumannfunktion (Neumann-Green)

$$N(y, x) = \Phi(y-x) + n_x(y) \text{ kräv: } \left\{ \begin{array}{l} \Delta_y N = \delta_x \\ \partial_y N = \frac{1}{1201} \end{array} \right.$$

Kom ihåg att

$$\iint_D \underbrace{\Delta_y N}_{\delta_x} = \iint_{\partial D} \underbrace{\partial_y N}_{\frac{1}{1201}} \quad \text{mäste gälla för att } N \text{ ska kunna existera}$$

Green 2 ⇒

$$\iint_D (u \Delta_y N - N \Delta u) dy = \iint_{\partial D} (u \underbrace{\partial_y N}_{\frac{1}{1201}} - N \partial_y u) ds(y)$$

⇒  $u(x) = \text{medelvärdet av } u \text{ på } \partial D -$

$$\int_D N(y, x) \partial_\nu u(y) ds(y)$$

Grundidén för att finna  $N(y, x)$ : Om  $\partial D$  är plan, välj  $N(y, x) = \Phi(y - x) - \Phi(y - x^*)$

För cirkelskivan testar vi:

$$N = \frac{1}{4\pi} \left[ \ln(r^2 + r^2 - 2r\cos(\theta - \theta)) + \ln(s^2 + \frac{a^4}{r^2} - 2s\frac{a^2}{r}\cos(\theta - \theta)) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial N}{\partial s} \Big|_{s=a} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{2a - 2r\cos(\theta - \theta)}{a^2 + r^2 - 2r\cos(\theta - \theta)} + \frac{2a - 2\frac{a^2}{r}\cos(\theta - \theta)}{a^2 + \frac{a^4}{r^2} - 2a\frac{a^2}{r}\cos(\theta - \theta)} \right) \Big|_{r=a} =$$

$$\dots = \frac{1}{2\pi a} = \frac{1}{120}$$

FÖRELÄSNING 16 8/12-2023

### Harmoniska funktioners egenskaper

1.  $u$  är  $C^\infty$  slät.

2. medelvärdesegenskapen:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi r} \int_{|y-x|=r} u(y) ds(y), \forall x, r$$

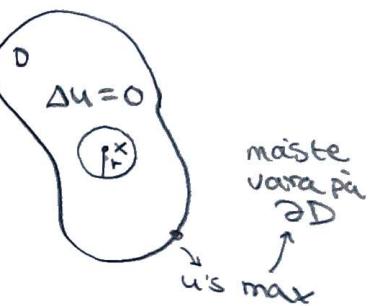
3. maximumsprincipen: max för  $u$  på  $D$  antas på  $\partial D$

1. Green 3  $\Rightarrow$  (antag  $n=2$ )

$$u(x) = \int_D (u(y) \underbrace{\frac{\gamma_1(y) \cdot (y_1 - x_1) + \gamma_2(y) \cdot (y_2 - x_2)}{2\pi |y-x|^2}}_{(*)} + \frac{1}{2\pi} \ln(|y-x|) \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)) ds(y)$$

Derivation under integraltecknet  $\Rightarrow C^\infty$

2. (sats 7.2.2) Låt  $n=3$



Antag (till att börja med) inte att  $\Delta u = 0$

Green 3 för cirkeln:  $B = B(x, r) = \{y; |y-x| < r\}$

$$(*) = -\frac{1}{4\pi r |y-x|}$$

$$(**) = -\frac{1}{4\pi r}$$

↓ konstant!

$$\iiint_B (u(y) \underbrace{\Delta \Phi(y-x)}_{S_x} - \underbrace{\Phi(y-x) \Delta u(y)}_{(*)}) dy =$$

$$(**) = -\frac{1}{4\pi r^2}$$

$$\iint_{\partial B} (u(y) \underbrace{\partial_\nu \Phi(y-x)}_{(**)} - \underbrace{\Phi(y-x) \partial_\nu u(y)}_{(***)}) ds(y)$$

$$u(x) - \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial B} u(y) dS(y) = - \iiint_B \left( \frac{1}{4\pi |y-x|} + \frac{1}{4\pi r} \right) \Delta u(y) dy$$

$\left\{ \iint_{\partial B} u \cdot \nabla u ds \stackrel{\text{Gauss}}{=} \iint_B \underbrace{\operatorname{div}(Du)}_{\Delta} dy \right\} = \iint_B \left( \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{|y-x|} \right) \Delta u(y) dy \right)$

Lö i hela  $B$

- Om  $\Delta u = 0$ , så har  $u$  medelvärdesegenskapen.
- Omvänt: Om  $u$  har medelvärdesegenskapen så är  $\Delta u = 0$ ,  $\forall B$   
 $\Rightarrow \Delta u = 0$

3. Maximumprincipen för  $\Delta$ : (7.2.3) slutna  
höjdet  
område

$D \subseteq \mathbb{R}^n$  begränsad och sammanhängande  
 $\Delta u = 0$  i  $D$ ,  $u$  är kontinuerlig på  $\bar{D} = \text{D} \cup \partial D$ . Då gäller

(w)  $M := \max_{\bar{D}} u$  antas på  $\partial D$

(S) Om  $M$  antas i en inte punkt i  $D$ , så är  $u$  en konstant funktion.

