PARTIELLA DIFFERENTIALEKVATIONER

TMA690

FÖRELÄSARE: HÅKAN ANDRÉASSON
ANTECKNARE: ANDREAS FALKOVÉN

2014

3/11-2014
Måndag LV1

INTRODUKTION TILL PDE

3 av 7 Milleniumproblemen är relaterade till PDE:
- Poincarés förmodan (Löst!)
- Yang-Mills ekvationer (Förstår ej bakomliggande matematiken)
- Navier-Stokes ekvationer, global existens i tiden.

Exempel: betrakta en icke-linjär ODE:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x^2(t) \\ x(0) = x_0, \; x_0 > 0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$$

Då $t \to \frac{1}{x_0}$ går $x(t) \to \infty$, så lösningen existerar ej för alla $t > 0$ och ekvationen saknar global lösning!

Kursmål: "Se att en ekvation är lösbar"

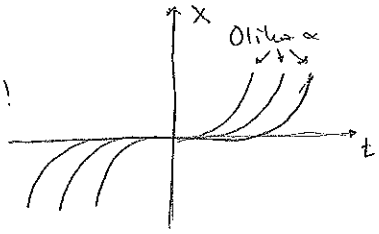
CENTRALA FRÅGESTÄLLNINGAR INOM PDE

i) (Lokal) existens av en lösning?
- Ej självklart med existens! Finns exempel på linjära PDE vilka saknar lösning. (Se 1.5.4. i Colton.)

ii) Entydighet?
- Inte heller självklart! Exempel från ODE:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = 3x^{2/3}(t) \\ x(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{oändligt många lösningar!}$$

Låt $\alpha \geq 0$. Då är $X_\alpha(t) = \begin{cases} (t+\alpha)^3, & t < -\alpha \\ 0, & -\alpha \leq t \leq \alpha \\ (t-\alpha)^3, & t > \alpha \end{cases}$



Vad i ekvationen ovan gör att den saknar entydighet? För en ODE måste lösningen till $\frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t))$ är entydig omm f uppfyller ett Lipschitzvillkor, dvs. det finns en konstant L så att

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y|.$$

iii) Beror lösningen kontinuerligt på (begynnelse/rand) data?
- Ger en liten ändring i randvillkoren endast en liten ändring av lösningen? Betrakta PDE:n

$$(1) \quad \begin{cases} u_{tt} + u_{xx} = 0 \\ u(0,x) = 0 \\ u_t(0,x) = \frac{\sin nx}{n} =: g_n \end{cases}, \text{ notera att } g_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \; \forall x$$

Notera även att lösningen till samma problem men med $g_n = 0$ är $u \equiv 0$.
Lösningen till (1) kan ges explicit och är

$$u(t,x) = \frac{1}{n^2} \sin nx \cdot \sinh nt$$

3/11-2014

INTRODUKTION TILL PDE

Välj nu t litet, t.ex. $t = 10^{-9}$. Då kommer $u(10^{-9}, x) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$!
I själva verkhet gäller för godtyckligt $t > 0$ kommer $u(t,x) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$.

DEF: Om vi har en PDE av ordning k, om villkoren i), ii) och iii) är uppfyllda samt $u \in C^k$ så är <u>u en klassisk lösning</u> till PDE:n och denna sägs vara <u>välställd</u> (Well posed).

Det finns situationer då man inte vill kräva att $u \in C^k$. Man har därför infört begreppet <u>svaga lösningar</u>. För att exemplifiera detta, betrakta ekvationen $u_{xx} = f$ på $x \in (a,b)$. (1).

Inför <u>testfunktionen</u> $\phi \in C^\infty$, $\phi(a) = \phi(b) = 0$, $\phi'(a) = \phi'(b) = 0$

Multiplicera (1) med ϕ och integrera partiellt:

$$\int_a^b u_{xx}\phi\,dx = \int_a^b f\phi\,dx \Rightarrow \int_a^b u\phi_{xx}\,dx = \int_a^b f\phi\,dx \qquad (2)$$

Om u uppfyller (2) för <u>alla</u> val av $\phi \in C^\infty$, $\phi^{(1)}(a) = \phi^{(1)}(b) = 0$ säger vi att u är just en svag lösning till (1)!

5/11-2014
Onsdag LV1

FÖRSTA ORDNINGENS LINJ. EKVATIONER

Vi vill lösa en ekvation av typen (på $\mathbb{R}^2$).

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = f(x,y)$$

Linjär ekvation $\Rightarrow$ derivatorna på formen $\frac{\partial}{\partial x}$, inte $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\sin\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ etc.

Betrakta först specialfallet $a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, a, b konstanter.

"Geometriska metoden":

Antag att $a \neq 0$. $\Rightarrow u_x + \frac{b}{a}u_y = 0$

Betrakta kurvan $(x, y(x))$, där $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$ (i detta fall en rät linje)

$\Rightarrow y = \frac{bx}{a} + c$, c är någon konstant

Vi har då $\frac{d}{dx}(u(x, y(x))) = u_x + \frac{dy}{dx}u_y = u_x + \frac{b}{a}u_y = 0$

Alltså är u konstant längs kurvorna $ay - bx = C$

$\Rightarrow$ Så länge $ay - bx$ är konstant ändras inte u, dvs.

$\boxed{u(x,y) = h(ay - bx)}$, h godtycklig funktion.

Kontroll:

$$au_x + bu_y = a[(-b)h'(ay-bx)] + b[ah'(ay-bx)] = 0\,!$$

"Koordinatmetoden" (Colton)

Betrakta $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{x} \Rightarrow ay - bx = C$.

Inför de nya variablerna

$$\begin{cases} \tilde{x} = ay - bx & \text{, uttrycket ovan} \\ \tilde{y} = cx + dy & \text{, väljs "godtyckligt"} \end{cases}$$

Jacobianen för detta koordinatbyte blir

$$\frac{\partial(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} -b & a \\ c & d \end{vmatrix} = -bd - ac = -(ac + bd)$$

$\boxed{\Rightarrow \text{Välj } c \text{ och } d \text{ så att } ac + bd \neq 0}$

Vi uttrycker nu u_x och u_y i $u_{\tilde{x}}$ och $u_{\tilde{y}}$:

$$\begin{cases} u_x = u_{\tilde{x}}\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} + u_{\tilde{y}}\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} = u_{\tilde{x}}(-b) + u_{\tilde{y}} \cdot c \\ u_y = u_{\tilde{x}}\frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} + u_{\tilde{y}}\frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} = u_{\tilde{x}} \cdot a + u_{\tilde{y}} \cdot d \end{cases}$$

Vi får då att

$$au_x + bu_y = a[\cancel{u_{\tilde{x}}(-b)} + u_{\tilde{y}} \cdot c] + b[\cancel{u_{\tilde{x}}} \cdot a + u_{\tilde{y}} \cdot d]$$

$$= \underbrace{(ac + bd)}_{\neq 0} u_{\tilde{y}} = 0 \Rightarrow u_{\tilde{y}} = 0\,!$$

$\boxed{\therefore u = h(\tilde{x}) = h(ay - bx)}$ Samma resultat som tidigare

Slutsats: Vi har reducerat vår PDE till en ODE!

5/11-2014 FÖRSTA ORDNINGENS LINJ. EKVATIONER

Återgå nu till den generella ekvationen

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y) \quad (1)$$

Vi vill generalisera koordinatmetoden. Inför nya koordinater

$$\begin{cases} \xi = \phi(x,y) \\ \eta = \psi(x,y) \end{cases}$$

Då detta ska vara ett koordinatbyte får inte Jacobianen vara identiskt noll, dvs.

$$J = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x} \not\equiv 0$$

Låt nu $u(x,y) = w(\xi,\psi)$. Vi har då

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial w}{\partial \xi}\dfrac{\partial\phi}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial \eta}\dfrac{\partial\psi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial w}{\partial \xi}\dfrac{\partial\phi}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial \eta}\dfrac{\partial\psi}{\partial y} \end{cases}$$

Ekvation (1) blir

$$a(x,y)\left[\frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \eta}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right] + b(x,y)\left[\frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \eta}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right] + c(x,y)w = f$$

$$\Leftrightarrow \left[a\frac{\partial\phi}{\partial x} + b\frac{\partial\phi}{\partial y}\right]\frac{\partial w}{\partial \xi} + \left[a\frac{\partial\psi}{\partial x} + b\frac{\partial\psi}{\partial y}\right]\frac{\partial w}{\partial \eta} + cw = f \quad (*)$$

Välj nu ψ så att $a\dfrac{\partial\psi}{\partial x} + b\dfrac{\partial\psi}{\partial y} = 0$. <u>Vi får då en ODE!</u> (2)

Betrakta nu kurvan $(x, y(x))$ som uppfyller $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b(x,y)}{a(x,y)}$ (3)
och välj ψ så att längs kurvan $(x, y(x))$ är ψ konstant, dvs
$\psi(x, y(x)) =$ konstant. Ekvation (3),

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\psi(x,y(x))\right) = \psi_x + \frac{dy}{dx}\psi_y = 0}$$

kallas den <u>karakteristiska ekvationen</u> till (1)!

För ett sådant ψ lyder ekvation (*)

$$\boxed{\left[a\frac{\partial\phi}{\partial x} + b\frac{\partial\phi}{\partial y}\right]}\frac{\partial w}{\partial \xi} + c(x,y)w = f(x,y)$$

Kommentar till $\boxed{}$:
Vi har frihet att välja ϕ så att detta uttryck blir enkelt! Om valet $\phi = x$ fungerar är det lämpligt.

Här är $\begin{cases} x = x(\xi,\eta) \\ y = y(\xi,\eta) \end{cases}$.

Vi kan anta att $a\phi_x + b\phi_y \neq 0$. Detta ger att

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} + A(\xi,\eta)w = F(\xi,\eta),$$

där $A(\xi,\eta) = \dfrac{c}{a\phi_x + b\phi_y}$, $F(\xi,\eta) = \dfrac{f}{a\phi_x + b\phi_y}$.

Denna ekvation löses m.h.a. integrerande faktor:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(e^{\int_0^\xi A(s,\eta)ds} \cdot w\right) = e^{\int_0^\xi A(s,\eta)ds} \cdot F(\xi,\eta)$$

5/11-2014 FÖRSTA ORDNINGENS LINJ. EKVATIONER

Integrera:

$$e^{\int_0^\xi A(s,\eta)ds} \times w(\xi,\eta) - w(0,\eta) = \int_0^\xi e^{\int_0^{\tilde\xi} A(s,\eta)ds} \times F(\tilde\xi,\eta)\,d\tilde\xi$$

$$\Rightarrow w(\xi,\eta) = e^{-\int_0^\xi A(s,\eta)ds} \times w(0,\eta) + e^{-\int_0^\xi A(s,\eta)ds} \int_0^\xi e^{\int_0^{\tilde\xi} A(s,\eta)ds} F(\tilde\xi,\eta)\,d\tilde\xi$$

Detta är formel 1.20 i Colton.

EXEMPEL Lös $xu_x - yu_y + u = x$ så att $u(x,y) = x$ då $y = x^2$

För att lösa problemet betraktar vi den karakteristiska ekvationen

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad \text{för } x \neq 0$$

Gör först omskrivningen $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \log y = -\log x + \tilde C \Rightarrow \boxed{xy = C}$

Vi låter nu $\begin{cases} \eta = xy \\ \xi = x \end{cases}$ (Välj enkelt). Detta ger Jacobianen

$$J = \begin{vmatrix} y & x \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -x, \text{ ej identiskt } 0!$$

Vi uttrycker nu u_x, u_y i u_ξ och u_η:

$$\begin{cases} u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi \times 1 + u_\eta \times y = u_\xi + y u_\eta \\ u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = 0 \times u_\xi + x \times u_\eta = x u_\eta \end{cases}$$

$$\Rightarrow x[u_\xi + \cancel{u_\eta y}] - y[\cancel{u_\eta x}] + u = x$$

$$\Rightarrow x u_\xi + u = x$$

Då $\xi = x$ så får vi $\boxed{\xi u_\xi + u = \xi}$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi}(\xi u) = \xi \quad \text{eller} \quad \xi u = \frac{\xi^2}{2} + h(\eta) \quad \Rightarrow \boxed{u = \frac{\xi}{2} + \frac{1}{\xi} h(\eta)}$$

Uttryckt i x, y har vi

$$u(x,y) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} h(xy).$$

Vi bestämmer nu h m.h.a villkoret $u(x, x^2) = x$, dvs.

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{x} h(x^3) = x \Rightarrow h(x^3) = \frac{x^2}{2} \Rightarrow h(t) = \frac{t^{2/3}}{2}$$

Detta ger lösningen till hela problemet som

$$\boxed{u(x,y) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}\frac{(xy)^{2/3}}{2}}$$

Kontrollera gärna genom att verifiera ekvation och villkor.

Denna metod går att generalisera till högre dimensioner.

EXEMPEL $f = f(t, x, v)$, $t \in \mathbb{R}$, $x, v \in \mathbb{R}^3$. f uppfyller en transportekvation

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \nabla_x f + \underbrace{F}_{\in \mathbb{R}^3} \nabla_v f = 0 \quad (**)$$

Om F är given har vi en första ordningens linjär ekvation!

5/11-2014

FÖRSTA ORDNINGENS LINJ. EKVATIONER

Betrakta det <u>karakteristiska systemet</u>

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{ds} = V & , X = X(s,t,x,v) \text{ och } X(t,t,x,v) = x \\ \dfrac{dV}{ds} = F & , V = V(s,t,x,v) \text{ och } V(t,t,x,v) = v \end{cases}$$

Skillnaden mot det vi gjorde tidigare är att den karakteristiska ekvationen nu är ett system av ODE!

Lösningen till (**) ges då av

$$f(t,x,v) = \underset{\uparrow \text{ Initialdata}}{\mathring{f}}(X(0,t,x,v), V(0,t,x,v))$$

ANDRA ORDNINGENS LINJ. EKVATIONER

Klassificering av 2:a ordningens <u>kvasilinjära</u> PDE. Betrakta

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + f\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \quad \circledast \quad , a_{ij} = a_{ij}(x_1, \dots, x_n)$$

<u>Kvasilinjär</u>: Högsta ordningens derivata är linjär, <u>men</u> lägre ordningar är <u>inte</u> nödvändigtvis linjära! Exempelvis:

$$u_{xx} + u_{xy} + (u_x)^2 + e^{u_y} = 0 \quad \text{är kvasilinjär!}$$

Vi antar wlog att $a_{ij} = a_{ji}$, dvs a_{ij} är symmetriska. Låt $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ vara en fix punkt. Betrakta den kvadratiska formen

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1^0, \dots, x_n^0) t_i t_j \quad (K).$$

DEF: Vi säger att $\circledast$ är <u>elliptisk</u> om (K) är icke-singulär och definit, dvs. (K) kan skrivas genom en linjär transformation som summan av n kvadratiska termer.

Vi säger att $\circledast$ är <u>hyperbolisk</u> om (K) är icke-singulär och indefinit, dvs. (K) kan skrivas som n kvadratiska termer och n-1 av dessa har samma tecken.

Vi säger att $\circledast$ är <u>parabolisk</u> om (K) är singulär och kan reduceras till en summa av färre än n kvadratiska termer.

Urtyper för de olika klasserna är

$$\begin{cases} (1)\ \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{är elliptisk (Laplace ekvationen)} \\ (2)\ \Box u = u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{är hyperbolisk (Vågekvationen)} \\ (3)\ u_t - \Delta u = 0 & \text{är parabolisk (Värmeledningsekvationen)} \end{cases}$$

[(4) $u_{tt} + u_{zz} - u_{xx} - u_{yy}$ är s.k. ultrahyperbolisk]

10/11-2014
Måndag LV2

EXEMPELRÄKNING

1.8 b Finn allmänna lösningen till $u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}=0$.

Lösning: Från 1.7b) har vi att $u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}=4u_{\xi\eta}$, där $\begin{cases}\xi = x+y\\ \eta = x-y\end{cases}$

Vår ekvation får alltså formen $4u_{\xi\eta}=0 \Leftrightarrow u_{\xi\eta}=0$.

$\Rightarrow u_\xi = h(\eta)$

$\Rightarrow u = h(\eta)\xi + g(\xi)$

Återgå till (x,y)-variabler:

$u(x,y) = (x+y)h(x-y)+g(x-y)$, där $h,g \in C^2$.

19 a Reducera ekvationen $\underbrace{y^2}_{A}u_{xx}+\underbrace{2xy}_{B}u_{xy}+\underbrace{x^2}_{C}u_{yy}=0$ till kanonisk form.

Lösning: Använd strategin från sid. 14-16 i Colton. Beräkna

$B^2-AC=(xy)^2-y^2x^2=0 \Rightarrow$ Vi har case 2 från sid 16, parabolisk typ!

De väsentliga ekvationerna är 1.31 och 1.32, dvs.

$$\begin{cases} A\dfrac{\partial\phi}{\partial x}+\left(B+\sqrt{B^2-AC}\right)\dfrac{\partial\phi}{\partial y}=0 & (1.31)\\ A\dfrac{\partial\phi}{\partial x}+\left(B-\underbrace{\sqrt{B^2-AC}}_{=0!}\right)\dfrac{\partial\phi}{\partial y}=0 & (1.32)\end{cases}$$

I detta fall då $B^2-AC=0$ är ekvationerna identiska och vi löser dem genom att införa nya koordinater ξ och η, där formen på ξ avgörs av lösningen men η väljs "fritt". (så att $J\neq 0$). (1.31) tar formen

$y^2\phi_x+xy\phi_y=0$.

Betrakta den karakteristiska ekvationen

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy}{y^2}=\dfrac{x}{y}$ $(y\neq 0)$

$\Rightarrow y^2=x^2+C \Leftrightarrow y^2-x^2=C$, Låt därför $\begin{cases}\xi = y^2-x^2\\ \eta = x^2 \leftarrow \text{Fritt, men föreslaget i Colton.}\end{cases}$

Detta ger:

$u_x = u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x = u_\xi(-2x)+u_\eta(2x)$

$u_{xx}=u_{\xi\xi}(-2x)^2+u_{\xi\eta}(2x)(-2x)+u_\xi(-2)+u_{\eta\xi}(-2x)(2x)+u_{\eta\eta}(2x)(2x)+u_\eta(2)=$

$=4x^2u_{\xi\xi}-8x^2u_{\xi\eta}+4x^2u_{\eta\eta}-2u_\xi+2u_\eta$

P.s.s. $u_{xy}=\dots=-4xyu_{\xi\xi}+4xyu_{\eta\eta}$

$u_{yy}=\dots=4y^2u_{\xi\xi}+2u_\xi$

Vi har då

$y^2u_{xx}+2xyu_{xy}+x^2u_{yy}=y^2\left[4x^2u_{\xi\xi}+\dots\right]+2xy\left[-4xyu_{\xi\xi}+\dots\right]+y^2\left[4y^2u_{\xi\xi}+\dots\right]$

$=4x^2y^2u_{\eta\eta}+2(x^2-y^2)u_\xi+2y^2u_\eta=0$

10/11-2014

EXEMPELRÄKNING

1.9a Uttryckt i koordinaterna ξ och η: $\begin{cases}\eta = x^2 \\ \xi+\eta = y^2\end{cases}$

$$\Rightarrow u_{\eta\eta} = \frac{2(-\xi)}{4\eta(\xi+\eta)}u_\xi + \frac{1}{2\eta}u_\eta = 0$$

Detta är den kanoniska formen!