Beweis (S)  $\Rightarrow$  (w): så, det räcker att visa den starka formen (S).

Antag att  $u$  har ett max i  $x$  i det inre. Vi använder medelvärdes egenskapen

$$u(x) = \frac{1}{2\pi r} \iint_{|y-x|=r} u(y) dS(y)$$

$M'' \quad u(y) \leq M$



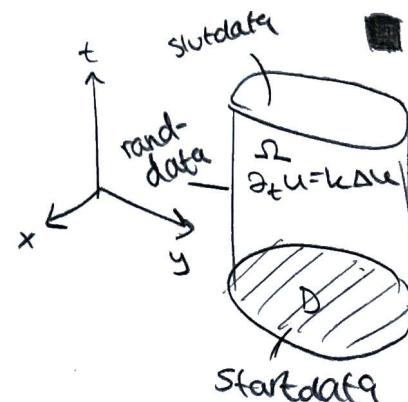
Detta är möjligt bara om  $u(y)=M \forall y$  på cirkeln för om något  $u(y) < M$  så blir även medelvärdet < M. Iterera för olika  $x$  och  $r$  (se figur)  $\Rightarrow u$  är konstant i D.

### Keloriska funktioners egenskaper

Kelorisk :=  $\partial_t u = k \Delta u$

1.  $u$  är  $C^\infty$  slät

2.  $u$  har en kelorisk medelvärdesegenskap



### 3. Keloriska maximumprincipen:

max för  $u$  antas bland start eller randdata (se figur)

#### 3. Maximumprincipen för (VÄ) (7.2.4)

$D \subseteq \mathbb{R}^n$  begränsat och sammanhängande område.

$$\Omega = (0, T) \times D$$

$$\partial_t u = k \Delta u, u \text{ är kontinuerlig på } \bar{\Omega} = [0, T] \times \overline{D}$$

↗ slutna  
nöjset      ↙ inre rand

(w)  $M := \max_{\bar{\Omega}} u$  antas bland start- eller randdata

(s) Om  $M$  antas i  $(0, T] \times D$ , dvs i det inre eller bland slutdata, så är  $u$  konstant.

#### Beweis

(för (w))

- Antag först att  $\partial_t v < k \Delta v$  ((VÄ) med negativ källa) i  $\Omega$

Om  $v$  antar max i en intc punkt:

$$\partial_t v = 0 \text{ och } \Delta_x v \leq 0 \Rightarrow \text{motsägelse } 0 < 0$$

Om  $v$  antar max bland slutdata:

$$\partial_t v \geq 0 \text{ och } \Delta_x v \leq 0 \Rightarrow \text{motsägelse}$$

$\therefore v$  antar max bland start- eller randdata

- Om nu  $\partial_t u = k \Delta u$ , låt  $v(t, x) := u(t, x) + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i |x_i|^2$
- $$\Rightarrow \partial_t v - \Delta v = (\underbrace{\partial_t u - \Delta u}_0 + \underbrace{\partial_t(\varepsilon_i |x_i|^2)}_0 - \Delta(\varepsilon_i |x_i|^2)) = -2n\varepsilon < 0$$
- Alltså gäller  $\overset{\geq 0}{\underset{0}{\varepsilon}}$   $\overset{\geq 0}{\underset{0}{\varepsilon}}$   $\overset{\geq 0}{\underset{\varepsilon 2n}{\varepsilon}}$

Alltså gäller  
det ovan

Antag nu att  $u(t_0, x_0)$  är max bland  $u$ :s start- och randdata

$$\Rightarrow u(t, x) \leq u(t_0, x_0) \text{ om } t=0 \text{ eller } x \in \partial D$$

$$v(t, x) \leq u(t_0, x_0) + \varepsilon L^2 \text{ om } t=0 \text{ eller } x \in \partial D$$

$\hookrightarrow$  största avståndet till origo i  $\Omega$

$$\Rightarrow v(t, x) \leq u(t_0, x_0) + \varepsilon L^2 \text{ för } \underline{\text{alla }} (t, x)$$

$$\Rightarrow u(t, x) \leq u(t_0, x_0) + \varepsilon L^2 \text{ för } \underline{\text{alla }} (t, x) \text{ } \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow u(t, x) \leq u(t_0, x_0) \text{ } \forall (t, x) \text{ då } \varepsilon > 0 \text{ är godtyckligt}$$

Extra kommentar från förra föreläsningen:

Dirichlet  $\rightarrow$  Green  $u(x) = \int_D u(y) \underbrace{\gamma(y,x)}_{D(y,x) > 0} ds(y)$

Neumann  $\rightarrow$  Neumann-Green  
funktion

$$\int_D = 1$$

$$u(x) = u - \int_D \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) N(y,x) ds(y)$$

OBS!  $N(y,x) \neq 0$   $\int_D N(y,x) ds(y) \neq 1$  till skillnad från  
när vi betraktar Dirichlet

$N(y,x)$  är ej entydigt bestämd.