1.10b Reducera ekvationen $yu_{xx}+u_{xx}=0$, $y<0$, till kanonisk form!

Lösning Karaktären på ekvationen styrs av tecknet på y! ($y=0$ ger Laplace, $y=-1$ ger vågekvationen t.ex.). Använd Coltons strategi:

$$A=y,\ B=0,\ C=1 \Rightarrow B^2-AC = 0-y = -y>0$$

Ekvationen är av hyperbolisk typ! Ekv. 1.31 och 1.32 tar formen

$$\begin{cases} y\phi_x + \left(0+(-y)^{1/2}\right)\phi_y = 0 & (1) \\ y\phi_x + \left(0-(-y)^{1/2}\right)\phi_y = 0 & (2)\end{cases}$$

Lös först ekvation (1); betrakta den karakteristiska ekvationen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(-y)^{1/2}}{y} = -\frac{1}{(-y)^{1/2}} \Rightarrow -\frac{2}{3}(-y)^{3/2} = -x+C \Leftrightarrow x-\frac{2}{3}(-y)^{3/2} = C$$

Motsvarande för ekvation (2) har lösningen $-x-\frac{2}{3}(-y)^{3/2}=C$.

Låt alltså

$$\begin{cases}\xi = x-\frac{2}{3}(-y)^{3/2} \\ \eta = -x-\frac{2}{3}(-y)^{3/2}\end{cases}$$

Uttryck nu u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} i $u_{\xi\xi}, u_{\xi\eta}$ och $u_{\eta\eta}$ etc...

$$\Rightarrow yu_{xx}+u_{yy} = \ldots = -4yu_{\xi\eta} - \frac{1}{2}(-y)^{1/2}u_\xi - \frac{1}{2}(-y)^{1/2}u_\eta = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{u_{\xi\eta}} + \frac{1}{8}(-y)^{1/2}u_\xi + \frac{1}{8}(-y)^{1/2}u_\eta$$

Andra kanoniska formen för en hyperbolisk ekvation, ty kom ihåg att

$$u_{\xi\eta} = \underbrace{u_{xx}-u_{yy}}_{\text{Första kanoniska formen!}} \quad \text{då} \quad \begin{cases}\xi = x+y \\ \eta = x-y\end{cases}$$

10/11-2014

FINITA ELEMENTMETODEN

FEM utvecklades på 50- och 60-talet, först inom hållfasthetsberäkningar.

<u>Modellproblem</u>: Betrakta randvärdesproblemet

$$(D)\begin{cases} -u_{xx}(x) = f(x), & 0<x<1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Vi ska visa att en lösning till (D) också är en lösning till ett variations-problem (V) och ett minimeringsproblem (M). Vi introducerar beteckningen

$$\boxed{(v,w) = \int_0^1 v(x)w(x)\,dx}$$

Låt $V = \{v : v \in C[0,1],\ v'(x)$ är styckvis kontinuerlig och begränsad på $[0,1]$ samt $v(0) = v(1) = 0\}$, V är ett funktionsrum.

Låt $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$ vara funktionalen

$$\boxed{F(v) = \frac{1}{2}\underbrace{(v',v')}_{=\int_0^1 v'^2\,dx} - \underbrace{(f,v)}_{=\int_0^1 fv\,dx}}$$

Vi formulerar nu problemen (M) och (V):

$$\boxed{\begin{array}{l} (M):\ \text{Finn } u \in V \text{ så att } F(u) \le F(v)\ \forall v \in V \\ (V):\ \text{Finn } u \in V \text{ så att } (u',v') = (f,v)\ \forall v \in V. \end{array}}$$

Påstående: $(D) \Longrightarrow (V) \Longleftrightarrow (M)$

Att u inte behöver vara 2 ggr deriverbar innebär att att vi ej har $(V) \Longrightarrow (D)$!

<u>BEVIS</u>: Antag att u löser (D) och visa att u löser (V).

Multiplicera ekvationen $-u'' = f$ med $v \in V$ och integrera över $[0,1]$, dvs.

$$-(u'',v) = (f,v)$$

Integrera partiellt:

$$-(u'',v) = -u'(1)\overset{=0}{v'(1)} + u'(0)\overset{=0}{v'(0)} + (u',v') = (u',v')$$

Alltså är $(u',v') = (f,v)\ \forall v \in V$ och u löser V

Visa nu att $(V) \Longrightarrow (M)$. Antag att u löser (V), låt $v \in V$ och låt $w = (v-u) \in V$.

Vi har $F(v) = F(u+w) = \frac{1}{2}(u'+w', u'+w') - (f, u+w) =$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}(u',u') - (f,u)}_{=F(u)} + \underbrace{2\times\frac{1}{2}(u',w') - (f,w)}_{=0,\ \text{ty } u \text{ löser (V) och } w \in V.} + \underbrace{\frac{1}{2}(w',w')}_{\ge 0} \ge F(u),\ u \text{ löser (M)!}$$

Visa nu att $(M) \Longrightarrow (V)$. Antag att u löser (M). Vi har då att $F(u) \le F(u+\varepsilon v)\ \forall v \in V$.

Fixera $v \in V$ så att $F(u) \le F(u+\varepsilon v)$. Sätt $g(\varepsilon) := F(u+\varepsilon v)$

$$\Longrightarrow g(\varepsilon) = \frac{1}{2}(u'+\varepsilon v', u'+\varepsilon v') - (u+\varepsilon v, f) = \frac{1}{2}(u',u') + (\varepsilon v', u') + \frac{1}{2}(\varepsilon v', \varepsilon v') - (u,f) - (\varepsilon v, f) =$$

$$= \frac{1}{2}(u',u') + \varepsilon(v',u') + \frac{\varepsilon^2}{2}(v',v') - (u,f) - \varepsilon(v,f)$$

Eftersom u löser (M) så har g ett minimum då $\varepsilon = 0$, $g'(0) = 0$

/11-2014

FINITA ELEMENTMETODEN

Vi har $g'(\varepsilon) = (v', u') + \varepsilon(v', v') - (v, f)$

$\Rightarrow g'(0) = (v', u') - (v, f)$

Men då $g'(0) = 0$ har vi att

$(v', u') - (v, f) = 0$, alltså löser u också (V)! ∎

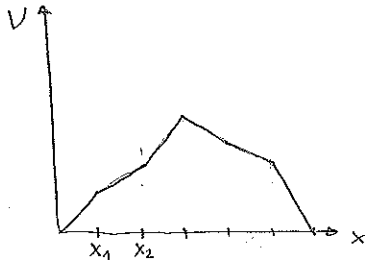
[Att lösa (M) kallas Ritz-metod!
Att lösa (V) kallas Galerkins metod.]

Inspirerat av relationen (D) $\Rightarrow$ (V) skall vi formulera FEM. Vi definierar ett ändligtdimensionellt delrum V_h till V. Låt $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_M < x_{M+1} = 1$ vara en uppdelning av intervallet $[0,1]$.

Låt $h := \max(x_j - x_{j-1})$, $I_j = (x_{j-1}, x_j)$ är alla delintervall.

Låt $V_h = \{v : v$ är linjär på I_j, $v \in C([0,1])$ och $v(0) = v(1) = 0\}$.

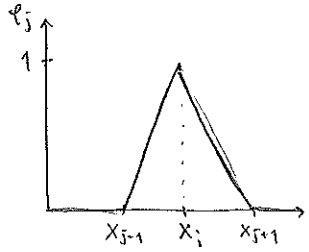
Ett typiskt $v \in V_h$ ser ut som



För att beskriva en funktion $v \in V_h$ använder vi <u>nodvärdena</u> $\eta_j := v(x_j)$ vid x_j, $j = 0, \dots, M+1$.

Vi introducerar basfunktionerna $\varphi_j \in V_h$, $i = 1, \dots, M$

$$\varphi_i = \begin{cases} 1, & \text{om } i = j \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \quad \text{(tältfunktioner)}$$



En funktion $v \in V_h$ kan skrivas som

$$v(x) = \sum_{i=1}^{M} \eta_i \varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{M} v(x_i)\varphi_i(x).$$

12/11-2014
Onsdag LV2

FINITA ELEMENT, FORTS

Förra gången införde vi funktionsrummen V_h med en bas φ_j av tältfunktioner. En funktion $v \in V_h$ kan då skrivas

$$v(x) = \sum_{i=1}^{M} \eta_i \varphi_i(x) \quad , \text{där } \eta_i = v(x_i).$$

V_h är ett linjärt rum med dimension M. En diskret variant av minimeringsproblemet (M) och variationsproblemet (V) lyder

$$\begin{cases} (M_h): \text{Finn } u_h \in V_h \text{ så att } F(u_h) \leq F(v) \ \forall v \in V_h \\ (V_h): \text{Finn } u_h \in V_h \text{ så att } (u_h', v') = (f, v) \ \forall v \in V_h \end{cases}$$

Notera att om $u_h \in V_h$ är en lösning till (V_h) så gäller speciellt att

$$(u_h', \varphi_j') = (f, \varphi_j) \quad , \text{ty } \varphi_j \in V_h \qquad (1)$$

Eftersom $u_h \in V_h$ så kan den skrivas

$$u_h = \sum_{i=1}^{M} \xi_i \varphi_j(x) \quad , \text{där } \xi_i = u_h(x_i) \text{ är ett tal vi vill beräkna.} \qquad (2)$$

Med (2) insatt i (1) ger detta att

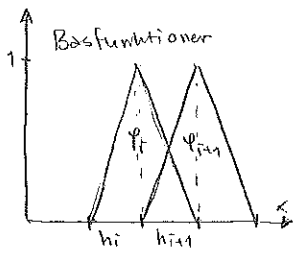
$$\sum_{i=1}^{M} \xi_i (\varphi_i', \varphi_j') = (f, \varphi_j) \quad , j = 1, 2, \dots, M,$$

så att vi får en ekvation för varje j. Detta ger ett linjärt ekvationssystem $A\xi = b$, där

$$\begin{cases} A = (a_{ij}) \text{ , en } M \times M\text{-matris med elementen } a_{ij} = (\varphi_i', \varphi_j') \\ \xi = (\xi_1, \dots, \xi_M)^T \\ b = (b_1, \dots, b_M)^T \text{ , där } b_i = (f, \varphi_j) \end{cases}$$

Matrisen A kallas för styvhetsmatrisen (stiffness matrix), b kallas för belastningsvektorn (load vector).

Låt oss beräkna a_{ij}. Vi har att $\varphi_j' = -\frac{1}{h_{j+1}}$. Detta ger



$$(\varphi_j', \varphi_j') = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{1}{h_j^2} dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{1}{h_{j+1}^2} dx = \frac{1}{h_j} + \frac{1}{h_{j+1}} \qquad \text{(Samma index)}$$

$$(\varphi_j', \varphi_{j-1}') = -\int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{1}{h_j^2} dx = -\frac{1}{h_j^2}, \quad j = 2, 3, \dots, M \qquad \text{(Olika index)}$$

I specialfallet då indelningen är likformig är $h_j = h$ blir styvhetsmatrisen tridiagonal, med 2:or på diagonalen och -1 på subdiagonalen.

$$A = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & & \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & \cdots & & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Allmänna egenskaper hos matrisen A är att

- Den är symmetrisk, ty $(\varphi_j', \varphi_i') = (\varphi_i', \varphi_j')$
- Den är positivt definit, dvs $v^T A v > 0 \ \forall v \neq 0$

12/11-2014

FINITA ELEMENT, FORTS

Det sistnämnda påståendet är enkelt att visa i 2 dim. Låt

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow v^T A v = (v_1, v_2) \begin{pmatrix} (\varphi_1', \varphi_1') & (\varphi_1', \varphi_2') \\ (\varphi_2', \varphi_1') & (\varphi_2', \varphi_2') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (v_1, v_2) \begin{pmatrix} v_1(\varphi_1', \varphi_1') & v_2(\varphi_1', \varphi_2') \\ v_1(\varphi_2', \varphi_1') & v_2(\varphi_2', \varphi_2') \end{pmatrix} =$$

$$= v_1^2(\varphi_1', \varphi_1') + 2 v_1 v_2 (\varphi_1', \varphi_2') + v_2^2 (\varphi_2', \varphi_2') =$$

$$= (v_1 \varphi_1' + v_2 \varphi_2', v_1 \varphi_1' + v_2 \varphi_2') \geq 0 \quad \text{och } = 0 \text{ omm } v \equiv 0.$$

Detta innebär att alla egenvärden är positiva och A är icke-singulär. Det finns alltså en <u>entydig lösning</u> ξ till $A\xi = b$. Vi har också sett att A är gles (dvs. innehåller många 0:or), vilket drastiskt minskar beräkningsmängden som krävs för att lösa ekvationssystemet.

För att lösa en PDE är det väsentligt att arbeta i "rätt" <u>funktionsrum</u>. För att exemplifiera behovet av att införa funktionsrum, betrakta problemet

$$\begin{cases} u'(x) = 0 \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Det naturliga här är att enda lösningen som ska finnas är $u \equiv 0$. <u>Men</u> det finns en funktion som kallas <u>Cantorfunktionen</u> som ej är konstant, vilken antar värden mellan 0 och 1 på $[0,1]$. Den har egenskapen att $u'(x) = 0$ a.e. (almost everywhere), dvs. derivatan är noll överallt utom på en nollmängd (har måttet 0). Alltså verkar både $u(x) \equiv 0$ och Cantorfunktionen vara lösningar till $(*)$! Otillfredsställande!

För att undkomma dilemmat ovan söker vi endast lösningar till $(*)$ vilka tillhör en viss klass av funktioner, dvs. $u \in$ funktionsrum. För exemplet kan vi då specificera att Cantorfunktionen $\notin$ det tillåtna funktionsrummet.

14/11-2014
Fredag LV2

FUNKTIONSRUM FÖR PDE

Om V är ett linjärt rum (dvs. om $v, w \in V \Rightarrow v+w \in V$ och $\alpha v \in V$) så är L en linjär funktional på V om $L: V \longrightarrow \mathbb{R}$ och L är linjär, dvs. $L(\alpha v + \beta w) = \alpha L(v) + \beta L(w)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Vi säger att a är en <u>bilinjär funktional</u> om $a: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ och a är linjär i varje argument, dvs.

$$\begin{cases} a(u, \alpha v + \beta w) = \alpha a(u,v) + \beta a(u,w) \\ a(\alpha v + \beta w, u) = \alpha a(v,u) + \beta (w,u) \end{cases}$$

Om $a(u,v) = a(v,u)$ är a <u>symmetrisk</u>. En symmetrisk linjär form är en <u>skalärprodukt</u> (inre produkt) på V om $a(v,v) \geq 0 \ \forall v \in V$. Om vi har en skalärprodukt kan vi definiera den <u>associativa normen</u>

$$\boxed{\|v\|_a := (a(v,v))^{1/2} = \langle v, v \rangle^{1/2}}$$

Från linjär algebra fås för skalärprodukten att

$$\boxed{|\langle u,v \rangle| \leq \langle u,u \rangle^{1/2} \langle v,v \rangle^{1/2}}$$, Cauchy-Schwarz olikhet.

<u>BEVIS</u>: Vi har att $\langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle \geq 0$. Utnyttja linjäriteten, så att

$\Rightarrow \langle u,u \rangle + \lambda \langle u,v \rangle + \lambda \langle v,u \rangle + \lambda^2 \langle v,v \rangle \geq 0$. Symmetrin ger att

$\Rightarrow \langle u,u \rangle + 2\lambda \langle u,v \rangle + \lambda^2 \langle v,v \rangle \geq 0$

Välj nu $\lambda = -\langle u,v \rangle / \langle v,v \rangle$ (fås från minimering).

$$\Rightarrow \langle u,u \rangle - 2\frac{\langle u,v \rangle^2}{\langle v,v \rangle} + \frac{\langle u,v \rangle^2}{\langle v,v \rangle} \geq 0 \iff \langle u,u \rangle - \frac{\langle u,v \rangle^2}{\langle v,v \rangle} \geq 0$$

$$\Rightarrow \langle u,v \rangle^2 \leq \langle u,u \rangle \langle v,v \rangle \Rightarrow |\langle u,v \rangle| \leq \langle u,u \rangle^{1/2} \langle v,v \rangle^{1/2} \quad \blacksquare$$

<u>DEF</u> Låt V vara ett linjärt rum med skalärprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ och norm $\|\cdot\|$. Om det normerade rummet $(V, \|\cdot\|)$ är <u>fullständigt</u> kallas $(V, \|\cdot\|)$ för ett <u>Hilbertrum</u>

<u>DEF</u> Att V är fullständigt innebär att varje <u>Cauchysekvens</u> är konvergent, dvs. om (x_n) är en Cauchysekvens så finns $x \in V$ så att $\|x_n - x\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

<u>DEF</u> En Cauchysekvens av element i ett normerat rum är en sekvens (x_n) sådan att $\forall \varepsilon > 0$ finns ett tal N sådant att $\|x_n - x_m\| < \varepsilon \ \forall m,n > N$.

<u>EXEMPEL</u> Funktionsrum som <u>inte</u> är fullständigt. Låt $V = C([-1,1])$ med skalärprodukten $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} fg \, dx$, $\|f\| = \left(\int_{-1}^{1} f^2 dx\right)^{1/2}$.

1 14/11-2014

FUNKTIONSRUM FÖR PDE

Betrakta sekvensen (g_n), där $g_n(x) = \tanh(nx)$, är en Cauchysekvens.

Bevis: $|g_m - g_n| = |\tanh(mx) - \tanh(nx)| =$

$$= \left|\frac{\sinh(mx)\cosh(nx) - \sinh(nx)\cosh(mx)}{\cosh(nx)\cdot\cosh(mx)}\right| = \left|\frac{\sinh(m-n)x}{\cosh(nx)\cosh(mx)}\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{\sinh(mx)}{\cosh(mx)\cosh(nx)}\right| \leq \left|\frac{1}{\cosh(nx)}\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\Rightarrow \|g_m - g_n\|^2 \leq \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(\cosh(nx))^2} = \frac{2}{n}\tanh n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Alltså är g_n en Cauchysekvens. V är dock ej fullständigt, ty det finns inget $g \in V$ så att $\|g_n - g\| \to 0$ då $n \to \infty$. Man kan visa att $g = \operatorname{sgn}(x)$ uppfyller $\|g_n - g\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, men $\operatorname{sgn}(x) \notin C([-1,1])$! $\therefore$ V är ej ett Hilbertrum.

DEF Ett normerat rum $(V, \|\cdot\|)$, där $\|\cdot\|$ inte är associerad till någon skalärprodukt, som är fullständigt kallas för ett Banachrum.

I exemplet ovan kan vi införa normen $\|f\| = \sup\{|f| : -1 \leq x \leq 1\}$. Då är $V \subseteq C([-1,1])$ med denna norm ett Banachrum. Observera att det inte finns en skalärprodukt som ger upphov till denna norm. En kandidat till skalärprodukt är $\langle f, g\rangle = \sup\{|fg| : -1 \leq x \leq 1\}$, men vi kan verifiera att detta de facto inte är en skalärprodukt.

Om vi använder Lebesgueintegration istället för Riemannintegration så är rummet

$$L_2(I) = \{v : \int_I v^2 dx < \infty\} \text{ med skalärprodukt } \langle u, v\rangle = \int_I uv\, dx$$

ett Hilbertrum.

Anm. Låt $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ på intervallet $x \in [0,1]$.

Denna funktion är ej Riemannintegrerbar men däremot är den Lebesgue-integrerbar och $\int_0^1 f(x) = 0$!

Ett annat exempel på Hilbertrum är $H^1(I) := \{v : v \text{ och } \frac{dv}{dx} \in L_2(I)\}$ med skalärprodukten $\langle f, g\rangle = \int_I fg + f'g'\, dx$ och normen $\|f\|_{H^1} = \int_I f^2 + (f')^2\, dx$. Detta är ett exempel på ett Sobolevrum. (Viktiga inom PDE!). Här betyder $\frac{dv}{dx}$ inte vanlig derivata utan svagderivata.

DEF: Vi säger att funktionen $f \in L^1_{loc} = \{\int_D |f|\, dx < \infty, D \text{ kompakt mängd}\}$ har en svag derivata $\frac{df}{dx}$ ($D_w f$) om det finns en funktion $g \in L^1_{loc}$ sådan att

$$\int_\Omega g(x)\phi(x)\, dx = -\int_\Omega f(x)\phi'(x)\, dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

I så fall är $\frac{df}{dx} := g(x)$.

14/11-2014

FUNKTIONSRUM FÖR PDE

EXEMPEL Cantorfunktionen f har en vanlig derivata $\frac{df}{dx}=0$ överallt förutom på en nollmängd, men Cantorfunktionen saknar svag derivata.

Vi kommer också att använda rummet

$$H_0^1(I)=\{v\in H^1(I): \underbrace{v(a)=v(b)=0}_{\circledast}\ ,\ I=[a,b]\}$$

I allmänhet kan villkoren $\circledast$ tolkas i något som kallas spårning (trace). Vi återkommer till detta.

Betrakta åter igen vårt modellproblem

$$\begin{cases}-u''=f\\ u(0)=u(1)=0\end{cases}$$

En variationsformulering lyder då

$$\boxed{\text{Finn } u\in H_0^1([0,1]) \text{ så att } (u',v')=(f,v)\ \forall v\in H_0^1([0,1]).}$$

Här är H_0^1 ett större rum än det vi tidigare använde. Dessa rum går att generalisera till högre dimension. I två och tre dimensioner har vi

$$\begin{cases}L_2(\Omega)=\{v:\int_\Omega v^2dx<\infty\}, \text{ med skalärprodukten } \langle u,v\rangle=\int_\Omega uv\,dx\\ H^1(\Omega)=\{v\in L_2(\Omega): \frac{\partial v}{\partial x_j}\in L_2(\Omega)\} \text{ med skalärprodukt } \langle u,v\rangle=\int_\Omega uv+u'v'\,dx\\ H_0^1(\Omega)=\{v\in H^1(\Omega): v=0 \text{ på } \partial\Omega\}.\end{cases}$$

I spårmening!

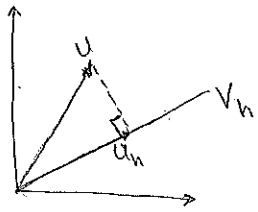
GEOMETRISK TOLKNING AV FEM

Låt $V_h\subset H_0^1$ vara rummet av styckvis linjära funktioner.

FEM: finn $u_h\in V_h$ så att $a(u_h,v)=(f,v)\ \forall v\in V_h$, (1)

där a är symmetrisk, bilinjär funktional som beror på den PDE vi löser. Den exakta lösningen $u\in H_0^1$ uppfyller

$a(u,v)=(f,v)\ \forall v\in H_0^1$ (2)



Subtrahera (1) från (2) i fallet då $v\in V_h$ (då är även $v\in H_0^1$).

$\Rightarrow a(u-u_h,v)=0\ \forall v\in V_h$ $\circledast$

$\therefore$ Skillnaden $(u-u_h)$ mellan den exakta och den approximativa lösningen är ortogonal mot V_h. En konsekvens av detta är att

$$\boxed{\|u-u_h\|_{H_0^1}\le\|u-v\|_{H_0^1}\ \forall v\in V_h}.$$

Detta följer ty

$$\|u-u_h\|_{H_0^1}^2=a(u-u_h,u-u_h)=a(u-u_h,u-v)+\underbrace{a(u-u_h,\overbrace{v-u_h}^{\text{Lagt till } a \text{ dragit ifrån } v\in V_h})}_{=0 \text{ enl. } \circledast}=a(u-u_h,u-v)\overset{\text{C.S. olikhet}}{\le}$$

$$\le\|u-u_h\|_{H_0^1}\|u-v\|_{H_0^1}$$

$$\Rightarrow\|u-u_h\|_{H_0^1}\le\|u-v\|_{H_0^1}\ \forall v\in V_h.$$

$\blacksquare$

17/11-2014
Måndag LV3

NATURLIGA OCH VÄSANTLIGA RANDVILLKOR

Först: Greens formel (eller Greens första identitet).
Gauss divergenssats ger för ett område $D \subset \mathbb{R}^2$ att

$$\iint_D \operatorname{div} \mathbb{F}(x)\,dx = \int_{\partial D} \mathbb{F}(x)\cdot n(x)\,ds$$

där $\mathbb{F}$ är ett C^1-vektorfält och $n(x)$ är den utåtriktade normalen till ∂D.
ds är må Låt nu $u, v \in C^2(\bar{D})$ och låt $\mathbb{F} = u(x)\nabla v(x)$. Divergenssatsen ger då

$$VL = \iint_D \operatorname{div}(\mathbb{F}(x))\,dx = \iint_D \operatorname{div}(u(x)\nabla v(x))\,dx = \iint_D \frac{\partial}{\partial x_1}\left(u\frac{\partial v}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(u\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)dx =$$

$$= \iint_D \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2} + u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2}\right)dx = \iint_D \nabla u\cdot\nabla v + u\Delta v\,dx$$

$$HL = \int_{\partial D} u\nabla v\cdot n(x)\,ds = \left[\frac{\partial v}{\partial n} := \nabla v\cdot n\right] = \int_{\partial D} u\frac{\partial v}{\partial n}\,ds$$

$$\Longrightarrow \iint_D \nabla u\cdot\nabla v + u\Delta v\,dx = \int_{\partial D} u\frac{\partial v}{\partial n}\,ds \quad \text{Greens formel!} \qquad \square$$

Betrakta problemet

$$(N)\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{i } \Omega \subset \mathbb{R}^2 & (1N) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g & \text{på } \partial\Omega \quad \left(\dfrac{\partial u}{\partial n} = \nabla u\cdot n\right) & (2N) \end{cases}$$

[När randvärdet har denna form kallas problemet ett Neumannproblem, när randvärdet är av formen $u = g$ på $\partial\Omega$ kallas det ett Dirichletproblem. Om det är av "mixad" form, dvs. $\frac{\partial u}{\partial n} + au = g$ på $\partial\Omega$ kallas det ett Robinproblem.]

Vi vill hitta en variationsformulering av problemet (N). Multiplicera ekvationen i (N) med en testfunktion v och integrera:

$$\underbrace{\iint_\Omega -\Delta u\cdot v}_{\text{Använd Greens formel}} + u\cdot v\,dx = \iint_\Omega f\cdot v\,dx$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\iint_\Omega \nabla u\nabla v\,dx - \int_{\partial\Omega} v\underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}}_{=g}\,ds}_{\text{Från Greens}} + \iint_\Omega u\cdot v\,dx = \iint_\Omega f\cdot v\,dx$$

Förslag på variationsformulering: ($u \in H^1(\Omega)$ = 'trial' funktionsrum)

(V): Finn $u \in H^1(\Omega)$ så att

$$\underbrace{\iint_\Omega \nabla u\nabla v + uv\,dx}_{\text{Typiskt kallas detta för } a(u,v)} = \underbrace{\iint_\Omega f\cdot v\,dx}_{(f,v)} + \underbrace{\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n}\,ds}_{\langle g,v\rangle} \quad \forall v \in H^1(\Omega) \qquad (*)$$

($v \in H^1(\Omega)$ = 'test' funktionsrum)

17/11-2014 NATURLIGA OCH VÄSÄNTLIGA RANDVILLKOR

När vi gjort ett förslag på variationsformulering är det vesäntligt att kontrollera att en lösning till detta som är tillräckligt reguljär löser ursprungsproblemet. Antag därför att $u \in C^2$ löser (V). ⊛ ger då att

$$\underbrace{\iint_\Omega -\Delta u \cdot v \, dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds}_{\text{Från Greens}} + \iint_\Omega u \cdot v \, dx = \iint_\Omega f v \, dx + \int_{\partial\Omega} v \cdot g \, ds \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

$$\Longleftrightarrow \iint_\Omega -\Delta u \cdot v + u \cdot v - f v \, dx = \int_{\partial\Omega} v \cdot g \, ds - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds \qquad (**)$$

Detta gäller för alla $v \in H^1(\Omega)$ och i synnerhet för alla $v \in H^1_0(\Omega)$, dvs. är 0 på $\partial\Omega$. För dessa $v \in H^1_0(\Omega)$ gäller att H.L i (**) är 0, dvs.

$$\iint_\Omega \underbrace{-\Delta u \cdot v + u \cdot v - f \cdot v}_{=(-\Delta u + u - f)v} \, dx = 0 \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

$\Longrightarrow -\Delta u + u - f = 0$ i Ω. Alltså är (1N) uppfyllt!

Alltså är även V.L. i (**) $= 0$ $\forall v \in \underline{H^1(\Omega)}$. Detta medför att

$$0 = \int_{\partial\Omega} v \cdot g - v \frac{\partial u}{\partial n} ds \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Välj nu $v \in H^1$ sådanna att $v \neq 0$ på $\partial\Omega$, t.ex. $v = 1$ på $\partial\Omega$.

$\Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial n} = g$ på $\partial\Omega$, vilket är (2N)!

I synnerhet => tentastoff!

Notera att Neumannvillkoret inte fanns med i funktionsrummet och kallas för ett naturligt randvillkor. Tidigare har vi sett att ett Dirichletvillkor måste finnas med i funktionsrummet och kallas då ett väsäntligt randvillkor.

En FEM-formulering av Neumannproblemet är alltså

(V_h): Finn $u_h \in V_h = \{v : v$ "styckvis linjära & kontinuerliga"$\}$ så att

$$a(u, v) = (f, v) + \langle g, v \rangle \quad \forall v \in V_h.$$

Denna formulering leder precis som tidigare till ett positivt definit ekvationssystem $A \cdot \xi = b$.

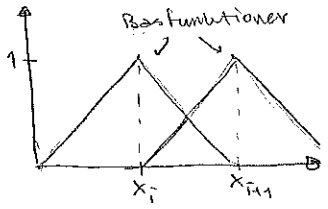
Anm: Neumannproblem behandlas väldigt naturligt med FEM, men ställer till problem om man använder finita differensmetoden (FDM)

17/11-2014

EXEMPELRÄKNING

CJ 1.3 (Skissartat). Konstruera en bas av kvadratiska polynom (istället för de tidigare linjära).

Linjära fallet:



Vi vill att $\sum \eta_j \varphi_j(x_i) = \eta_i$ och att representationen är entydig. I det kvadratiska fallet räcker det inte att veta att $\varphi_1(x_1)=1$ och $\varphi_1(x_2)=0$ eftersom flera andragradspolynom har denna egenskap. Vi väljer därför ytterliggare en nodpunkt mellan x_1 och x_2 betecknad $x_{3/2} = \frac{x_1+x_2}{2}$. Basfunktionerna är nu $\varphi_1(x), \varphi_{3/2}(x), \varphi_2(x), \ldots$ där

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1)=1 & \varphi_{3/2}(x_1)=0 & \varphi_2(x_2)=0 \\ \varphi_{3/2}(x_1)=0 & \varphi_{3/2}(x_{3/2})=1 & \varphi_2(x_2)=0 \\ \varphi_2(x_1)=0 & \varphi_2(x_{3/2})=0 & \varphi_2(x_2)=1 \end{cases}$$

Vi beräknar φ_1: $\varphi_1(x) = A(x_{3/2}-x)(x_2-x) = \Big[$Välj A så att $\varphi_1(x_1)=1$ och substituera $x_{3/2} = \frac{x_1+x_2}{2}\Big] = \ldots = \frac{(x_2-x)(x_1+x_2-2x)}{(x_2-x_1)(x_2-x_1)}$

På samma sätt för $\varphi_{3/2}, \varphi_2$. Vi ska också beräkna styvhetsmatrisen $A = A(a_{ij})$, där $a_{ij} = \varphi_i \varphi_j$. Vi måste derivera basfunktionerna och integrera $\int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi_i' \varphi_j' \, dx$ etc. detta ger en matris

$$A = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 14 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & -8 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 14 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 14 \end{bmatrix}$$

Metoden är densamma som i det linjära fallet, men allt blir betydligt mycket bökigare och vi återgår gladeligen till de linjära basfunktionerna.

CJ 1.14 (Vi har både ett trial- och ett testfunktionsrum). Betrakta

$$(1) \begin{cases} -\Delta u = f & \text{i } \Omega \\ u = u_0 & \text{på } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

med f och u_0 givna. Visa att problemet har ekvivalenta variationsformuleringar

(V): Finn $u \in V(u_0)$ så att $a(u,v) = (f,v)$ $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

(M): Finn $u \in V(u_0)$ så att $F(u) \leq F(v)$ $\forall v \in V(u_0)$

där $V(u_0) = \{v \in H^1(\Omega) : u = u_0 \text{ på } \Gamma\}$ och $F(v) = \frac{1}{2}(v',u') - (f,v)$, $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx$.

Lösning Antag att u löser (V) och $u \in C^2$. Att visa att u då löser (1) följer som vi gjort tidigare. Eftersom $u \in V(u_0)$ är randvillkoret redan uppfyllt. Vi visar att (V) och (M) är ekvivalenta.

CJ 1.14 (V) $\Rightarrow$ (M). Låt $v \in V(u_0)$ och låt $w = v - u$ där u löser (V), dvs. $u \in V(u_0)$. Detta innebär att $w = 0$ på Γ eftersom <u>både</u> u och v är lika med u_0 på Γ. Alltså $w \in H_0^1(\Omega)$. Vi har

$$F(v) = F(u+w) = \frac{1}{2}a(u+w, u+w) - (f, u+w) = \{a \text{ bilinjär form}\} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}a(u,u) - (f,u)}_{=F(u)} + \underbrace{a(u,w) - (f,w)}_{\substack{=0,\ \text{ty } u \text{ löser} \\ (V) \text{ och } w \in H_0^1(\Omega)}} + \underbrace{\frac{1}{2}a(w,w)}_{\geq 0} \geq F(u)$$

Alltså (V) $\Rightarrow$ (M).

Visa nu att (M) $\Rightarrow$ (V). Antag att u löser (M). Vi har att för ett godtyckligt $v \in H_0^1(\Omega)$ att

$$F(u) \leq F(u + \varepsilon v), \quad \text{ty } u + \varepsilon v \in V(u_0).$$

Låt $g(\varepsilon) := F(u + \varepsilon v)$, u och v fixa. Vi vet att $g'(0) = 0$ eftersom u löser (M), ty

$$g(\varepsilon) = \frac{1}{2}a(u,u) + \varepsilon a(u,v) + \frac{\varepsilon^2}{2}(v,v) - (f,u) - \varepsilon(f,v)$$

$$\Rightarrow g'(\varepsilon) = a(u,v) + \varepsilon a(v,v) - (f,v)$$

Detta ger då i synnerhet att

$$g'(0) = a(u,v) - (f,v) = 0, \text{ alltså löser } u \text{ (M)}.$$

För en FEM-formulering behöver vi två rum:

$$\begin{cases} V_h^1 = \{v : v \text{ styckvis linjär o kont.}, v = u_0 \text{ på } \Gamma & \sim V(u_0) \\ V_h^2 = \{v : \text{— " —} \quad \text{— " —} \quad , v = 0 \text{ på } \Gamma & \sim H_0^1 \end{cases}$$

Variationsformuleringen i FEM blir då

$$(V_h): \text{Finn } \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Trial}}}{u_h \in V_h^1} \text{ så att } a(u,v) = (f,v) \ \forall v \in \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Test}}}{V_h^2}$$

19/11-2014
Onsdag LV3

EXEMPELRÄKNING

CJ1.16 Visa att problemet

$$(\text{Diff})\quad \begin{cases} u' = f & \text{på } I=(0,1) \\ u(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

kan ges variationsformuleringen (1)

(V): Finn $u \in V$ så att $(u',v') = (f,v)\ \forall v \in V$, där $V = \{v \in H^1(I) : v(0) = 0\}$

LÖSNING: Antag att u löser (V) och att $u \in C^2$. Från (1) har vi

$$\int_0^1 u'v'\,dx = \int_0^1 fv\,dx \quad (*)$$

$$\text{VL}: \int_0^1 u'v'\,dx = [u'v]_0^1 - \int_0^1 u''v\,dx = u'(1)v(1) - u'(0)v(0) - \int_0^1 u''v\,dx \overset{v(0)=0}{=} u'(1)v(1) - \int_0^1 u''v\,dx$$

Alltså kan $(*)$ skrivas $u'(1)v(1) - \int_0^1 u''v\,dx = \int_0^1 fv\,dx \quad \forall v \in V \qquad (**)$

Välj nu $v \in V$ sådanna att $v(1) = 0$ uppfylls. För dessa v har vi

$$-\int_0^1 u''v\,dx = \int_0^1 fv\,dx \implies u'' = f \text{ på } I.$$

Då u och f nu är fixa funktioner får $(**)$ formen

$$u'(1)v(1) = 0 \quad \forall v \in V \qquad (2)$$

Tag nu i (2) v sådanna att $v(1) \neq 0$. Detta medför att $u'(1) = 0$.
Alltså är (diff) uppfyllt!

I vårat modellproblem

$$\begin{cases} -u'' = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Valde vi basfunktioner i vår FEM-formulering sådanna att $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. I detta fall har vi istället $u(0) = u'(1) = 0$, dvs. vi vet inte vad $u(1)$ är. Vi behöver ha med en basfunktion som är 1 då $x = 1$. Detta innebär att styvhetsmatrisen tar formen (likformig diskretisering med längd h).