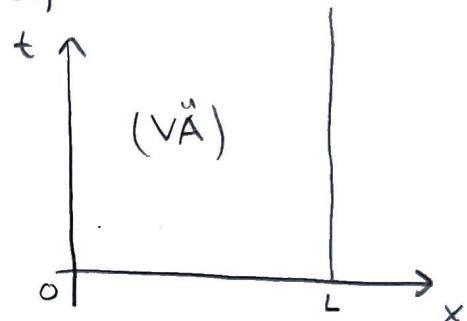
STOR GRUPPSÖUNING 12/12-2023

7.4  $u,v$  löser (VÄ) utan källor.  $D = (0,L)$

$u \leq v$  då  $t=0, x=0$  eller  $x=L$   
Visa att  $u \leq v \wedge t > 0, 0 < x < L$

Lösning: Bilda  $w = u - v$

Vet  $w=0$  bland start- och  
randdata.  $w$  löser (VÄ)



Maximumpriincipen för  $w$  visar att  $w \leq 0$  överallt  $\Leftrightarrow$   
 $u \leq v$

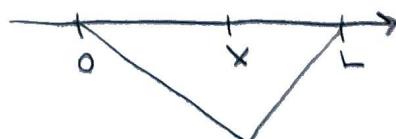
7.6 Bestäm Greensfunktionen för  $D = (0,L)$

Lösning:  $G(y,x) \xrightarrow{\text{fix } x \text{ på}}$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} &= \Delta_y G = \delta_x \text{ i } D \\ \left( G(y,x) &= \Phi(y-x) + g_x(y) \quad \Delta \Phi = \delta_x \right) \end{aligned}$$

$$\bullet \quad G(y,x) = 0$$

$$G(y,x) = \begin{cases} a+by, & 0 \leq y < x \\ c+dy, & x < y \leq L \end{cases}$$



$$G' = \begin{cases} b \\ d \end{cases}$$

$$G'' = \delta_x \Rightarrow d-b = 1$$

$$G(0,x) = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$G(L,x) = 0 \Rightarrow c+dL = 0$$

$$G(x-,x) = G(x+,x) \Rightarrow a+bx = c+dx$$

Gränsen behöver  
vara densamma

Lös ut konstanter  $\Rightarrow$

$$a=0 \quad b=\frac{x-L}{L} \quad c=-x \quad d=\frac{x}{L}$$

$$g(y, x) = \begin{cases} -(1 - \frac{y}{L}) y, & y < x \\ -x + \frac{y}{L} y, & y > x \end{cases}$$

7.7  $\partial_t u = \partial_x^2 u, 0 < x < L, 0 < t < T$

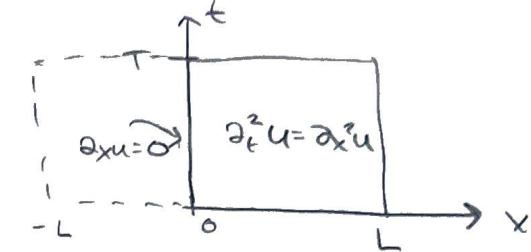
$$\partial_x u = 0, x=0$$

Visa:  $u$  antar max vid  $t=0$  eller  $x=L$

Lösning: Utvidga  $u$  till en jämn funktion map.  $x$ :

$$v(t, x) = \begin{cases} u(t, x), & x \geq 0 \\ u(t, -x), & x < 0 \end{cases}$$

fö r  
-L < x < L,  
T > t > 0



Kontroll av (VÄ) för  $v$ : ok för  $x > 0$

$$x < 0: \partial_t v = \partial_t u \leftarrow \partial_x^2 v = \partial_x^2 u (-1)^2 \text{ lika}$$

$x=0$ : Som i figur,  $\partial_x u = 0$  vid  $x=0$

$\Rightarrow v$  och  $\partial_x v$  är kontinuerlig vid  $x=0$

$\Rightarrow \partial_t u$  och  $\partial_x^2 u$  "innehåller inga Diracdeltan"

$v$  löser (VÄ) i  $-L < x < L, 0 < t < T$ .