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

1 istället för 2

Vad innebär detta för villkoret $u'(1) = 0$? Vi har $A\xi = b$, där $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$.
Sista raden i detta ekvationssystem blir då

$$\underbrace{\frac{1}{h}\left(-1 \times \xi_{N-1} + 1 \times \xi_N\right)}_{(*)} = \int f \varphi_N\,dx \approx f\frac{h}{2} \approx 0 \quad \text{då } h \text{ är litet,}$$

V.L, dvs $(*)$, är en approximation av derivatan, så att villkoret $u'(1) = 0$ är approximerat med denna metod!

19/11-2014

EXEMPELRÄKNING

Anm: För en rad i "mitten" av ekvationssystemet får vi

$$\frac{1}{h}\left(-\xi_{j-2}+2\xi_{j-1}-\xi_j\right)=\int f\varphi_j \simeq fh$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h^2}\left(-\xi_{j-2}+2\xi_{j-1}-\xi_j\right)=f$$

Tar vi fram finita differensformen för andraderivatan av en funktion F har vi att

$$F''(x)=\frac{1}{h^2}\left(-F(x+h)+2F(x)-F(x-h)\right),$$

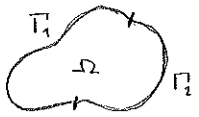
alltså approximerar denna metod $-u''=f$, vilket är ekvationen vi vill lösa! ∎

CJ1.18 Låt $\Omega\in\mathbb{R}^2$ vara ett begränsat område och låt $\Gamma=\partial\Omega$, Γ består av Γ_1 och Γ_2. Ge en variationsformulering av problemet

$$\begin{cases} \Delta u=f & \text{i } \Omega \\ u=u_0 & \text{på } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n}=g & \text{på } \Gamma_2 \end{cases}$$

Väsentligt! →

Naturligt! →



LÖSNING För att få fram en kandidat till variationsformulering multiplicerar vi ekvationen med en testfunktion $v\in V$ där vi stoppar in de väsentliga randvillkoren, i detta fall $u=u_0$ på Γ_1. Vi får då följande kandidat

(V): Finn $u\in\{v\in H^1: v=u_0 \text{ på } \Gamma\}:=V_1$ (trialfunktionsrum) så att

$$-\iint_\Omega \nabla u\nabla v\,dx=\iint_\Omega fv\,dx-\int_{\Gamma_2} vg\,ds \quad \forall v\in\{v\in H^1: v=0 \text{ på } \Gamma_1\}:=V_2 \text{ (testfunktionsrum)}.$$

Verifiera nu att en lösning till (V) som är tillräckligt reguljär även löser ursprungsproblemet. ("Kandidat till tentauppgift")

19/11-2014

LAX-MILGRAMS SATS

Många differentialekvationer som ser väldigt olika ut kan ändå ha mycket gemensamt. Vi inför därför en lite mer abstrakt teori som kan hantera en större klass av ekvationer med samma metod. Innan vi formulerar satsen behöver vi ett par hjälpresultat.

<u>Parallellogramlagen</u>: Om $\|\cdot\|$ är associerad till en skalärprodukt, dvs. $\|v\|^2 = \langle v, v\rangle$ så gäller att

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

<u>BEVIS</u>: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle - 2\langle x,y\rangle =$
$= 2\langle x,x\rangle + 2\langle y,y\rangle = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ V.S.V.

<u>Proposition</u>: Låt V vara ett Hilbertrum och låt a vara <u>bilinjär</u> och <u>symmetrisk</u>. Då är (V) $\Leftrightarrow$ (M), där

$$\begin{cases} (V): \text{Finn } u \in V \text{ så att } a(u,v) = L(v) \ \forall v \in V \\ (M): \text{Finn } u \in V \text{ så att } F(u) \leq F(v) \ \forall v \in V \\ F(w) = \frac{1}{2}a(w,w) - L(w) \end{cases}$$

, L är en linjär funktional, t.ex. $L(w) = \int fw\,dx$.

<u>BEVIS</u>: Samma metod som tidigare i samband med modellproblemet.

<u>SATS</u> - (Lax-Milgram). (Tentasats)

Antag att V är ett Hilbertrum med skalärprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ och norm $\|\cdot\|_V$. Antag att a är en bilinjär funktional och L är en linjär funktional sådanna att

i) $a(u,v) = a(v,u) \ \forall v,u \in V$ (a är symmetrisk)

ii) a är <u>V-elliptisk</u>, dvs. $\exists \alpha > 0$ så att $a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \ \forall v \in V$

iii) a är kontinuerlig, dvs. $\exists C > 0$ så att $|a(v,w)| \leq C\|v\|_V \|w\|_V \ \forall v,w \in V$

iv) L är kontinuerlig, dvs. $\exists \Lambda > 0$ så att $|L(v)| \leq \Lambda \|v\|_V \ \forall v \in V$

$$\boxed{\text{Då finns en entydig funktion } u \in V \text{ så att } \underbrace{a(u,v) = L(v) \ \forall v \in V}_{(*)}. \text{ Dessutom gäller att } \|u\|_V \leq \frac{\Lambda}{\alpha}.}$$

<u>BEVIS</u>: Vi konstruerar $u \in V$ så att $F(u) \leq F(v) \ \forall v \in V$. Enligt propositionen ovan är detta ekvivalent med att lösa variationsproblemet (*). Det gäller att

$F(w) := \frac{1}{2}a(w,w) - L(w)$ och <u>definiera normen</u> $\|v\|^2 := a(v,v)$.

Vi har två normer vilka är ekvivalenta, ty vi har

$$\alpha\|v\|_V^2 \overset{ii)}{\leq} a(v,v) = \|v\|^2 \overset{iii)}{\leq} C\|v\|_V^2.$$

Låt $\beta := \inf_{v \in V}(F(v))$ (Obs. att inf ej behöver antas!)

Vi visar att $\beta > -\infty$. Vi har att $\underline{F(v)} = \frac{1}{2}\|v\|^2 - L(v) \geq \left[\|v\|_V^2 \overset{(a)}{\leq} \frac{1}{\alpha}\|v\|^2 \text{ enl. ovan}, L(v) \overset{(b)}{\leq} \Lambda\|v\|_V\right]$

$$\overset{(a)}{\geq} \frac{1}{2}\|v\|^2 - \Lambda\|v\|_V \overset{(b)}{\geq} \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{\Lambda}{\sqrt{\alpha}}\|v\| \geq \left[\text{Betrakta } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{\Lambda}{\sqrt{\alpha}}x,\ f'(x) = x - \frac{\Lambda}{\sqrt{\alpha}} = 0 \Rightarrow f_{min} = -\frac{1}{2}\frac{\Lambda^2}{\sqrt{\alpha}}\right] \geq$$

$$\geq -\frac{1}{2}\frac{\Lambda^2}{\alpha}.$$

Alltså är $\beta > -\infty$. (Steg 1).

21/11-2014
Fredag LV3

LAX-MILGRAMS SATS

BEVIS, FORTS, Vi hade bevisat att $\beta := \inf_{v \in V} F(v) > -\infty$.

Låt nu (v_i) vara en sekvens av funktioner i V sådanna att $F(v_i) \longrightarrow \beta$.
Från parallellogramlagen får vi

$$\left\|\frac{v_i - v_j}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\|v_i\|^2 + \frac{1}{2}\|v_j\|^2 - \left\|\frac{v_i+v_j}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\|v_i\|^2 - L(v_i) + \frac{1}{2}\|v_j\|^2 - L(v_j) -$$

$$-\left(\left\|\frac{v_i+v_j}{2}\right\| - 2L\left(\frac{v_i+v_j}{2}\right)\right) = F(v_i) + F(v_j) - 2F\left(\frac{v_i+v_j}{2}\right) \leq F(v_i) + F(v_j) - 2\beta \xrightarrow{i,j\to\infty} 0$$

Alltså är (v_i) en Cauchysekvens, ty normerna är ekvivalenta i vårt Hilbertrum. Eftersom V är ett Hilbertrum finns alltså $u \in V$ så att $u_i \to u$, dvs. $\|v_i - u\|_V \longrightarrow 0$. Vi har då $\underline{F(u) = \beta}$, ty

$$|F(v_i) - F(u)| = \left|\frac{1}{2}\left(\|v_i\|^2 - \|u\|^2\right) - L(v_i - u)\right| = \left|\frac{1}{2}a(v_i - u, v_i + u) - L(v_i - u)\right| \leq$$

$$[a \text{ och } L \text{ kontinuerliga}] \leq \frac{1}{2}C\overbrace{\|v_i - u\|}^{\to 0}\|v_i + u\| + \Lambda\overbrace{\|v_i - u\|}^{\to 0} \xrightarrow{i\to\infty} 0$$

Vidare har vi att

$$|F(u) - \beta| = |F(u) - F(v_i) + F(v_i) - \beta| \leq \overbrace{|F(u) - F(v_i)|}^{\to 0} + \overbrace{|F(v_i) - \beta|}^{\to 0} \xrightarrow{i\to\infty} 0$$

Alltså är $F(u) = \beta$, och vi har löst minimeringsproblemet att hitta $u \in V$ så att $F(u) \leq F(v)\ \forall v \in V$. Minimeringsproblemet är enligt proposition ekvivalent med variationsproblemet, dvs. vårat u löser även att $a(u,v) = L(v)\ \forall v \in V$. Är lösningen entydig?

Vi antar att det finns $u_1, u_2 \in V$ sådanna att

$$a(u_1, v) = a(u_2, v) = L(v) \quad \forall v \in V.$$

Subtraktion ger

$$a(u_1 - u_2, v) = 0 \quad \forall v \in V \qquad (*)$$

a är per definition V-elliptisk, vilket innebär att $a(v,v) \geq \alpha\|v\|_V^2$.
Välj nu i $(*)$ $v = u_1 - u_2$

$\Longrightarrow$

21/11-2014

LAX-MILGRAM & POINCARÉ

Anm. FEM för denna mer allmänna formulering; $a(u,v)=L(v)\ \forall v\in V$.
I detta fall blir vår styvhetsmatris

$$A=(a_{ij}),\ \text{där}\ a_{ij}=a(\varphi_i,\varphi_j),$$

(tidigare var $a_{ij}=(\varphi_j',\varphi_i')=\int \varphi_j'\varphi_i'\,dx$)

$$b_i=L(\varphi_i)$$

Matrisen A är symmetrisk (ty vi har i L-M antagit att a är det) och dessutom är A positivt definit, ty om $v\in V_h$ kan vi skriva

$$v=\sum_{i=1}^{M}\eta_i\varphi_i$$

och vi har då $a(v,v)=\eta^T A\eta$. Då vi antagit att a även är V-elliptisk är

$$a(v,v)\geq \alpha\|v\|_V^2,$$

vilket i ⊛ ger att $\eta^T A\eta\geq 0$, med likhet omm $\eta=0$. Alltså har vårat ekvationssystem $A\xi=b$ en entydig lösning, precis som innan!

För att kunna använda Lax-Milgram måste vi ha verktyg för att verifiera villkoren 1-4 i satsen. I boken ges dessa för en dimension, på hemsidan finns de för högre dimensioner.

POINCARÉS OLIKHET FÖR H_0^1

(För en dimension, se olikhet 2.18 i CJ)

Låt Ω vara ett begränsat område i $\mathbb{R}^N$ och låt randen $\partial\Omega\in C^1$. Låt $u\in H_0^1(\Omega)$. Då gäller att

$$\boxed{\|u\|_{L^2(\Omega)}\leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}}\ \text{för någon konstant } C.$$

BEVIS: Låt $\phi(x)=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$. Vi har då att $\Delta\phi=\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)\phi=\frac{1}{2n}\overbrace{(2+2+\dots+2)}^{n\ \text{termer}}=1$

Tillämpa Greens formel på funktionerna u^2 och ϕ:

$$\iint_\Omega u^2\Delta\phi+\nabla u^2\nabla\phi\,dx=\int_{\partial\Omega}u^2\frac{\partial\phi}{\partial n}\,ds=0\quad(\text{ty } u\in H_0^1)$$

$$\Rightarrow \iint_\Omega u^2\,dx=-\iint_\Omega \nabla u^2\cdot\nabla\phi\,dx=-2\iint_\Omega u\nabla u\cdot\nabla\phi\,dx$$

Eftersom Ω är begränsat och ϕ är given explicit vet vi att det finns en konstant C så att $|\nabla\phi|\leq C$ i Ω. Alltså är

$$\iint_\Omega u^2\,dx\leq 2\iint_\Omega |u\nabla u\nabla\phi|\,dx\leq 2\iint_\Omega |u||\nabla u\cdot\nabla\phi|\,dx\overset{\text{Cauchy-Schwarz i }\mathbb{R}^N}{\leq} 2\iint_\Omega |u||\nabla u|\overbrace{|\nabla\phi|}^{\leq C}\,dx\leq$$

$$\leq 2C\iint_\Omega |u||\nabla u|\,dx\overset{\text{C.S.}}{\leq} 2C\left(\iint_\Omega |u|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\iint_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow\left(\iint_\Omega u^2\,dx\right)^{1/2}\leq \tilde{C}\left(\iint_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)^{1/2},$$

Vilket är $\|u\|_{L^2(\Omega)}\leq\tilde{C}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$, V.S.V.

21/11-2014

SPÅRFORMELN

Vi har ytterligare två verktyg att använda. Målet är att uppskatta en funktions värden på randen $\partial\Omega$ i termer av funktionens värde och derivata i Ω. Detta är spårformeln. Dessutom kan vi behöva en variant av Poincarés olikhet för H^1 istället för H^1_0.

POINCARÉS OLIKHET FÖR H^1

Låt Ω vara som innan. Låt $u \in H^1(\Omega)$ och låt $\bar{u} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\,dx$, där $|\Omega|$ är volymen av Ω (arean i 2-dim, längden i 1-dim). $\bar{u}$ är alltså medelvärdet av u över Ω. Då gäller att

$$\boxed{\|u-\bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}} \quad \text{för någon konstant } C$$

SPÅROLIKHETEN

Låt Ω vara som ovan. Då finns en konstant C så att

$$\boxed{\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|u\|^{1/2}_{L^2(\Omega)}\|u\|^{1/2}_{H^1(\Omega)}} \quad \text{för } u \in H^1$$

H^1-normen $\|\cdot\|_{H^1}$ ges av $\|u\|_{H^1} = \left(\iint_\Omega u^2 + |\nabla u|^2\,dx\right)$.

Motivera denna sats genom ett bevis i ett enkelt fall. Låt Ω vara disken i $\mathbb{R}^2$, dvs. $\Omega = \{x,y : x^2+y^2<1\} = \{r,\theta : 0<r\leq 1,\ 0\leq\theta<2\pi\}$. Låt $u \in C^1(\bar{\Omega})$, $(\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega)$.

Antag $u = u(r,\theta)$. Vi har

$$u(1,\theta)^2 = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 u(r,\theta)^2\right)dr = \int_0^1 2r^2 u\cdot u_r + 2ru^2\,dr =$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = (u_x,u_y)\cdot\frac{1}{r}(x,y)\right]$$

$$= \int_0^1 2\left(r^2 u\nabla u\cdot\frac{(x,y)}{r} + ru^2\right)dr \overset{0\leq r\leq 1}{\leq} \int_0^1 2\left(r|u||\nabla u| + ru^2\right)dr = 2\int_0^1 \left(|u||\nabla u| + u^2\right)r\,dr$$

Vi integrerar längs randen (spårformeln) och får då

$$\int_0^{2\pi} u^2(1,\theta)\,d\theta \leq 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 (|u||\nabla u| + u)\underbrace{r\,dr\,d\theta}_{=dx\,dy}$$

(Observera att $\|u\|^2_{L^2(\partial\Omega)} = \int_0^{2\pi} u(1,\theta)^2\,d\theta$).

$\rightarrow$ Cauchy-Schwarz ger att

$$\|u\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \leq 2\left(\left(\iint_\Omega u^2\,dx\,dy\right)^{1/2}\left(\iint_\Omega |\nabla u|^2\,dx\,dy\right)^{1/2} + \left(\iint_\Omega u^2\,dx\,dy\right)^{1/2}\left(\iint_\Omega u^2\,dx\,dy\right)^{1/2}\right) =$$

$$= 2\|u\|_{L^2(\Omega)}\Bigg(\underbrace{\left(\iint_\Omega |\nabla u|^2\,dx\,dy\right)^{1/2}}_{a} + \underbrace{\left(\iint_\Omega u^2\,dx\,dy\right)^{1/2}}_{b}\Bigg) \leq \quad \left[a+b \leq \left(2(a^2+b^2)\right)^{1/2}\right]$$

$$\rightarrow a+b \leq \left(2\left(\iint_\Omega |\nabla u|^2 + u^2\,dx\,dy\right)\right)^{1/2} = \sqrt{2}\,\|u\|_{H^1(\Omega)}$$

Alltså får vi

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \sqrt{2}\,\|u\|^{1/2}_{L^2(\Omega)} \cdot 2^{1/4}\|u\|^{1/2}_{H^1(\Omega)}.$$

Detta är spårolikheten!

1 24/11-2014
Måndag LV4

EXEMPELRÄKNING

CJ 2.3 Ge en variationsformulering av problemet

$$\begin{cases} u^{(4)} = f & 0<x<1 \\ u(0)=u''(0)=u'(1)=u'''(1)=0 \end{cases}$$

och verifiera att antagandena i L-M är uppfyllda. Vilka randvillkor är naturliga respektive väsentliga?

LÖSNING Multiplicera med v och integrera:

$$\int_0^1 u^{(4)} v\,dx = \int_0^1 f v\,dx$$

$$\Rightarrow V.L = \left[u'''v\right]_0^1 - \int_0^1 u'''v'\,dx = \left[\text{Integrera partiellt igen för att få a symmetrisk}\right] =$$

$$= u'''(1)v(1) - u'''(0)v(0) - \left[u''v'\right]_0^1 + \int_0^1 u''v''\,dx =$$

$$= \underbrace{u'''(1)}_{=0}v(1) - u'''(0)v(0) - u''(1)v'(1) + \underbrace{u''(0)}_{=0}v'(0) + \int_0^1 u''v''\,dx =$$

$$= -u'''(0)v(0) - u''(1)v'(1) + \int_0^1 u''v''\,dx$$

Vi föreslår variationsformuleringen

(V): Finn $u \in V = \{v \in H^2 : v(0)=0,\ v'(1)=0\}$ så att $a(u,v) = L(v)\ \forall v \in V$ där

$$a(u,v) = \int_0^1 u''v''\,dx, \quad L(v) = \int_0^1 f v\,dx.$$

Verifiera nu att detta är en variationsformulering, dvs. om (V) är uppfyllt och om u är tillräckligt reguljär ska u lösa ursprungsproblemet. Antag därför att $u \in C^4$ löser (V). Då är

$$\int_0^1 u''v''\,dx = \int_0^1 f v\,dx \quad \forall v \in V.$$

$$\Rightarrow V.L = \int_0^1 u''v''\,dx = \left[u''v'\right]_0^1 - \int_0^1 u'''v'\,dx = \left[u''v'\right]_0^1 - \left[u'''v\right]_0^1 + \int_0^1 u^{(4)} v\,dx =$$

$$= u''(1)\underbrace{v'(1)}_{=0} - u''(0)v'(0) - u'''(1)v(1) + u'''(0)\underbrace{v(0)}_{=0} + \int_0^1 u^{(4)} v\,dx \overset{?}{=} H.L = \int_0^1 f v\,dx.$$

$$\Rightarrow -u''(0)v'(0) - u'''(1)v(1) + \int_0^1 u^{(4)} v\,dx = \int_0^1 f v\,dx \quad \forall v \in V. \qquad (1)$$

Tag nu $v \in V$ så att $v'(0) = v(1) = 0$ uppfylls.

$$\Rightarrow \int_0^1 u^{(4)} v\,dx = \int_0^1 f v\,dx \text{ för alla sådanna } v. \Rightarrow u^{(4)} = f \text{ på } 0<x<1 \qquad (2)$$

(2) insatt i (1) $\Rightarrow -u''(0)v'(0) - u'''(1)v(1) = 0 \quad \forall v \in V. \qquad (3)$.