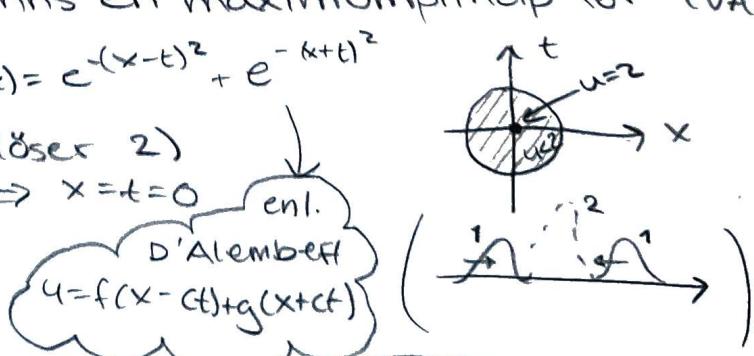
Maximumprincipen  $\Rightarrow v$  antar max vid  $t=0$  eller  $x=L$  eller  $x=-L$ , symmetri  $\Rightarrow u$  antar max vid  $t=0$  eller  $x=L$

7.13 Visa att det inte finns en maximumprincip för (VÄ)

Lösning: Tag t.ex.  $u(t, x) = e^{-(x-t)^2} + e^{-(x+t)^2}$

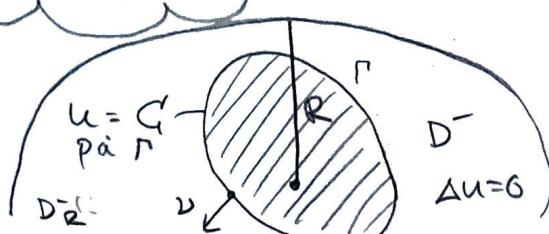
$$u(0,0) = 2 \quad (\text{Antag } u \text{ löser 2})$$

$$u=2 \Rightarrow x-t=0 \Rightarrow x+t=0 \Rightarrow x=t=0$$



5.12  $u \rightarrow \infty$  då  $|x| \rightarrow \infty$   
u som i figuren  
Visa:  $\partial_\nu u \geq 0$  på  $\Gamma$

Lösning: Använd maximumprincipen på  $-u$  i  $D_R^-$



$u$  harmonisk  $\Rightarrow -u$  harmonisk

På  $\partial D_R$ :  $-u = -c$  på  $\Gamma$

$-u \leq -c$  på  $|x|=R$  om  $R$  väljs stort

$\Rightarrow u \leq -c$  i hela  $D_R$

$\Rightarrow \partial_\nu u \geq 0$  på  $\Gamma$ :

(6.10)  $\Delta u + k^2 u = 0$  på  $x^2 + y^2 \leq a^2$

Visa:  $u(0,0) = \frac{1}{J_0(ka)} \frac{1}{2\pi a} \int u ds$   
Besselfunktionen  $x^2 + y^2 = a^2$

Lösning:  $v(r) = \frac{1}{2\pi r} \int u ds = f u ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \theta) d\theta$

Visa att  $v$  löser Helmholtz ekvation

Lösning:  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{du}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = k^2 u$

$\Delta v = \Delta f u = \frac{1}{2\pi} \int (\underbrace{f}_{x^2+y^2=r^2}) d\theta = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + 0 = k^2 v$

$\Rightarrow \Delta v + k^2 v = 0$

Allmänna radiella lösningen till Helmholtz ekvation:

$$= A J_0(kr) + B Y_0(kr)$$

$$\left. \begin{array}{l} J_0(0)=1, Y_0 \text{ har en singularitet i origo} \\ v(0)=u(0,0) \end{array} \right\} \Rightarrow A=u(0,0)$$

$\Rightarrow f u = u(0,0) J_0(kr)$

$$x^2+y^2=r^2$$

FÖRELÄSNING (jag tydligare missat)

Diracsystem av PDE:er

Ett system av PDE:er är ett flertal PDE:er för ett flertal okända flervariabelfunktioner

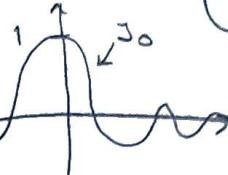
Definition

Ett system  $Pv=f$ ,  $P=N \times N$  av linjära homogena 1:a ordningens PD-operatörer

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix} \quad \text{källor sägs vara ett:}$$



f = medel-  
värde



• Elliptiskt Dirac system om  $P^2 = \Delta I_N = \begin{bmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{bmatrix}$   
(kvadratrot ur Laplace)

• Hyperboliskt Dirac system om  $P^2 = \left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta\right) I_N = \begin{bmatrix} \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Delta & 0 \\ 0 & \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Delta \end{bmatrix}$   
(kvadratrot ur våg)

### Cauchy-Riemanns ekvationer (CR)

Dessa är  $\begin{bmatrix} -\partial_x & \partial_y \\ \partial_y & \partial_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_x v_1 = \partial_y v_2 \\ \partial_y v_1 = -\partial_x v_2 \end{cases}$  OBS!  $N$  för dim på  $P$  har inget att göra med dim av  $v_1, v_2$ . Vi kan t ex ha  $N = 10 \Rightarrow P = 10 \times 10$  matris med  $v_1(x, y)$  (rdim)

$$P^2 = \begin{bmatrix} -\partial_x & \partial_y \\ \partial_y & \partial_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\partial_x & \partial_y \\ \partial_y & \partial_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} \Rightarrow \text{elliptisk Dirac}$$