Tag nu i (3) $v \in V$ så att $v'(0)=1$ och $v(1)=0 \Rightarrow u''(0)=0$

Tag nu i (3) $v \in V$ så att $v'(0)=0$ och $v(1)=1 \Rightarrow u'''(1)=0$

Vi har verifierat ursprungsekvationen och kan konstatera att

$$\begin{cases} u(0)=u'(1)=0 & \text{utgör väsentliga randvillkor} \\ u''(0)=u'''(1)=0 & \text{utgör naturliga randvillkor.} \end{cases}$$

1 24/11-2014

EXEMPELRÄKNING

CJ 2.3 Vi vill nu verifiera villkoren (i)-(iv) i Lax-Milgram. Här är

$$a(u,v)=\int_0^1 u''v''\,dx$$

$$L(v)=\int_0^1 fv\,dx \quad , f \text{ kontinuerlig}$$

(i) a är symmetrisk, "uppenbart".

(iii) a är kontinuerlig; ja, ty $\left|\int_0^1 u''v''dx\right| \le \left(\int_0^1 (u'')^2dx\right)^{1/2}\left(\int_0^1 (v'')^2dx\right)^{1/2} \le \|u\|_{H^2}\|v\|_{H^2}$

(iv) L är kontinuerlig; ja, ty

$$\left|\int_0^1 fv\,dx\right| \le \max|f|\cdot\int_0^1|v|\,dx \le C\left(\int_0^1 1^2dx\right)^{1/2}\left(\int_0^1|v|^2dx\right)^{1/2} \le C\|v\|_{H^2}$$

Kvar att visa är att a är V-elliptisk, dvs. vi ska visa att

$$\underbrace{a(v,v)}_{=\int_0^1 (v'')^2dx} \ge \alpha\left(\int_0^1 v^2+(v')^2+(v'')^2dx\right)^{1/2} \qquad (*)$$

Om vi kan visa att $\int_0^1 (v'')^2dx \ge C\int_0^1 (v')^2dx$ är vi klara, ty vi har då

$$a(v,v)=\int_0^1 (v'')^2dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (v'')^2dx+\frac{1}{2}\int_0^1 (v'')^2dx \ge \frac{1}{2}\int_0^1 (v'')^2dx + C\int_0^1 (v')^2dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (v'')^2dx + \frac{C}{2}\int_0^1 (v')^2dx + \frac{C}{2}\int_0^1 (v')^2dx \ge \left[(2.18) \text{ i boken ty } v(0)=0\right] \ge$$

$$\ge \frac{1}{2}\int_0^1 (v'')^2dx + \frac{C}{2}\int_0^1 (v')^2dx + \frac{C}{2}\int_0^1 v^2dx \ge \underset{\substack{\uparrow \\ =\min\left(\frac{1}{2},\frac{C}{2}\right)}}{\alpha}\cdot\|v\|_{H^2}$$

Kvar är att visa $(*)$, dvs. att $\int_0^1 (v'')^2dx \ge C\int_0^1 (v')^2dx$. Använd strategin som används i boken för att ta fram 1.18: Vi har att för $0<x<1$ gäller

$$v'(x)=v'(1)-\int_x^1 v''(\tilde{x})\,d\tilde{x} = [v'(1)=0] = -\int_x^1 v''(\tilde{x})\,d\tilde{x}$$

$$\Rightarrow v'(x) \le \left|\int_x^1 v''(\tilde{x})\,d\tilde{x}\right| \le [\text{C.S.}] \le \underbrace{\left(\int_0^1 1\,dx\right)}_{=1}^{1/2}\left(\int_0^1 (v''(\tilde{x}))^2d\tilde{x}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 |v'(x)|^2dx \le \underbrace{\int_0^1\left(\int_0^1 (v''(\tilde{x}))^2d\tilde{x}\right)dx}_{\text{Oberoende av } x!} = \int_0^1 (v''(\tilde{x}))^2d\tilde{x}$$

, Alltså har vi visat $(*)$!

CJ 2.5 Ge en variationsformulering av problemet

$$\begin{cases} -\Delta u+u=f & \text{i } \Omega \qquad (1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g & \text{på } \Gamma=\partial\Omega \end{cases}$$

Kom ihåg: Greens formel $\iint_\Omega \Delta u\,v\,dx = \iint_\Omega \nabla u\nabla v\,dx - \int_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial n}ds$

LÖSNING Multiplicera (1) med v, integrera och tillämpa Greens:

$$\iint_\Omega \nabla u\nabla v - \int_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial n}ds + \iint_\Omega uv\,dx = \iint_\Omega fv\,dx$$

$$\Rightarrow \underbrace{\iint_\Omega \nabla u\nabla v\,dx + \iint_\Omega uv\,dx}_{a(u,v)} = \underbrace{\iint_\Omega fv\,dx + \int_\Gamma gv\,ds}_{L(v)}$$

24/11-2014

EXEMPELRÄKNING

CJ 2.5 (V): Finn $u \in H^2$ så att $a(u,v) = L(v)\ \forall v \in H^2$.

Verifiera att om u löser (V) och $u \in C^2$ löser u ursprungsproblemet.

Vi ska nu verifiera villkoren i L-M.

(i) a är symmetrisk

(ii) $a(v,v) = \iint_\Omega |\nabla v|^2 + v^2\,dx = \|v\|_{H^2}$, alltså ok med $\alpha = 1$.

(iii): $|a(u,v)| = \left|\iint_\Omega \nabla u \nabla v + uv\,dx\right| \leq \left(\iint_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2}\left(\iint_\Omega |\nabla v|^2 dx\right)^{1/2} + \left(\iint_\Omega u^2 dx\right)^{1/2}\left(\iint_\Omega v^2 dx\right)^{1/2} \leq$

$$\leq 2\left(\iint_\Omega u^2 + |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2}\left(\iint_\Omega v^2 + |\nabla v|^2 dx\right)^{1/2} = 2\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$$

(iv): L är kontinuerlig? Ja, ty $|L(v)| \leq \overbrace{\max|g|}^{=C} \int_\Gamma 1 \cdot |v|\,ds \leq C\left(\int_\Gamma 1\,ds\right)^{1/2}\left(\int_\Gamma |v|^2 ds\right)^{1/2} =$

$= C\|v\|_{L^2(\Gamma)} \leq$ [spårsatsen] $\leq C\|v\|^{1/2}_{L^2(\Omega)}\|v\|^{1/2}_{L^2(\Omega)} \leq C\|v\|_{H^2(\Omega)}$.

CJ 2.6 Ekvationen är $\begin{cases} -\Delta u = f \\ \gamma u + \frac{\partial u}{\partial n} = g \end{cases}$. Detta leder (m.h.a. Greens) till variationsformuleringen

(V): Finn $u \in H^1$ så att $a(u,v) = L(v)\ \forall v \in H^1$, där

$$a(u,v) = \iint_\Omega \nabla u \nabla v\,dx + \gamma \int_\Gamma v \cdot u\,ds \quad \text{och} \quad L(v) = \iint_\Omega f v\,dx + \int_\Gamma g v\,ds.$$

Verifiera de fyra villkoren i L-M:

(i) Symmetrisk? Ja!

(iii) a kontinuerlig? Ja, följer ganska direkt om vi använder spårsatsen.

(iv) L kontinuerlig? Ja, använd spårsatsen på randtermen $\int_\Gamma g v\,ds$.

Svår! → (ii) Vi vill visa att $a(v,v) \geq \alpha\|v\|_{H^1}$, dvs. att $\iint_\Omega |\nabla v|^2 dx + \gamma\int_\Gamma v^2 ds \geq \alpha\left(\iint_\Omega v^2 + |\nabla v|^2 dx\right)$.

Vi vill åtminstone ha $\gamma > 0$. Med elementära uppskattningar har vi att

$$a(v,v) \geq [\text{Antag wlog } \gamma < 1] \geq \frac{\gamma}{2}\left(\left(\iint_\Omega |\nabla v|^2 dx\right)^{1/2} + C\left|\int_\Gamma v\,ds\right|\right)^2 \geq [\text{Proposition vi snart skriver}] \geq$$

$$\geq C\gamma\|v\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Prop: Låt $v \in H^2(\Omega)$, då gäller $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\left|\int_{\partial\Omega} v\,ds\right| + \left(\iint_\Omega |\nabla v|^2 dx\right)^{1/2}\right)$

Bevis: $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v - \bar{v}\|_{L^2(\Omega)} + \|\bar{v}\|_{L^2(\Omega)} \leq$ [Poincares för H^2] $\leq C\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|\bar{v}\|_{L^2(\Omega)} \leq$

$\leq$ [Uppskattningar + Poincares] $\leq C\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$

V-ellipticitet följer av denna proposition.

2.9 Bra uppgift, "tentavarning". 2.10 har varit tentauppgift!

26/11-2014
Onsdag LV4

LAPLACEEKVATIONEN

$$\boxed{\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right) u = 0} \quad (*)$$

I boken är ofta $n=2$, för att få en enklare form. Vi kommer oftast följa detta, men ska poängtera de fall då dimensionen är av (avgörande) betydelse.

Lösningar till $(*)$ kallas harmoniska funktioner. Notera att det finns andra typer av Laplaceekvationer, t.ex. $\Delta u + \frac{\partial u}{\partial x_1} + \sin x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$. I dessa fall är det ändå Laplaceoperatorn som avgör karaktären hos ekvationen. Vi kommer också att titta på Poissons ekvation,

$$\boxed{\Delta u = g} \quad \text{Poisson!}$$

Till Laplaceekvationen har vi randvärden

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{i } \Omega \quad (1) \\ u = g & \text{på } \partial\Omega \quad (2) \end{cases}$$

(2) är i detta fall ett Dirichletvillkor, men kan även vara ett Neumann- eller Robinvillkor. Om Ω i (1) har "snäll" geometri kan (1) och (2) lösas med separationsmetoden eller Poissons integralformel. Då vi strävar efter allmäna resultat som är oberoende av geometrin hos Ω.

Kom ihåg Greens formel (Greens första identitet):
Om $u, v \in C^2(\bar{D})$ och $D \subset \mathbb{R}^2$ är

$$\iint_D \Delta u v + \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial n} \, ds \quad (1)$$

Vi har då även att

$$\iint_D \nabla v u + \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial n} \, ds \quad (2)$$

Om vi nu subtraherar (1) från (2) får vi

$$\Rightarrow \boxed{\iint_D u \Delta v - v \Delta u \, dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \, ds}$$

Detta är Greens andra identitet!

SATS Låt $u \in C^2(\bar{D})$. För $x \in D \subset \mathbb{R}^2$ gäller då att.

Hela denna integral försvinner om u löser Laplaceekvationen. u bestäms då endast av randintegralen!

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \log \frac{1}{|x-y|} - u \frac{\partial}{\partial n} \log \frac{1}{|x-y|} \right) ds - \frac{1}{2\pi} \iint_D \log \frac{1}{(x-y)} \Delta u \, dy$$

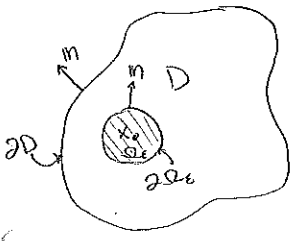
26/11-2014

LAPLACEEKVATIONEN

I högre dimension än $n=2$ gäller fortfarande denna identitet om vi substituerar $-\log\frac{1}{|x-y|} = \log|x-y|$ med

$$\Gamma(x-y) = \frac{1}{(2-n)}\frac{1}{\omega_n}|x|^{2-n}, \quad n>3 \quad ,$$ där ω_n är arean av motsvarande n-sfär.

BEVIS Funktionen $v(y) = \log\frac{1}{|x-y|}$ (x fixt, $x\in\mathbb{R}^2$) är harmonisk i området $D\setminus\Omega_\varepsilon$, där Ω_ε är en disk med radie ε kring punkten x_0. (Följer genom beräkning av $\Delta v(y)$ med $x=$ konstant). Det följer alltså att $\Delta v = 0$ i $D\setminus\Omega_\varepsilon$.



n utåtriktad normal.

Greens andra identitet ger då

$$0 - \iint_{D\setminus\Omega_\varepsilon}\log\frac{1}{|x-y|}\Delta u\,dy = \int_{\partial D}\left(u\frac{\partial}{\partial n}\left(\log\frac{1}{|x-y|}\right) - \log\frac{1}{|x-y|}\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds +$$

$$+\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\Big(\underbrace{u\frac{\partial}{\partial n}\left(\log\frac{1}{|x-y|}\right)}_{(A)} - \underbrace{\log\frac{1}{|x-y|}\frac{\partial u}{\partial n}}_{(B)}\Big)ds$$

Betrakta (A). Vi har $\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{|x-y|} = n\cdot\nabla_y\log\frac{1}{|x-y|} = -n\cdot\nabla_y\log|x-y| =$

$$= \left[|x-y| = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}\right] = -n\cdot\underbrace{\left(\frac{(y_1-x_1)}{|x-y|}, \frac{(y_2-x_2)}{|x-y|}\right)}_{=-n!}\frac{1}{|x-y|} =$$

$$\boxed{(A) = \frac{1}{\varepsilon} \text{ på } \partial\Omega_\varepsilon!} \qquad = \frac{1}{|x-y|}\Big|_{\partial\Omega_\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}$$

Vi har då gränsvärdet $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial\Omega_\varepsilon} u\frac{\partial}{\partial n}\left(\log\frac{1}{|x-y|}\right)ds = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{\partial\Omega_\varepsilon} u\,ds =$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{2\pi} u(x_1+\varepsilon\cos\theta, x_2+\varepsilon\sin\theta)\,d\theta = 2\pi u(x)$$

Betrakta nu (B). Då $u\in C^2(\bar{D})$ finns en konstant K så att

$$\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| \le K \text{ i } \bar{D} \implies \left|\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\log\underbrace{\frac{1}{|x-y|}}_{=\varepsilon \text{ på } \Omega_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}ds\right| \le K\left|\log\frac{1}{2}\right|\cdot\int_{\partial\Omega_\varepsilon} = 2\pi\left|\log\frac{1}{2}\right|\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

$\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| = |n\cdot\nabla u| \le |\nabla u| \le K$ då $u\in C^2$.

Vi får således att då $\varepsilon\to 0$ gäller

$$-\iint_D\log\frac{1}{|x-y|}\Delta u\,dx = \int_{\partial D} u\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{|x-y|} - \log\frac{1}{|x-y|}\frac{\partial u}{\partial n}ds + 2\pi u(x).$$

∎

SATS – Medelvärdesegenskapen.

Låt $\Omega = \{x : |x-x_0| < \rho\}$ och låt $u\in C^2(\Omega)\cap C(\partial\Omega)$ vara harmonisk i Ω. Då är

$$\boxed{u(x_0) = \frac{1}{2\pi\rho}\int_{\partial\Omega} u\,ds.} \quad (*)$$

Anmärkning: Obs att vi kan skriva (*) på formen $u(x_0) = \frac{1}{\pi\rho^2}\iint_{B_\rho} u\,dx$, ty för $\tilde{\rho}\in[0,\rho]$ ("Bollen" med radie ρ kring x_0.)

$$u(x_0)\tilde{\rho} = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega_{\tilde{\rho}}} u\,ds \implies \int_0^\rho \underbrace{u(x_0)}_{\text{Fixt tal!}}\tilde{\rho}\,d\tilde{\rho} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\rho\int_0^{2\pi} u\tilde{\rho}\,d\tilde{\rho}\,d\theta \implies \frac{\rho^2}{2}u(x_0) = \frac{1}{2\pi}\iint_{B_\rho} u\,dx$$

26/11-2014

LAPLACEEKVATIONEN

BEVIS: Låt $\Omega_\varepsilon = \{x : |x-x_0| < \rho-\varepsilon\}$, då är $u \in C^2(\overline{\Omega}_\varepsilon)$. Enligt tidigare sats har vi att

$$u(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\left(\log\frac{1}{|x_0-y|}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{1}{|x_0-y|}\right)ds.$$

På $\partial\Omega_\varepsilon$ gäller att $|x_0-y| = \rho-\varepsilon$ och som i beviset av satsen är

$$\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{|x_0-y|} = -\frac{1}{\rho-\varepsilon}$$

$$\Rightarrow u(x_0) = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{\rho-\varepsilon}\underbrace{\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}ds}_{(T)} + \frac{1}{2\pi(\rho-\varepsilon)}\int_{\partial\Omega_\varepsilon}u\,ds$$

Betrakta (T). Från Greens första identitet har vi med funktionsparet u och $v \equiv 1$

$$\iint_{\Omega_\varepsilon}\underbrace{\Delta u}_{=0}\cdot 1 + 0\,dx = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} 1\cdot\frac{\partial u}{\partial n}ds = 0 \quad\Rightarrow\quad u(x_0) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{(\rho-\varepsilon)}\int_{\partial\Omega_\varepsilon}u\,ds$$

Låter vi nu $\varepsilon \to 0$ fås

$$u(x_0) = \frac{1}{2\pi\rho}\int_{\partial\Omega}u\,ds. \qquad \blacksquare$$

SATS - Maximumprincipen (Starka).

Låt $u \in C^2(D) \cap C(\partial\overline{D})$ vara harmonisk i D och att $u \not\equiv$ konstant.

$$\boxed{\text{Då antar } u \text{ sitt max- och minvärde endast på } \partial D.}$$

Anmärkning: Maximumprincipen gäller, under vissa villkor, för en stor klass av elliptiska differentialekvationer

BEVIS: u är kontinuerlig på den kompakta mängden $\overline{D}$, alltså har u ett max och min i $\overline{D}$. Antag att u antar max i punkten $x = x_0$ som ej ligger på ∂D (i såfall är vi klara) och låt $u(x_0) = M$. (Analogt för min kan vi studera $-u$).