- Om  $v$  löser CR-ekvationer så är  $v_1, v_2$  harmoniska funktioner.
- Om  $\Delta v_1 = 0$  i ett enkelt sammanhängande område så existerar alltid en annan harmonisk funktion  $v_2$  s.a.  $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = v$  löser

- CR-ekvationer  $v_1$  och  $v_2$  sägs vara harmoniska funktioner.  $v_2$  är entydigt bestämd av  $v_1$  upptill konstanter.
- CR studeras i komplex analys, fast med komplexa tal istället för  $\mathbb{R}^2$ -vektoret  
 $v = v_1 + i v_2$  av  $z = x + iy$ .  $v(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .  $v$  sägs vara en analytisk/holomorf funktion

### Exempel

Kompleksa potensserier  $v(x+iy) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+iy)^n$  är analytiska funktioner

$$\begin{cases} v_1(x, y) = x^3 - 3xy^2 \\ v_2(x, y) = 3x^2y - y^3 \end{cases}$$
 är harmoniska konjugatfunktioner

### Maxwells ekvationer

Dessa beskrives hur? genom elektromagnetiska fält  
 $E = (E_1, E_2, E_3)$  (el)  $B = (B_1, B_2, B_3)$  (magn.)

Vi betraktar bara fallet i VAKUUM

Gauss lag: $\operatorname{div}(E) = S$ $E = \nabla \cdot E = S$ $\curvearrowleft \curvearrowup \curvearrowright \curvearrowup$ $\curvearrowleft \curvearrowup \curvearrowright \curvearrowup$ laddningstäthet	Amperes lag: $\operatorname{rot}(curl(B))$ $= \nabla \times B = J$ $\uparrow J$ $\uparrow \uparrow B$	Faradays induktionslag $\frac{1}{c} \partial_t B + \nabla \times E = 0$ $\curvearrowleft \downarrow \downarrow \curvearrowright$ $\curvearrowleft \downarrow \downarrow \curvearrowright$ $\partial_t B$ $E$	Gauss magnetiska lag $\nabla \cdot B = 0$
Maxwells korrelation: $-\frac{1}{c} \partial_t E \cdot (\nabla \times B) = J$			

Dessa 4 utgör Maxwells ekvationer. Trots att de är linjära utgör de en exakt modell för elektromagnetisk vågutbredning. De är alltså relativistiskt korrekta, trots att de upptäcktes ca 50 år före Einstein

## Picards formulering av Maxwell

Vi har 8 ekvationer / PDE:er för 6 okända 4-variabelfunktioner. Lägg till 2 hjälpfunktioner som okända  $f$  och  $g$  för att få  $8 \times 8$ ,  $f=g=0$  för fysikaliska lösningar.

$$\begin{array}{c|ccccc} \text{Blockmatrix} & & & & \\ \hline -\frac{1}{c}\partial_t & \text{div} & 0 & 0 & | & f \\ -\text{grad} & -\frac{1}{c}\partial_t & \text{rot} & 0 & | & E \\ 0 & \text{rot} & \frac{1}{c}\partial_t & \text{grad} & | & B \\ 0 & 0 & -\text{div} & -\frac{1}{c}\partial_t & | & g \end{array} = \begin{bmatrix} g \\ J \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Gauss} \\ \text{Maxwell-Ampere} \\ \text{Faraday} \\ \text{Magnetiska Gauss} \end{array}$$

Med ---  
får vi  
Picards  
formulering  
av ME

$\rho$  (8x8 egenvärde)  $\nabla$

## Proposition

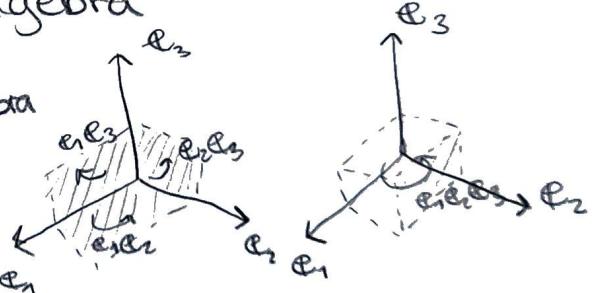
$P^2 = \left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta\right)I_8$  för  $P$  ovan  $\Leftrightarrow$  Systemet ovan är ett hyperboliskt Diracsystem

## Clifford algebra

CL studeras bärst med komplex algebra:  $zw = (z_1 + iz_2)(w_1 + iw_2)$   
 $= z_1w_1 - z_2w_2 + i(z_1w_2 + z_2w_1)$ .