Medelvärdesegenskapen ger då

$$M = u(x_0) = \frac{1}{2\pi\rho}\int_{\partial\Omega_\rho}u\,ds \le \left[u \le M \text{ i } \overline{D}\right] \le \frac{1}{2\pi\rho}M\cdot 2\pi\rho = M$$

Vi måste ha likhet! Detta får vi endast om $u \equiv M$ på hela randen Ω_ρ. Då ρ är godtycklig är $u \equiv M$ i varje disk Ω_ρ centrerad kring x_0. För att visa att detta gäller i hela D förbinder vi x_0 och y med linjesegment l och låter d vara minavståndet till randen ∂D. Enligt ovan är $u \equiv M$ i varje disk med radie $\frac{d}{2}$, speciellt är $u(x_1) = M$, där $x_1 = l \cap \Omega_{d/2}(x_0)$. Starta om i x_1 och upprepa tills vi når y. $\Rightarrow u(y) = M$. Då y var godtycklig är $u = M$ i hela D, vilket motsäger antagandet att $u(x_0)$ var ett maximum! Alltså måste maximum antas på ∂D!

$\blacksquare$

28/11-2014
Fredag LV4

ENTYDIGHETSSATSER

$$\text{(Inre)}\ (D)\begin{cases}\Delta u = 0 & \text{i } D\\ u = g & \text{på } \partial D\end{cases}$$

$$\text{(Inre)}\ (N)\begin{cases}\Delta u = 0 & \text{i } D\\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{på } \partial D\end{cases}$$

SATS $\boxed{\text{Lösningen till problemet (D), om den existerar, är entydig.}}$

BEVIS Antag att det finns två lösningar u_1 och u_2

$$\Rightarrow \begin{cases}\Delta(u_1-u_2)=0\\ u_1-u_2\big|_{\partial D} = g-g=0 \quad \text{på } \partial D.\end{cases}$$ Med $v=u_1-u_2$ fås $\begin{cases}\Delta v = 0 & \text{i } D\\ v=0 & \text{på } \partial D\end{cases}$

Maximumprincipen säger att v har maximum och minimum på ∂D, men $v=0$ på ∂D, alltså är $v\equiv 0$

$\Rightarrow u_1 = u_2$ ∎

SATS $\boxed{\text{Lösningen till (N) är entydig upp till en konstant.}}$

BEVIS Antag att det finns två lösningar u_1 och u_2 vilka tillhör $C^2(D)\cap C^1(\bar{D})$. Låt $v=u_1-u_2 \Rightarrow \Delta v = 0$, $\frac{\partial v}{\partial n}=0$. Låt $D_\varepsilon \subset D$ så att $\lim_{\varepsilon\to 0} D_\varepsilon = D$. Detta innebär att $v\in C^2(\bar{D})$. Greens formel, med $u=v$, ger

$$0=\int_{\partial D_\varepsilon} v\underbrace{\frac{\partial v}{\partial n}}_{=0}\,ds = \iint_{D_\varepsilon} v\underbrace{\Delta v}_{=0} + \nabla v\nabla v\,dx = \iint_{D_\varepsilon}|\nabla v|^2 dx \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \iint_D |\nabla v|^2 dx = 0$$

$\Rightarrow v = 0 + \text{konstant} = \text{konstant}$. ∎

GREENS FUNKTION

Vi ska diskutera Dirichletproblemet i $\mathbb{R}^n$. Betrakta

$$(D)\begin{cases}\Delta u = f & \text{i } \Omega\\ u = g & \text{på } \partial\Omega\end{cases}$$, f och g är kontinuerliga funktioner.

En harmonisk funktion (uppfyller $\Delta f = 0$) kan skrivas som summan av två randintegraler. Vi ska visa att dessa termer kan fås att gå bort! Antag att $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$ är en lösning till (D). För fixt $x\in\Omega$, betrakta $\phi(x,f(y))\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$ sådan att $\Delta_y\phi(x,y)=0$ i Ω. Greens formel ger

$$\int_\Omega \phi(x,y)\Delta u - 0\,dy - \int_{\partial\Omega}\phi(x,y)\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial n}\,ds_y = 0 \qquad (*)$$

I $\mathbb{R}^n$ har vi

$$\Gamma(x-y) = \frac{1}{(2-n)\omega_n}|y-x|^{2-n}, \quad \Gamma(x-y) = \frac{1}{2\pi}\log|x-y| \text{ då } n=2.$$

Arean av enhetssfären i $\mathbb{R}^n$.

28/11-2014

GREENS FUNKTION

Sätt nu $\gamma(x,y) = \Gamma(x-y) - \phi(x,y)$. Från representationssatsen (2.5 i Colton) tillsammans med ⊛ fås då att

$$u(x) = \int_\Omega \gamma(x,y)\Delta u(y)\,dy - \int_{\partial\Omega}\left(\gamma(x,y)\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \gamma}{\partial n}\right)dS_y$$

Vi vill välja ϕ så att $\gamma(x,\cdot) = 0$ på $\partial\Omega$. Då försvinner en av randtermerna.

$\Rightarrow \phi(x,y) = \Gamma(x-y)$ då $y \in \partial\Omega$. (2)

Existensen av ϕ är ok, men för att bestämma ϕ explicit krävs "snälla" områden Ω.

<u>DEF</u>: Greens funktion $G = G(x,y)$ för området Ω definieras genom

$$\boxed{G(x,y) = \Gamma(x-y) - \phi(x,y)} \quad \forall x,y \in \Omega \text{ sådana att } x \neq y.$$

Anmärkning: G skiljer sig från Γ med en harmonisk funktion i Ω och $G = 0$ på randen $\partial\Omega$.

Om Greens funktion finns kan alltså lösningen till problemet (D) skrivas

$$\boxed{u(x) = \int_\Omega G(x,y)f(y)\,dy + \int_{\partial\Omega} g(y)\frac{\partial G}{\partial n}(x,y)\,dS_y}$$

Man kan beräkna G för vissa "snälla" områden. För bollen $B_r \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ har vi

<u>SATS</u> $G(0,y) = \frac{1}{(2-n)\omega_n}\left(\frac{1}{|y|^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}}\right)$ för $y \in B_r \setminus \{0\}$

$$G(x,y) = \frac{1}{(2-n)\omega_n}\left(\frac{1}{|y-x|^{n-2}} - \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2} \cdot \left|y - \frac{R^2 x}{|x|}\right|^{2-n}\right) \quad \text{för } x \in B_r\setminus\{0\} \text{ och } y \in B_r \setminus \{x\}$$

POISSONS EKVATION

Betrakta Poissons ekvation, $\Delta u = f$ i Ω. Låt

$$w_f = \int_\Omega \Gamma(x-y)f(y)\,dy \quad , \Gamma \text{ som tidigare.}$$

w_f kallas Newtonpotentialen till f i Ω.

<u>SATS</u> Tenta Låt Ω vara ett begränsat område i $\mathbb{R}^n$ och låt $f \in C^1(\Omega)$. Antag att f har kompakt stöd i Ω. Då gäller att

$$\boxed{w_f \in C^2(\Omega) \text{ och } \Delta w_f = f \text{ i } \Omega.}$$

<u>Anm</u>. Kompakt stöd innebär att det finns en kompakt mängd $D \subset \Omega$ så att $f = 0$ i $\Omega \setminus D$.

<u>Anm</u>. Satsen gäller även om f ej har kompakt stöd, men beviset blir då mer invecklat.

28/11-2014

POISSONS EKVATION

BEVIS (Använd beteckningen w för w_f)

För $x \in \Omega$ gäller att

$$w(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y) f(y)\, dy = \begin{bmatrix} z = y - x \\ y = z + x \end{bmatrix} = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(z) f(z+x)\, dz,$$

eftersom f har kompakt stöd ($f=0$ utanför Ω). Derivera en gång och kom ihåg att $f \in C^1$. Detta ger

$$w_{x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(z) f_{x_i}(z+x)\, dz = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(z) f_{z_i}(z+x)\, dz$$

Integrera partiellt och utnyttja att $f=0$ för $|z+x|$ stort.

$$\Rightarrow w_{x_i}(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\Gamma_{z_i}(z)}_{\text{Singulär, men inte "farligt" singulär.}} f(z+x)\, dz$$

Anm: Ok att derivera innanför integraltecknet då Γ_{z_i} ej farligt singulär.

Eftersom $f \in C^1$ kan vi derivera igen, vilket ger

$$w_{x_i x_j}(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_{z_i}(z) f_{z_j}(z+x)\, dx.$$

alltså är $w \in C^2(\Omega)$. Återstår att visa $\Delta w = f$. Beräkna

$$\Delta w = \sum_{i=1}^n w_{x_i x_i} = -\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \Gamma_{z_i}(z) f_{z_i}(z+x)\, dx = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon} \Gamma_{z_i}(z) f_{z_i}(x+z)\, dz,$$

där B_ε är bollen kring origo med radie ε i $\mathbb{R}^n$. För $z \in \mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon$ gäller

$$\nabla \cdot (\Gamma_{z_1} f, \ldots, \Gamma_{z_n} f) = \underbrace{(\Delta \Gamma(z))}_{=0 \text{ utanför origo}} f + \sum_{i=1}^n \Gamma_{z_i} f_{z_i} = \boxed{\sum_{i=1}^n \Gamma_{z_i} f_{z_i}} \quad (= \nabla \Gamma f)$$

Gauss divergenssats ger att

$$\Delta w = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}(z) f(x+z)\, dS,$$

där n är den utåtriktade normalen till ∂B_ε av området $\Omega \setminus B_\varepsilon$, dvs. pekar in mot origo. Då f har kompakt stöd finns ingen randterm i oändligheten. Låt $r = |z|$, då $\Gamma(z) = \Gamma(|z|)$ fås

$$\Delta w(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} f(z+x)\, dS = [\text{Derivera m.a.p. } r] = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \underbrace{\int_{\partial B_\varepsilon} f(z+x)\, dS}_{\to f(x)\omega_n \varepsilon^{n-1}} = f(x).$$

∎

Anm. Regularitet: om u löser $\Delta u = f$ och f är kontinuerlig, vad kan vi i allmänhet säga om regulariteten av u? Då $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \ldots + \partial^2/\partial x_n^2$ är en kombination av derivator är u inte nödvändigtvis C^2!

För att analysera elliptiska ekvationer arbetar man därför i antingen Sobolerrum eller i Hölderrum, vilka är en variant av C^k betecknade $C^{k,\alpha}$.

$$\Delta u = f \in C^{k,\alpha} \Rightarrow u \in C^{k+2,\alpha}.$$

1/12-2015
Måndag LV5

EXEMPELRÄKNING

DC4.1 Låt $q \in C^1(\bar{D})$. Låt $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ vara lösning till $\begin{cases} \Delta u + q(x)u = 0 \text{ i } D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = f \text{ på } \partial D \end{cases}$.
Om $q < 0 \ \forall x \in \bar{D}$, visa att lösningen är entydig.

Anm. Här bör vi betrakta $D_\varepsilon \subset D$ så att $D_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} D$, men vi kan lika gärna anta att $u \in C^2(\bar{D})$.

LÖSNING Antag att det finns två lösningar u_1 och u_2. Låt $u = u_1 - u_2 \Rightarrow \begin{cases} \Delta u + qu = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ på } \partial D \end{cases}$
Använd Greens formel på paret u, v, där $u = v$.

$$0 = \int_{\partial D} u \underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}}_{=0 \text{ på } \partial D} ds = \iint_D u \underbrace{\Delta u}_{=-qu} + |\nabla u|^2 \, dx = \iint_D -qu^2 + |\nabla u|^2 \, dx \geq \iint_D |\nabla u|^2 \, dx$$

$\Rightarrow u \equiv$ konstant.
Om $u \equiv$ konstant fås att $\Delta u + qu = 0 \Leftrightarrow qu = 0 \Rightarrow u = 0$ ty $q < 0$ i D
$\therefore u_1 = u_2$, och lösningen är entydig!

DC4.2 Använd Gauss divergenssats för att visa att den enda lösningen till
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(e^y \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \text{ i } D \\ u = 0 \text{ på } \partial D \end{cases}$$
är $u \equiv 0$.

LÖSNING Låt $\mathbb{F} = (e^x u_x, e^y u_y) \cdot u$. Vi har då (Greens)

$$0 = \int_{\partial D} (e^x u_x, e^y u_y) \cdot \underbrace{u}_{=0 \text{ på } \partial D} \cdot n \, ds = \left[\begin{matrix}\text{Gauss} \\ \text{sats}\end{matrix}\right] = \iint_D \nabla \cdot \mathbb{F} \, dx =$$

$$= \iint_D \underbrace{\left(\nabla \cdot (e^x u_x, e^y u_y) \cdot u\right)}_{=0 \text{ enligt ekvationen!}} + (e^x u_x, e^y, u_y) \cdot \underbrace{\nabla u}_{=(u_x, u_y)} \, dx = \iint_D e^x u_x^2 + e^y u_y^2 \, dx$$

För att få H.L $= 0$ måste $u_x^2 = u_y^2 = 0 \Rightarrow u =$ konstant. Men, $u = 0$ på ∂D
$\Rightarrow u \equiv 0$, V.S.V.

DC4.3 Visa att $\begin{cases} \Delta u = u^3 & \text{i } x^2 + y^2 < 1 \\ u = 0 & \text{på } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ har enda lösningen $u \equiv 0$.

LÖSNING Använd Greens formel på paret u, u.

$$0 = \int_{\partial D} \underbrace{u}_{=0 \text{ på } \partial D} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \cdot ds = \int_D \underbrace{(\Delta u)}_{=u^3} u + |\nabla u|^2 \, dx = \int_D \underbrace{u^4}_{\geq 0} + \underbrace{|\nabla u|^2}_{\geq 0} \, dx$$

$\Rightarrow u \equiv 0$ då både u^4 och $|\nabla u|^2 \geq 0$!

1/12-2014

EXEMPELRÄKNING

DC4.5 Antag att $u \in C^1(D)$ så att integralen av $\frac{\partial u}{\partial n}$ över godtycklig cirkel är 0. Visa att u är harmonisk, dvs $\Delta u = 0$.

LÖSNING Det finns ett välkänt resultat att om u har egenskapen ovan så är faktiskt $u \in C^\infty$, och då kan vi använda Greens formel. Uppgiften ingår ej.

DC4.6 Låt u vara lösning till $\begin{cases} \Delta u = -1 & \text{i } |x|<1, |y|<1 \\ u = 0 & \text{på } |x|=1, |y|=1 \end{cases}$ (Kvadrat med sidlängd 2).

Finn en övre och nedre begränsning till $u(0,0)$.

Ledning: Betrakta $v = u + \frac{1}{4}(x^2+y^2)$, så att $\Delta v = \Delta u + \frac{1}{4}(2+2) = -1+1 = 0$ (v harmonisk!), samt på randen är $v = u + \frac{1}{4}(x^2+y^2)\big|_{\partial D} = \frac{1}{4}(x^2+y^2)$

LÖSNING Maximumprincipen ger att maximum antas på randen, så att

$$\max(v) = \frac{1}{4}(1+1) = \frac{1}{2}$$

På samma sätt fås för minimum att

$$\min(v) = \frac{1}{4}(1+0) = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow u(0,0) = v(0,0)$, men $\frac{1}{4} \le v(0,0) \le \frac{1}{2}$; alltså är även $\frac{1}{4} \le u(0,0) \le \frac{1}{2}$.

DC4.7 Låt $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{i } D \\ u = f & \text{på } \partial D \end{cases}$ (*)

Visa att för alla funktioner $v \in C^1(D) \cap C^2(\bar{D})$ så att $v = f$ på ∂D så minimerar u uttrycket

$$\int_D |\nabla v|^2 \, dx. \quad \text{(Dirichlets princip!)}$$

LÖSNING Greens formel på paret $u, v-u$ där u löser (*) och v tillhör rätt klass av funktioner fås

$$0 = \int_D (v-u)\underbrace{\Delta u}_{=0 \text{ i } D} dx - \int_{\partial D} \underbrace{(v-u)}_{=0 \text{ tv } u=v=f \text{ på } \partial D} \frac{\partial u}{\partial n} ds = -\int_D \nabla(v-u)\cdot\nabla u \, dx =$$

$$= -\int_D \nabla v \cdot \nabla u \, dx + \int_D |\nabla u|^2 dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_D |\nabla u|^2 dx = \int_D \nabla v \cdot \nabla u \, dx \le \int_D \underbrace{|\nabla v|}_{a} \cdot \underbrace{|\nabla u|}_{b} dx \le \left[\begin{matrix} 2ab \le a^2+b^2 \\ \text{ty } (a-b)^2 \ge 0 \end{matrix}\right] \le \frac{1}{2}\int_D |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_D |\nabla u|^2 dx \le \frac{1}{2}\int_D |\nabla v|^2 dx, \text{ dvs } \int_D |\nabla u|^2 dx \le \int_D |\nabla v|^2 dx$$

för alla v i funktionsklassen, alltså minimerar u funktionalen

$$\int_D |\nabla v|^2 dx, \text{ v.s.v.}$$

1/12-2014

EXEMPELRÄKNING

DC 4.8 Låt $k>0$ vara en konstant.

a) Finn alla lösningar till $\Delta u + k^2 u = 0$ som bara beror på $r=\sqrt{x^2+y^2}$ och är begränsade i $r=0$.

LÖSNING Formulera ekvationen i polära koordinater där u är oberoende av θ.

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan\frac{y}{x} \end{cases}, \quad u_x = u_r \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\Big(\underbrace{+u_\theta \frac{\partial \theta}{\partial x}}_{=0}\Big) = u_r \cos\theta$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u_{xx} = u_{rr}\frac{x^2}{r^2} + \frac{u_r}{r}\sin^2\theta \\ u_{yy} = u_{rr}\frac{y^2}{r^2} + \frac{u_r}{r}\cos^2\theta \end{matrix} \Rightarrow \Delta u = u_{rr} + \frac{u_r}{r}$$

Alltså är $\Delta u + k^2 u = 0 \iff u_{rr} + \frac{u_r}{r} + k^2 u = 0$.

Detta är Bessels ekvation! (2.59 i Colton). Den enda lösning till denna ekvation som är begränsad i $r=0$ är

$u = A J_0(kr)$, där A = konstant och J_0 0-te ordningens Besselfunktion.

b) Visa att varje lösning till $\Delta u + k^2 u = 0$ i disken $|x-x_0|<\rho$ sådan att $u \in C^2(D)\cap C(\bar{D})$ och $J_0(k\rho)\neq 0$ uppfyller medelvärdesegenskapen

$$u(x_0) = \frac{1}{2\pi\rho J_0(k\rho)}\int_{|x-x_0|=\rho} u \cdot ds$$

Ledning: Visa att $\frac{1}{2\pi\rho}\int_{|x-x_0|=\rho} u\cdot ds$ löser Bessels ekvation.

LÖSNING: Vi introducerar polära koordinater, $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$, $u = u(x(\rho,\theta), y(\rho,\theta))$.