ME studeras bärst med Cliffordalgebra

$$\begin{cases} e_i^2 = 1, i=1,2,3 \text{ genererar multivektorer} \\ e_i e_j = -e_j e_i, i \neq j \in \mathbb{R}^3 \text{ för Cliffordalgebra} \\ \text{skalar} = 0 \text{ 1-vektor (orienterad linje)} \quad 2\text{-vektorer (orienterad area)} \\ w = a_0 I + (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) + (a_4 e_1 e_2 + a_5 e_1 e_3 + a_6 e_2 e_3) \\ \quad + a_7 e_1 e_2 e_3 \quad \text{är ett} \\ \quad \text{3-vektor (orienterad volym)} \quad \text{8 dimensionellt tal} \end{cases}$$



## Exempel

$$e_3 e_1 e_2 \cdot e_1 = -(e_3 \cdot e_1) \cdot (e_1 \cdot e_1) = -e_3 e_1 = (e_2 e_3) \text{ blir bara en basmultivector}$$

$-e_2 e_3$

## Exempel

$$(a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) \cdot (b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3) = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) +$$

$$\underbrace{[a_1 b_2 - a_2 b_1] e_1 e_2}_{\approx e_3} + \underbrace{(a_1 b_3 - a_3 b_1) e_1 e_3}_{\approx -e_2} + \underbrace{(a_2 b_3 - a_3 b_2) e_2 e_3}_{\approx e_1}$$

$\text{o-vektor} = a \cdot b$

2-vektor  $\approx a \times b$  om vi identifierar vektorer och bivektorer cyklistiskt

# FÖRELÄSNING (som jag också tydligen missade)

## Cliffordalgebra

För ME räknar vi med multivektorer  $w = a_0 \mathbf{1} + a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 + a_4 \mathbf{e}_{12} + a_5 \mathbf{e}_{13} + a_6 \mathbf{e}_{23} + a_7 \mathbf{e}_{123}$ . Vi multiplicerar mha distributiva lagen och Cliffordalgebra räkneregler. Vi kan representera multivektorer med matriser

## Matrisrepresentation

Multivektorer bildar ett 8-dimensionellt vektorrum  $\mathbb{R}^8$  och produkten är assosiativ,  $\{z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3\}$  dock ej kommutativ  $\{z_1 z_2 \neq z_2 z_1\}$  i allmänhet. Beter sig därför likt matrismultiplikation.

Vi har isomorfism med Paulimatrimer

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &\leftrightarrow G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{e}_2 &\leftrightarrow G_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{e}_3 &\leftrightarrow G_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Räknereglerna uppfylls av de 3 Paulimatrismerna. För att kodla Cliffordalgebra är det därför lämpligt att använda matriser istället.

Vi vill nu skriva om ME med Clifford algebra, analogt med hur vi skrev om CR med komplex algebra.

## Proposition 8.2.2

Låt  $(E_1, E_2, E_3)$  vara det elektriska fältet och  $(B_1, B_2, B_3)$  det magnetiska, samt med Picards 2 hjälpfunktioner f.g. Detinera ett multivektorfält

$$F = f \cdot \mathbf{1} + E_1 \mathbf{e}_1 + E_2 \mathbf{e}_2 + E_3 \mathbf{e}_3 + B_1 \mathbf{e}_{23} + B_2 \mathbf{e}_{31} + B_3 \mathbf{e}_{12} + g \mathbf{e}_{123}$$

$$\begin{aligned}e_i e_j &= 1 \\ e_i e_j &= -e_j e_i\end{aligned}$$

Då är Picards formulering av ME  $\Leftrightarrow \frac{1}{c} \partial_t F + (\underbrace{e_1 \partial_{x_1} + e_2 \partial_{x_2} + e_3 \partial_{x_3}}_{D = \text{Diracoperator}}) F$

$$\underbrace{g - j}_{G}$$

## "Bevis"

Vi tittar så att det stämmer i vissa fall. Låt oss t.ex. betrakta 2-vektor delen av elevationen  $\frac{1}{c} \partial_t F + D F = G$

$$HL: G = \hat{g} - \hat{j} + \hat{o} + \hat{\phi} \Rightarrow 0 \text{ är 2-vektor delen}$$

$$VL: \frac{1}{c} \partial_t B + \nabla \times E \text{ som 2-vektor delar}$$

HL = VL Gauss lag ( $\Leftrightarrow$  annat  $j \geq 0$  men vi struntar i det nu)

pss. har vi att 0-vektordelen  $\Rightarrow$  Gauss lag, 1-vektordelen  $\Rightarrow$  Maxwell-Ampere och 3-vektor  $\Rightarrow$  magnetisk Gauss



## Lösning till Maxwell

Vi löser nu IVP för Maxwells ekvationer:

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \partial_t F + D F = 0, t > 0, x \in \mathbb{R}^3 \\ F = 0, t = 0 \end{cases} \quad (\text{Var i kapitel 3 i tankarna})$$

Fixera  $t > 0$  och Fouriertransformen  $\hat{F}$  (koordinatvis),

$$\hat{F}(\xi) = \int F(x) e^{-ix \cdot \xi} dx \quad \frac{1}{c} \partial_t \hat{F} + (\varphi_1 i \xi_1 + \varphi_2 i \xi_2 + \varphi_3 i \xi_3) \hat{F} = \hat{G}$$

$i\xi, \xi$  är en 1-vektor

$\partial_t \hat{F} + i c \xi \hat{F} = c \hat{G}$ , 1:a ordning linjär  $\Rightarrow$  Lös med integrerande faktor!