Vi beräknar $u_{\theta\theta}$ uttryckt i u_{xx} etc.

$$\begin{cases} u_\theta = u_x\frac{\partial x}{\partial\theta} + u_y\frac{\partial y}{\partial\theta} = u_x(-\rho\sin\theta) + u_y\rho\cos\theta \\ u_{\theta\theta} = --- = u_{xx}\rho^2\sin^2\theta + u_{yy}\rho^2\cos^2\theta - u_x\rho\cos\theta - 2u_{xy}\rho^2\sin\theta\cos\theta - u_y\rho\sin\theta. \end{cases} \quad (*)$$

Vi visar nu ledningen. Låt $f(\rho) = \frac{1}{2\pi\rho}\int u\cdot ds$. Vi vill visa att $f_{\rho\rho} + \frac{f_\rho}{\rho} + k^2 f = 0$

$$f(\rho) = \frac{1}{2\pi\rho}\int_0^{2\pi} u(x_0+\rho\cos\theta, y_0+\rho\sin\theta)\rho\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0+\cos\theta, y_0+\sin\theta)\, d\theta$$

$$f'(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_x\cos\theta + u_y\sin\theta\, d\theta$$

$$f''(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_{xx}\cos^2\theta + 2u_{xy}\cos\theta\sin\theta + u_{yy}\sin\theta\, d\theta = \left[\int_0^{2\pi} u_{\theta\theta}\, d\theta = 0\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_{xx}\cos^2\theta + 2u_{xy}\sin\theta\cos\theta + u_{yy}\sin\theta + \frac{u_{\theta\theta}}{\rho^2}\, d\theta = [(*)] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_{xx} + u_{yy} - \frac{u_x}{\rho}\cos\theta - \frac{u_y}{\rho}\sin\theta\, d\theta$$

Alltså är

$$f''(\rho) + \frac{f'(\rho)}{\rho} + k^2 f(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{u_{xx} + u_{yy} + 0 + k^2 u}_{=0}\, d\theta$$

$\Rightarrow f'' + \frac{f'}{\rho} + k^2 f = 0$ och löser Bessels ekvation!

1/12-2014

DC4.8 Kvar att visa är att $\underbrace{u(x_0)J_0(k\rho)}_{=g} = \frac{1}{2\pi\rho}\int_{|x-x_0|=\rho} u\,ds$ håller, dvs, att $g=f$.

Vi har direkt att $g''(\rho)+\frac{1}{\rho}g'(\rho)+k^2g(\rho)=0$ eftersom $u(x_0)J_0(k\rho)$ uppfyller Bessels ekvation. Vi har ovan visat att

$$f''(\rho)+\frac{1}{\rho}f'(\rho)+k^2f(\rho)=0 \quad (2)$$

Som tidigare ges den enda begränsade lösningen till (2) av

$f(\rho)=AJ_0(k\rho)$, men vi har att $\lim_{\rho\to 0} f(\rho)=u(x_0)$

(Det gäller att $J_0(0)=1$)

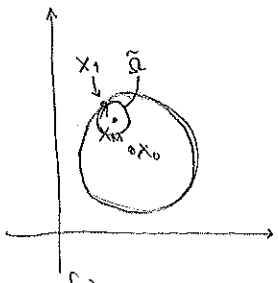
DC4.9 Definiera $u\in C(D)$ så att

$$(*) \quad u(x_0)=\frac{1}{2\pi\rho}\int_{\partial\Omega} u\,ds$$ för varje disk $\Omega=\{x:|x-x_0|<\rho\}$ så att $\bar{\Omega}\subset D$.

Visa att u är harmonisk i D.

LÖSNING Eftersom Ω är en disk finns en harmonisk funktion v så att $u=v$ på randen $\partial\Omega$, eftersom vi för en disk har beräknat Greens funktion i detta fall, $\begin{cases}\Delta v=0 & \text{i } \Omega\\ v=u & \text{på } \partial\Omega\end{cases}$

Låt $g=u-v$. Vi visar att $g\equiv 0$ i Ω. Antag $g\not\equiv 0$ (annars klara), samt att $g>0$ i någon punkt. Antag att $\max(g)|_{\partial\Omega}$ antas i $x_M\in\Omega$. Vi vet att $x_0\notin\partial\Omega$, ty på $\partial\Omega$ är $g=0$.



Låt nu $M=\max(g(x_M))$. Tag nu en disk $\tilde{\Omega}$ centrerad i x_M så att disken skär Ω i en punkt på $\partial\Omega$. Vi har nu att

$$g(x_M)=\left[\begin{array}{l}u \text{ uppfyller } (*)\\ v \text{ är harmonisk}\end{array}\right]=\frac{1}{2\pi\rho}\int_{\partial\tilde{\Omega}} g\,ds\le M \qquad (**)$$

I skärningspunkten x_1 är $g=0$, eftersom g är kontinuerlig finns en omgivning till x_1 så att $g<M$. Alltså kan likhet uppstå i $(**)$ och vi har en motsägelse! Alltså är $g=0$ i Ω.

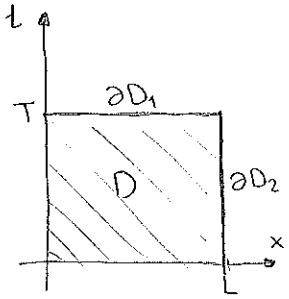
3/12-2014
Onsdag LV5

PARABOLISKA EKVATIONER

Standardexemplet på en parabolisk ekvation är <u>värmeledningsekvationen</u>:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u} \qquad (1)$$

Till (1) bör man också specifiera rand- och <u>begynnelsevärden</u>. I Colton används en kurva för rand- och begynnelsedata. Vi betraktar framförallt fallet då Coltons kurva är en rektangel. Betrakta nu en generalisering av (1), då $n=2$:



$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x} + a(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + b(t,x)u \qquad (2)$$

Vi ska visa att lösningar till (2) uppfyller den <u>svaga maximumprincipen</u>, som säger att om $\max u > 0$ antas max på ∂D_2.

<u>Anm</u> 1) <u>Svag</u> innebär här att max även kan antas inne i D.

2) Villkoret $\max u > 0$ behövs inte i fallet då $b(t,x)=0$ i (2). I detta fall har vi att om u är lösning så är också $u+C$ en lösning, så att $\max v = \max(u+C)$ alltid kan fås positivt.

3) Principen gäller analogt för min om $\min u < 0$.

Betrakta $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Antag att $\max u$ ligger i D.
$\Rightarrow u_t = 0,\ u_x = 0$ och dessutom uppfylls $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leq 0$ i en maxpunkt. Om vi verkligen visste att $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} < 0$ i denna punkt fås från $u_t = 0$ att $u_t \neq \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ i denna punkt. Men då uppfyller ej u värmeledningsekvationen! Eftersom u_{xx} dock kan vara $=0$ måste vi modifiera argumentet något.

<u>SATS</u>: Låt u vara en lösning till (2) som är kontinuerlig i $\bar{D}$ samt antag att $b \leq 0$ i D. Då gäller att

> Om u har ett positivt maximum så antas det på randen ∂D_2 och motsvarande för ett negativt minimum.

<u>BEVIS</u> Antag att u har ett positivt max i (t_0,x_0) som ligger i $D \cup \partial D_2$. Då finns $\varepsilon > 0$ så att funktionen $v := u - \varepsilon t$ har max i $\bar{D}$. Antag $\max v$ fås i $(t_0,x_0) \in D \cup \partial_1$.
[Vi kan välja ε godtyckligt litet, v är kontinuerlig]
För h tillräckligt litet ligger punkterna $\{(t,x): k \leq x \leq x_0 + k,\ t = t_0\}$ i $D \cup \partial D_2$.
I (t_0,x_0) har vi, eftersom u har max där, att $v_x = u_x = 0$

$$v_{xx} = u_{xx} \leq 0$$

$$u \text{ löser } (2) \Rightarrow v_{xx} + a v_x + b v - v_t = \underbrace{u_{xx} + a u_x + b u}_{=0!} + b\varepsilon t \underbrace{- u_t}_{} + \varepsilon = \varepsilon(1 - tb)$$

3/12-2014

PARABOLISKA EKVATIONER

<u>BEVIS</u> $\Rightarrow V_t = V_{xx} + aV_x + bV - \varepsilon(1-bt)$

Vi får då att $V_t(t_0,x_0) \underset{\substack{V_{xx}(t_0,x_0)\le 0 \\ V_x(t_0,x_0)=0}}{\le} \underbrace{b(t_0,x_0)}_{\le 0}\underbrace{V(t_0,x_0)}_{\ge 0} - \varepsilon + \varepsilon t \underbrace{b(t_0,x_0)}_{\le 0 \to \text{Antaget.}} \le -\varepsilon$

Antagandet att max > 0 kommer in

Då V_t är kontinuerlig kan vi välja h litet så att

$$V_t(t,x_0) \le -\frac{\varepsilon}{2} \text{ för } t_0-h \le t \le t_0+h.$$

Detta medför att

$$V(t_0;x_0) - V(t_0-h,x_0) = \int_{t_0-h}^{t_0} V_t(s,x_0)\,ds \le -\frac{\varepsilon}{2}\cdot h.$$

Alltså är $V(t_0,x_0) < V(t_0-h,x_0)$, vilket är en motsägelse mot antagandet att max V antas i (t_0,x_0)! Alltså ligger max för V på ∂D_2. Vi har då

$$\max_{\bar D} u = \max_{\bar D}(V+\varepsilon t) \le \left[t\in[0,T]\right] \le \max_{\bar D}(V+\varepsilon T) = \max_{\partial D_2}(V+\varepsilon T) = \varepsilon T + \max_{\partial D_2}(u-\varepsilon t) \le$$
$$\le \varepsilon T + \max_{\partial D_2} u.$$

$\varepsilon > 0$ är godtyckligt, vilket ger att $\max_{\bar D} u \le \max_{\partial D_2} u$ <u>V.S.V.</u>

<u>Anm</u> Maximumprincipen gäller även i högre dimension, inte bara för $u_t = u_{xx} + au_x + bu$ utan även för $u_t = \Delta u + \ldots$

Vi ska använda maximumprincipen för att visa entydighet av lösningar till ekvation (2) <u>utan</u> att behöva anta $b \le 0$.

<u>SATS</u> Betrakta ekvation (2) med rand- och begynnelsedata $u(t,x) = \phi(t,x)$ på ∂D_2. Då gäller att

$$\boxed{\text{Det finns högst en lösning till detta problem}}$$

<u>BEVIS</u> Låt $v = u_1 - u_2$, där u_1 och u_2 antas vara två lösningar. V uppfyller (2) och $v(x,t) = 0$ på ∂D_2. Om $b \le 0$ kan vi direkt använda maximumprincipen för att dra slutsatsen $v \equiv 0$. Antag därför att $b > 0$ och b kontinuerlig i $\bar D$. Låt konstanten $\alpha > 0$ vara sådan att $\alpha > b$ i $\bar D$. Inför funktionen

$$w = Ve^{-\alpha t} \Rightarrow w_t = V_t e^{-\alpha t} - \alpha V e^{-\alpha t} = [\text{Ekvation (2)}] = \underbrace{V_{xx}e^{-\alpha t}}_{=w_{xx}} + \underbrace{aV_x e^{-\alpha t}}_{aw_x} + \underbrace{bVe^{-\alpha t} - \alpha V e^{-\alpha t}}_{=(b-\alpha)w=\tilde b w} =$$
$$\Rightarrow w_t = w_{xx} + aw_x + \tilde b w$$

Vi har nu en ekvation av typ (2) där $\tilde b \le 0$ och dessutom $w = 0$ på ∂D_2. Maximumprincipen ger att $w \equiv 0 \Rightarrow V \equiv 0 \Rightarrow u_1 = u_2$ V.S.V.

<u>Anm</u> Man kan även använda så kallade "energimetoder" (se uppgifter) för att visa entydighet!

<u>Anm</u> Ekvationen $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ <u>inte</u> är invariant vid tidstransformationen $t \to -t$. Värmeledningsekvationen är irreversibel!

3/12-2014

PARABOLISKA EKVATIONER

För värmeledningsekvationen kan man konstruera exempel där lösningen inte är entydig bakåt i tiden! (Colton sid 110). Värmeledningsekvationen regulariserar lösningar framåt i tiden och tvärtom bakåt! Det finns dock tillämpningar även bakåt i tiden.

Vi ska visa att maximumprincipen medför att lösningen beror kontinuerligt på rand- och begynnelsedata. När vi visat det har vi visat att V.L.E. framåt i tiden är välställd (existens, $\underbrace{\text{entydighet, kont. beroende på data}}_{\text{Fungerar ej bakåt i tiden!}}$) såväl som på existens.

SATS Betrakta (2) med $u = \phi$ på ∂D_2.

$$\boxed{\text{Om lösning finns beror denna kontinuerligt på data}}$$

BEVIS Se boken.

För V.L.E bakåt i tiden gäller inte att lösningen är kontinuerligt beroende av data! Låt

$$u_n(t,x) = \frac{1}{n}\sin(nx)e^{-n^2 t} \quad (*)$$

Man kan direkt visa att u_n uppfyller V.L.E. $\frac{\partial u_n}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$. Då $t=0$ har vi att

$$u_n(0,x) = \frac{1}{n}\sin(nx).$$

Noteras att $u_n(0,x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, samt att $u \equiv 0$ är en lösning till V.L.E. med begynnelsedata $u(0,x)=0$. Om vi hade haft kontinuerligt beroende av data skulle vi för givet $\varepsilon > 0$ och givet t kunnat hitta $\delta > 0$ så att $|u_n(0,x) - 0| < \delta$ hade inneburit att $|u_n(t,x) - 0| < \varepsilon$. Vi ser dock i $(*)$ att för godtyckligt $t < 0$ (t.ex. -1) gäller

$$u_n(-1,x) = \frac{1}{n}\sin(nx)e^{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} \infty \quad \text{för givet } x.$$

I synnerhet gäller då att $|u_n(t,x) - 0| \not< \varepsilon$.

8/12-2014
Måndag LV6

PARABOLISKA EKVATIONER

För värmeledningsekvationen med både rand- och begynnelsevillkor har vi visat att lösningen är entydig och beror kontinuerligt på data. Om vi kan bevisa existens har vi fått att problemet är välställt. I fall geometrin är snäll (t.ex. rektangel) kan existens visas genom separationsmetoden. I övriga fall kan man visa existens, men vi utelämnar det här. Vi ska däremot visa existens för det "rena" begynnelsevärdesproblemet, det s.k. Cauchyproblemet.

Betrakta problemet
$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & -\infty < x < \infty,\ t > 0 \quad (1) \\ u(0,x) = \phi(x), & -\infty < x < \infty \quad (2) \end{cases} \quad (C)$$

i ett obegränsat område. Vi ska visa en allmän lösningsformel till problemet ovan. För detta behövs en entydighetssats för (C):

SATS Det finns högst en lösning till (C) som är $\boxed{\text{begränsad}}$ i absolutvärde för $t \geq 0$.

BEVIS Utgå från maximumprincipen på ett område där gränserna går mot oändligheten.

HÄRLEDNING AV FUNDAMENTALLÖSNINGEN

Fouriertransformera ekvationen i variabeln x, dvs. låt
$$\hat{u}(t,\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t,x) e^{-i\lambda x}\, dx$$

(1) ger [formella räkningar, dvs. antag att $u \xrightarrow{\pm\infty} 0$, operationer kan flyttas innanför $\int$ osv.]
$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} u e^{-i\lambda x}\, dx = [(1)] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-i\lambda x}\, dx = [\text{Integrera partiellt, } u(\pm\infty)=0] =$$
$$= -\lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} u(t,x) e^{-i\lambda x}\, dx = -\lambda^2 \hat{u}(t,x)$$

Alltså får vi den transformerade ekvationen
$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t,\lambda) = -\lambda^2 (t,\lambda) & (3) \\ \hat{u}(0,\lambda) = \hat{\phi}(\lambda) & (4) \quad (\text{Fouriertransformen av } \phi) \end{cases}$$

(3)+(4) har lösningen $\hat{u}(t,\lambda) = \hat{\phi}(\lambda) e^{-\lambda^2 t}$. Återtransformering ger
$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(t,\lambda) e^{i\lambda x}\, d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\lambda) e^{-\lambda^2 t + i\lambda x}\, d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi) e^{-i\xi\lambda}\, d\xi\right) e^{-\lambda^2 t + i\lambda x}\, d\lambda =$$
$$= [\text{Byt integrationsordning}] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi) \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 t + i\lambda(x-\xi)}\, d\lambda\right)}_{I} d\xi$$

Integralen I går att beräkna (s.118) och man finner att
$$I = \sqrt{\frac{\pi}{t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}$$
$$\Longrightarrow \boxed{u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi}$$
. Kärnan $e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}$ är fundamentallösningen till V.L.E!

8/12-2014

VÄRMELEDNINGSEKVATIONEN

Vi ska nu visa att fundamentallösningen verkligen löser (C)!

SATS (Hjälp-) Låt $f(t,x)$ och $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ vara kontinuerliga funktioner i $\overbrace{(c,d)}^{t}\times\overbrace{(-\infty,\infty)}^{x}$.
Antag att

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t,x)\,dx \quad \text{och} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| dx$$

konvergerar likformigt för $t\in(c,d)$. Då gäller att

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}f(t,x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx}$$

BEVIS Utelämnas, men vi behöver resultatet...

Låt nu $S(t,z)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{z^2}{4t}}$ och definiera

$$u(t,x)=\int_{-\infty}^{\infty}S(t,x-y)\phi(y)\,dy \qquad (*)$$

Vi har då följande sats:

SATS Låt $\phi(x)$ vara kontinuerlig och begränsad för $-\infty<x<\infty$. Formeln $(*)$ definierar en funktion $u\in C^\infty((0,\infty)\times(-\infty,\infty))$ vilken satisfierar ekvationen $u_t=u_{xx}$ och $\lim_{t\to 0}u(t,x)=\phi(x)$.

BEVIS Integralen $(*)$ är konvergent, ty med variabelbytet $p=\frac{x-y}{\sqrt{t}}$ fås

$$|u(t,x)=\left|\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\phi(y)\,dy\right|=\left[\begin{matrix}p=\frac{x-y}{\sqrt{t}} & y=-\infty\to p=\infty\\ y=x-t\sqrt{p} & y=\infty\to p=-\infty\end{matrix}\right]=\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}e^{-\frac{p^2}{4}}\phi(x-\sqrt{t}p)\,dp\right|\leq$$

$$\leq[\phi \text{ begränsad}]\leq C\max|\phi|\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{p^3}{4}}\,dp<\infty.$$

u är alltså väldefinierad. Vi vill derivera innanför integraltecknet och utnyttjar hjälpsatsen ovan. Vi visar att

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial S}{\partial x}(t,x-y)\phi(y)\,dy$$

genom att visa att integralen är absoluthonvergent. För $t>0$ har vi

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial S}{\partial x}(t,x-y)\right||\phi(y)|\,dy=\frac{C}{\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|x-y|}{2t}e^{-(x-y)^2/4t}|\phi(y)|\,dy=\left[p=\frac{(x-y)}{\sqrt{t}}\right]=$$

$$=\frac{C}{\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{\infty}|p|e^{-p^2/4}|\phi(x-\sqrt{t}p)|\,dp\leq\frac{C\max|\phi|}{\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{\infty}|p|e^{-p^2/4}\,dp<\infty$$

← Mycket snabbt mot 0!

Övriga derivator hanteras analogt då ytterliggare potenser av $|p|$ hamnar i integranden och $\int_{-\infty}^{\infty}|p|^n e^{-p^2/4}\,dp<\infty$. Alltså gäller $u\in C^\infty[(0,\infty)\times(-\infty,\infty)]$.