( $e^{it}$ ? Tänk g potensserie  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ic\xi t)^k}{k!}$  så är det lugnt)

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ic\xi t)^{2m}}{(2m)!} \quad \frac{(ic\xi t)^{2m}}{(2m)!} = \frac{((ic\xi t)^2)^m}{(2m)!} = \frac{(ic|m|)^{2m}}{(2m)!} \Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} \frac{-c^2 t^{2m} (m!)^2}{(2m)!}$$

liknande för udda

$$\Rightarrow e^{ic\xi t} = \cos(c t | \xi |) + \frac{i \xi}{| \xi |} \sin(c t | \xi |) \text{ är integrerande faktor}$$

$$\Rightarrow \partial_s (e^{ic\xi s} \hat{F}_s) = c e^{ic\xi s} \hat{G}$$

$$\Rightarrow e^{ic\xi t} \hat{F}_t = c \int_0^t e^{ic\xi s} \hat{G}_s ds \Rightarrow \hat{F}_t(\xi) = c \underbrace{\int_0^t e^{ic\xi(t-s)} \hat{G}_s ds}_{\cos(c t | \xi |) - i \xi \frac{\sin(c t | \xi |)}{| \xi |}} \text{ Inverstransformer med faltung}$$

Vi känner igen detta som FT av Riemannfunktionen

$$\text{Inverstransform} \Rightarrow F(t, x) = c \int_0^t (\partial_t R_{t-s}(x) - c D R_{t-s}(x)) * G_s(x) ds$$

$$= (\frac{1}{c} \partial_t - D) c^2 \int_0^t R_{t-s}(x) * G_s(x) ds$$

$= A(t, x) = \text{"potential"}$

Beräkna A. variabelbyte:  $r = c(t-s)$ ,  $dr = -cds$

Eftersom  $c > 1$  har vi en approximativ lösning

$$A(t, x) = \iiint_{R^3} \frac{G(t, y)}{4\pi r^2 |y-x|} dy$$

FÖRELÄSNING (sista inspelad) eller storgruppsöning oklart!

⑧ Bestäm harmonisk konjugatfunktion till  $\Phi(x, y) = \frac{1}{4\pi} \ln(x^2 + y^2)$   
i  $D = \{(x, y); x^2 + y^2 > 0\}$

Lösning:  $v_1 = \Phi$   $v_1$ :s harmoniska konjugatfunktion  $v_2$  löser

$$\begin{cases} \partial_x v_1 = \partial_y v_2 \\ \partial_y v_1 = -\partial_x v_2 \end{cases} \quad \begin{aligned} \partial_x v_1 &= \frac{x}{2\pi(x^2+y^2)} & \partial_y v_1 &= \frac{y}{2\pi(x^2+y^2)} \\ &\Rightarrow \partial_x v_2 = -\frac{y}{2\pi(x^2+y^2)}, & \partial_y v_2 &= \frac{x}{2\pi(x^2+y^2)} \end{aligned}$$

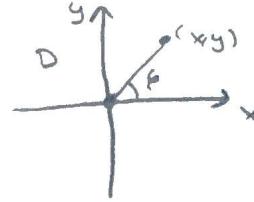
$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow} v_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{x}{x^2+y^2} dy = \left\{ \begin{array}{l} y=xt \\ dy=xdt \end{array} \right\} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{x^2 dt}{x^2+y^2} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{t^2+1} dt =$$

$$\frac{1}{2\pi} \arctan(t) = \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + C(x)$$

$$\text{Insatt i (1): } \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + C'(x) = -\frac{1}{2\pi} \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow C'(x) = 0 \text{ så } C(x) = C = 0$$

Svar:  $\Phi = \frac{1}{4\pi} \ln(x^2 + y^2)$  har harmonisk konjugatfunktion  
 $V_2 = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\arctan(\frac{y}{x})}_{\text{polära vinkeln } \theta}$



### 8.5 Maxwellsekvationer

$$\Leftrightarrow \frac{1}{c} \partial_t F + \nabla F = g - J - G$$

$$\text{Lösning: } F = 0 + E + B + 0 = E_1 e_1 + E_2 e_2 + E_3 e_3 + B_1 e_{12} + B_2 e_{23} + B_3 e_{13}$$

$$G = g - J_1 e_1 - J_2 e_2 - J_3 e_3 \Rightarrow \partial_t F = (\partial_t E_1) e_1 + \dots + (\partial_t B_1) e_{12} + \dots$$

$$\begin{aligned} \nabla F &= (E_1 \partial_1 + E_2 \partial_2 + E_3 \partial_3) F = (\partial_1 E_1 + \partial_2 E_2 + \partial_3 E_3) + (\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1) e_{12} \\ &\quad + (\partial_1 E_3 - \partial_3 E_1) e_{13} + (\partial_2 E_3 - \partial_3 E_2) e_{23} + (\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \partial_3 B_3) e_{123} \\ &\quad + (\partial_3 B_2 - \partial_2 B_3) e_1 + (\partial_1 B_3 - \partial_3 B_1) e_2 + (\partial_2 B_1 - \partial_1 B_2) e_3 \end{aligned}$$

$$\text{Gauss: } 0\text{-vektorer} \Rightarrow 0 + \operatorname{div}(E) = g$$

$$\text{Maxwell-Ampere: } 1\text{-vektorer} \Rightarrow \frac{1}{c} \partial_t E - \operatorname{rot}(B) = -J$$

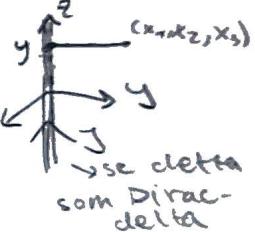
$$\text{Faraday: } 2\text{-vektorer} \Rightarrow \frac{1}{c} \partial_t B + \operatorname{rot}(E) = 0$$

$$\text{Magnetisk Gauss: } 3\text{-vektor} \Rightarrow 0 + \operatorname{div}(B) = 0$$

### 8.6 b) Konstant ström $J$ längs $z$ -axeln, beräkna det magnetiska fältet $B$

Lösning: Biot-Savarts lag

$$\begin{aligned} B(\vec{x}) &= \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{(y-\vec{x})}{4\pi|y-\vec{x}|^3} \times J(y) dy = \left\{ \begin{array}{l} J \text{ är koncentrerad} \\ \text{till } z\text{-axeln} \\ y = y_3 e_3 \end{array} \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_3 e_3 - \vec{x}}{4\pi(x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - y_3)^2)^{\frac{3}{2}}} \times I e_3 dy_3 = I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(y_3 e_3 - \vec{x}) \times e_3}{4\pi(x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - y_3)^2)^{\frac{3}{2}}} dy_3 = \\ &- \frac{I \vec{x} \times e_3}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - y_3)^2)^{\frac{3}{2}}} dy_3 = \left\{ \begin{array}{l} y_3 - x_3 = t \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ dy_3 = dt \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \end{array} \right\} = \\ &- \frac{I \vec{x} \times e_3}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} dt}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}} (1+t^2)^{\frac{3}{2}}} = - \frac{I \vec{x}}{4\pi} \times e_3 \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\pi} I e_3 \times \frac{\vec{x}}{x_1^2 + x_2^2} = \end{aligned}$$



$$I e_3 \times \nabla \Phi_2 = B \quad \text{behöver ej avg i 1 dimension}$$

$$(3.18) \text{ Beräkna } F\{H_t\} = e^{-t \frac{1}{4\pi} \vec{x}^2}$$

$$\text{Lösning: } n=1, m=1 \quad H_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

$$F\{H_t(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t} - ix\xi\right) dx =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{4t}} (x + 2i\xi t)^2 - t\xi^2$$

$$e^{-t\zeta^2} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{4t}(x+2it\zeta)^2\right) dx = e^{-t\zeta^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/4t} ds = e^{-t\zeta^2}$$

(6.13) Visa att  $\Phi_k(x) = -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}$  i  $\mathbb{R}^3$  uppfyller Sommerfelds strålningsvillkor

Lösning:  $\partial_r v - ikv = O(\frac{1}{r}) \Rightarrow r(\partial_r v - ikv) \rightarrow 0$  då  $r \rightarrow \infty$

Vi kontrollerar för  $v = \Phi_k$   $\Phi_k = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}$   $\partial_r \Phi_k = \frac{1}{4\pi r^2} e^{ikr} - \frac{1}{4\pi r} ike^{ikr}$

$$\partial_r \Phi_k - ik\Phi_k = \frac{1}{4\pi r^2} e^{ikr} = O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

(5.17) Förfklara Fredholms lösbarnets resultat för  $*h + Kh = g$ , där  $K$  är en svagt singulär integraloperator i  $L_2(\Gamma)$

Lösning:  $h(x) + \int_{\Gamma}^{\text{svagt}} K(x,y) h(y) dy = g(x)$

Låt  $\Gamma$  vara d-dimensionell yta ( $d=1$  för oss). Då är  $K(x,y)$  svagt singulär om  $|K(x,y)| \leq \frac{c}{|x-y|^d}$  där  $x \in \Gamma$

Resultatet är att det finns  $g_1, \dots, g_N$ , linjärt oberoende s.a. (\*) har en lösning om  $\int g(x) \cdot g_j(x) dx = 0, j=1, \dots, N$

Det finns lika många funktioner  $h_1, \dots, h_N$ , linjärt oberoende s.a. den allmänna lösningen till (\*) är

$$h(x) + a_1 h_1(x) + \dots + a_N h_N(x)$$