Att u löser "$u_t=u_{xx}$" för $t>0$ följer direkt då derivatorna kan flyttas in och $S_t=S_{xx}$. Återstår att visa att $\lim_{t\to 0}u(t,x)=\phi(x)$.

8/12-2014 VÄRMELEDNINGSEKVATIONEN

BEVIS (Forts.) Notera att integralen av kärnan är normerad,

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(t,x-y)\,dy = 1 \quad \text{(följer från variabelbytet ovan)}$$

Vi får då att

$$u(t,x)-\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t,x-y)\left[\phi(y)-\phi(x)\right]dy \overset{\text{v.byte}}{=} \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2/4}\left[\phi(x-\sqrt{t}p)-\phi(x)\right]dp = I$$

Låt $\varepsilon>0$ och $\delta>0$ så att $\max_{|y-x|\le\delta}|\phi(y)-\phi(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Detta är möjligt då ϕ är kontinuerlig. Dela upp integralen:

$$I = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_{|p|<\frac{\delta}{\sqrt{t}}} e^{-p^2/4}\left[\phi(x-\sqrt{t}p)-\phi(x)\right]dp + \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_{|p|\ge\frac{\delta}{\sqrt{t}}} e^{-p^2/4}\left[\phi(x-\sqrt{t}p)-\phi(x)\right]dp = I_1+I_2$$

Vi får då att

$$|I_1| \le \max_{|y-x|\le\delta}|\phi(y)-\phi(x)|\underbrace{\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2/4}dp}_{=1} \le 1\times\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Utvidgat till hela integrationsområdet

$$|I_2| \le 2\max|\phi|\times\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_{|p|\ge\frac{\delta}{\sqrt{t}}} e^{-p^2/4}dp \le \frac{\varepsilon}{2} \text{ om } t \text{ väljs litet nog.}$$

Alltså är $|u(t,x)-\phi(x)|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ och vi har $\lim_{t\to 0}u(t,x)=\phi(x)$. V.S.V.

Från denna formel kan vi härleda Weierstrass approximationssats. Vi vet att om en funktion $f\in C^k([a,b])$ kan den approximeras med ett polynom godtyckligt väl om k är tillräckligt stort. (Följer från Taylors sats).

SATS Låt f vara kontinuerlig på intervallet $[a,b]$. Då finns ett polynom $p(x)$ så att

$$\boxed{\text{För givet } \varepsilon>0 \text{ gäller att } \max_{a\le x\le b}|f(x)-p(x)|<\varepsilon}$$

BEVIS Utvidga f kontinuerligt på $(-\infty,\infty)$ så att $f=0$ då $|x|>L$, L stort. Då är

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right)d\xi$$

en lösning till V.L.E. sådan att för $\delta>0$ tillräckligt litet gäller

$$\max_{a\le x\le b}|u(\delta,x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Låt $M=\max_{-L\le\xi\le L}|f(\xi)|$ och välj n så att

$$\max_{\substack{a\le x\le b\\ -L\le\xi\le L}}\left|e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\delta}}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{(x-\xi)^{2k}}{(4\delta)^k}\right|\le\frac{\varepsilon\sqrt{\pi\delta}}{2LM} \quad \text{"Väljer i efterhand"} \qquad (1).$$

Möjligt med Taylors sats ty $e^{-x^2}\in C^\infty$. Nu är

$$p(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi\delta}}\int_{-L}^{L} f(\xi)\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{(x-\xi)^{2k}}{(4\delta)^k}d\xi \text{ ett polynom i } x.$$

Från (1) fås att $\max_{a\le x\le b}|p(x)-u(\delta,x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Alltså är

$$\max_{a\le x\le b}|p(x)-f(x)| \le \max_{a\le x\le b}|p(x)-u(\delta,x)| + \max_{a\le x\le b}|u(\delta,x)-f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

V.S.V.

10/12-2014
Onsdag LV6

EXEMPELRÄKNING

3.1 a) Finn alla lösningar till $u_t = u_{xx}$ på formen

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t}} f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right).$$

Lösning Vi har $u_t = -\frac{1}{2t^{3/2}} f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) + \frac{1}{\sqrt{t}} f'\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \cdot \frac{x}{2}\left(-\frac{1}{2t^{3/2}}\right)$

$$u_x = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} f'\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$$

$$u_{xx} = \frac{1}{4t^{3/2}} f''\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$$

$\left[f', f'' \text{ tas m.a.p. argumentet! } f'_t(x,t) = f'(t),\ f''_x(x,t) = f''(x) \right]$

$$\Rightarrow u_t = u_{xx} \Leftrightarrow -\frac{1}{2t^{3/2}} f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) + \frac{x}{4t^2} f'\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{4t^{3/2}} f''\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$$

$$\Rightarrow f''\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) + \frac{x}{\sqrt{t}} f'\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{2t^{3/2}} f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) = 0$$

Låt $s = \frac{x}{2\sqrt{t}} \Rightarrow f''(s) + 2sf'(s) + 2f(s) = 0$

Vi har fått en ODE! Från BETA fås lösningen

$$f(s) = C_1 e^{-s^2} \int_0^s e^{t^2}\,dt + C_2 e^{-s^2}.$$

Sätt in $s = \frac{x}{2\sqrt{t}}$ för att få $u(t,x)$

b) Välj $C_1 = 0$ så har vi en lösning som är begränsad då $-\infty < x < \infty$, $-\infty < t < \infty$!

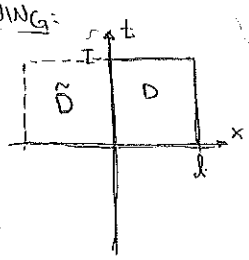
3.2 Enkel, bara att derivera. (Inre derivator...)

3.3 Låt $D = \{(t,x) : 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ och låt $u(t,x) \in C^2(\bar{D})$ vara en lösning till

$u_t = u_{xx}$ så att $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0$.

Visa att max av u antas då $t = 0$ eller $x = L$. Ledning: reflektera u m.a.p. t-axeln.

Lösning:



Vi vill ha en funktion v sådan att $v_t = v_{xx}$ i $\tilde{D} \cup D \cup \{x = 0\}$, där $v \in C^2(\tilde{D} \cup D \cup \{x = 0\})$.

Från Taylors formel har vi att

$$u(t,x) = u(t,0) + u'_x(t,0) + \int_0^x (x - \tilde{x}) u''_{xx}(t,\tilde{x})\,d\tilde{x} = \left[u'_x(t,0) = 0\right] =$$

$$= u(t,0) + \int_0^x (x - \tilde{x}) u''_{xx}(t,\tilde{x})\,d\tilde{x}.$$

Låt
$$v(t,x) = \begin{cases} u(t,x) & \text{då } x \geq 0 \\ u(t,-x) & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

Anm: Att $u'_x(t,0)$ utesluter situationer då $u \notin C^2$ i området!

Nu har vi vårat v och kan tillämpa maximumprincipen!

10/12-2014

EXEMPELRÄKNING

3.4 Följ beviset av maximumprincipen, men man kan undvika sista steget tack vare att $f<0$. Vi behöver heller inte veta att maximum är positivt, då termen $bu(t,x)$ (i ekv. 3.1) ej finns med. Vi kan då betrakta $u(t,x)+C$ vilken fortfarande löser ekvationen!

3.5 Låt $u(t,x)$ uppfylla
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \quad (0<x<1,\ t>0) & (1)\\ u(t,0)=u(t,1) \quad ,\ t\geq 0 & (2)\\ u(0,x)=f(x) \quad ,\ (0<x\leq 1) & (3)\end{cases}$$

Visa att $\int_0^1 (u(T,x))^2\,dx \leq \int_0^1 (f(x))^2\,dx$.

Ledning: Visa att $2u(u_t-u_{xx}) = \frac{\partial}{\partial t}(u^2) - 2\frac{\partial}{\partial x}(uu_x) + 2u_x^2$. $(*)$

LÖSNING: Kontrollera att $(*)$ är rätt.

$$\frac{\partial}{\partial t}u^2 - 2\frac{\partial}{\partial x}(uu_x) + 2u_x^2 = 2uu_t - \cancel{2u_x^2} - 2uu_{xx} + \cancel{2u_x^2} = 2u(u_t-u_{xx}) \quad \text{OK!}$$

Vi har alltså att

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}(u^2)\,dx = \int_0^1 2\frac{\partial}{\partial x}(uu_x) - 2u_x^2 + 2u\overbrace{(u_t-u_{xx})}^{=0 \text{ enl. ekv.}}\,dx = \overbrace{2\left[uu_x\right]_0^1}^{=0 \text{ enl. (2)}} - 2\int_0^1 u_x^2\,dx =$$

$$= -2\int_0^1 u_x^2\,dx \leq 0 \quad \text{eftersom } u_x^2 \geq 0.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 u^2\,dx \leq 0.$$

Integrera nu i t:

$$\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 u^2\,dx\,dt \leq 0 \Rightarrow \int_0^1 u^2(T,x)\,dx \leq \int_0^1 \overbrace{u^2(0,x)}^{=(f(x))^2}\,dx = \int_0^1 (f(x))^2\,dx$$

V.S.V.

3.6
$$(*)\begin{cases} u_t = u_{xx}+u_{yy} \text{ i } D\times[0,T]\\ u(t,x,y)=f(t,x,y) \text{ på } \partial D\times[0,T]\\ u(0,x,y)=\phi(x,y)\end{cases}$$

Om data (f, ϕ) är noll, visa att

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint_D u_x^2+u_y^2\,dx\,dy = -2\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx\,dy \leq 0 \qquad a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint_D u^2\,dx\,dy = -2\iint_D u_x^2+u_y^2\,dx\,dy \leq 0 \qquad b)$$

Om vi har någon av dessa olikheter, visa att $(*)$ har entydig lösning. (Energimetod!)

LÖSNING a) Vi har
$$\frac{\partial}{\partial t}\left[u_x^2+u_y^2\right] = 2u_xu_{xt}+2u_yu_{yt} \overset{\text{Vill ha fram randtermer! Ta divergens}}{=} 2\nabla(u_xu_t, u_yu_t) - 2u_{xx}u_t - 2u_{yy}u_t =$$
$$= 2\nabla(u_xu_t, u_yu_t) - 2u_t\overbrace{(u_{xx}+u_{yy}-u_t)}^{=0 \text{ enl. ekv.}} - 2u_t^2$$

Vi integrerar och får då

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint_D u_x^2+u_y^2\,dx\,dy = \underbrace{2\iint_D \nabla\cdot(u_xu_t, u_yu_t)\,dx\,dy}_{T_1} - 2\iint_D u_t^2\,dx\,dy$$

Divergenstermen $T_1=0$ enligt Gauss divergenssats, ty $u_t=0$ på ∂D $\forall t\in[0,T]$.
Detta ger a)!

10/12-2014

VÅGEKVATIONEN

3.6 b) Från uppgift 3.5 har vi

$$2u(u_t - \Delta u) = \partial_t u^2 - 2\nabla(u\cdot\nabla u) + 2\nabla u\cdot\nabla u$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\iint_D u^2\,dx\,dy = \iint_D 2u\underbrace{(u-\Delta u)}_{=0 \text{ enl. ekv}}dx\,dy + 2\underbrace{\iint_D \nabla(u\cdot\nabla u)\,dx\,dy}_{=0 \text{ enl. div.satsen}} - \iint_D 2\underbrace{\nabla u\cdot\nabla u}_{=u_x^2+u_y^2}\,dx\,dy$$

Detta visar b)!

KAP 2 - VÅGEKVATIONEN

Vågekvationen lyder

$$\boxed{u_{tt} = c^2 u_{xx}\quad, -\infty < x < \infty}$$

i en rumsdimension. c kan ses som vågens utbredningshastighet och sätts ofta till 1. Antalet rumsdimensioner är väsentligt i fallet med vågekvationen.

Börja med att betrakta den endimensionella vågekvationen. Vi kan då faktorisera vågoperatorn:

$$u_{tt} - u_{xx} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$$

Detta leder till den allmänna lösningen

$$u(t,x) = \phi(x-t) + \psi(x+t)$$

Detta överensstämmer med det vi gjort tidigare, då vi införde variablerna

$$\xi = x-t,\ \eta = x+t,$$

i vilket fall ekvationen tog formen

$$0 = u_{tt} - u_{xx} = -4u_{\xi\eta} \quad \Rightarrow u = \phi(\xi) + \psi(\eta) = \phi(x-t) + \psi(x+t)$$

Denna lösning kallas d'Alemberts lösning. Lösningen ger att det finns två familjer av karakteristiska kurvor, $x \pm t =$ konstant. $\phi(x-t)$ är en våg med godtycklig form som förflyttar sig åt höger, medan $\psi(x+t)$ är en sådan våg vilken färdas åt vänster.

Vi ska härleda en formel för Cauchy (begynnelse) problemet

Måste ha två villkor!

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & (1) \\ u(0,x) = \phi_0(x) & (2) \\ u_t(0,x) = \phi_1(x) & (3) \end{cases} \quad (\phi_0 \in C^2,\ \phi_1 \in C^1)$$

Vi använder den allmänna lösningen $u(t,x) = \phi(x-t) + \psi(x+t)$. (d'A)

$$(2) \Rightarrow u(0,x) = \phi(x) + \psi(x) = \phi_0(x) \quad (4)$$

$$(3) \Rightarrow u_t(0,x) = -\phi'(x) + \psi'(x) = \phi_1(x) \quad (5)$$

Integrera på $(0,x)$

$$(5) \Rightarrow \psi(x) - \phi(x) - \underbrace{\psi(0) + \phi(0)}_{=C} = \int_0^x \phi_1(\tilde{x})\,d\tilde{x}, \text{ dvs. } \psi(x) - \phi(x) = \int_0^x \phi_1(\tilde{x})\,d\tilde{x} + C \quad (6)$$

d'Alemberts formel!

$$(4)+(6) \Rightarrow \begin{cases} \phi(x) = \frac{1}{2}\phi_0(x) - \frac{1}{2}\int_0^x \phi_1(\tilde{x})\,d\tilde{x} + \frac{C}{2} \\ \psi(x) = \frac{1}{2}\phi_0(x) + \frac{1}{2}\int_0^x \phi_1(\tilde{x})\,d\tilde{x} - \frac{C}{2} \end{cases} (d'A) \Rightarrow \boxed{u(t,x) = \frac{1}{2}\left[\phi_0(x-t) + \phi_0(x+t) + \int_{x-t}^{x+t} \phi_1(\tilde{x})\,d\tilde{x}\right]}$$

12/12-2014
Fredag LV6

VÅGEKVATIONEN

Senast härledde vi d'Alemberts formel;

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(\phi_0(x-t)+\phi_0(x+t)\right)+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\phi_1(\tilde{x})\,d\tilde{x}$$

där u löser Cauchyproblemet

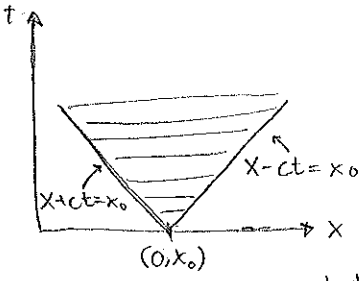
$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u(0,x) = \phi_0(x) \\ u_t(0,x) = \phi_1(x) \end{cases}$$

Entydighet och kontinuerligt beroende på initialdata följer direkt från konstruktionen av lösningen. (Vi började med den allmänna lösningen).
I en dimension är alltså vågekvationen <u>välställd</u>, detta gäller även för $t<0$ så att vågekvationen är <u>tidsreversibel</u>, till skillnad från VLE!

KAUSALITET OCH ENERGI

Effekten av indata för position $\phi_0(x)$ är ett par av vågor vilka förflyttar sig i motsatta riktningar med hastighet c (Ofta är $c=1$) med halva amplituden var. Man vinner <u>ingen regularitet</u> i vågekvationen, utan "vassa hörn" i initialdata fortsätter vara kantiga för $t>0$!

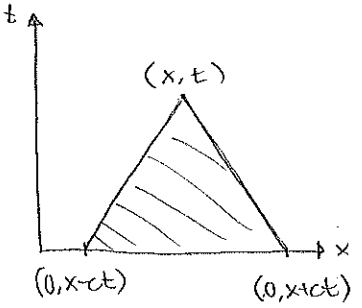
Effekten av initialhastighet $\phi_1(x)$ fås från d'Alemberts formel. En våg kommer bredda ut sig med en hastighet $v \leq c$ i båda riktningarna. Delar av vågen kan gå långsammare än c, men ingen del kan gå fortare! Detta påstående kallas för <u>kausalitetsprincipen</u>.



Begynnelsedata i $(0,x_0)$ kan påverka lösningen för $t>0$ i det skuggade området. Detta område kallas för "domain of influence" av punkten $(0,x_0)$.

Ett "inverterat" sätt att uttrycka kausalitet är följande:

Fixera en punkt (t,x), $t>0$. d'Alemberts formel relaterar värdet på $u(t,x)$ till att endast bero på $\phi_0(x)$ vid punkterna $(0,x-ct)$ och $(0,x+ct)$, samt att endast bero på ϕ_1 i intervallet $[x-ct, x+ct]$. Detta intervall kallas för "domain of dependence". Ibland kallas hela det skuggade området för $D \subseteq D$.



12/12-2014

VÅGEKVATIONEN

ENERGIN

I mekanik är $\frac{1}{2}mv^2$ den kinetiska energin. Detta motiverar att den "kinetiska" energin för vågekvationen är

$$\boxed{E_k := \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_t^2 \, dx}.$$

Antag att $|u| \longrightarrow 0$ då $x \longrightarrow \pm\infty$ tillräckligt snabbt. Då fås

$$\frac{d}{dt}E_k = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} 2u_t u_{tt}\, dx = \left[u_{tt} = u_{xx}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} u_t u_{xx}\, dx = \overset{=0}{\left[u_t u_x\right]_{-\infty}^{\infty}} - \int_{-\infty}^{\infty} u_{tx} u_x \, dx =$$

$$= -\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(u_x)^2 \, dx =: E_p \quad \text{, den potentiella energin!}$$

Alltså är $\frac{d}{dt}(E_p + E_k) = 0$, energin är konserverad!

Vågekvationen och värmeledningsekvationen skiljer sig mer eller mindre i alla aspekter.

Egenskap	Vågekvationen	Värmeledningsekv.
(i) Utbredningshastighet	Ändlig ($\leq C$)	Oändlig
(ii) Oregelbundenhet för $t > 0$	Transporteras	"Smetas ut" direkt
(iii) Välställd, $t > 0$	Ja	Ja, för begränsade lösningar
(iv) Välställd, $t < 0$	Ja	Nej
(v) Maximumprincip	Nej	Ja
(iv) Asymptotik	Energin bevarad	Avtar

Dessa är typiska egenskaper för dessa klasser av ekvationer.

Vi ska härleda en lösningsformel till vågekvationen i tre rumsdimensioner. När vi har denna formel kan vi använda den så kallade "Hadamard's method of descent" för att ta fram formeln i två rumsdimensioner.

Betrakta Cauchyproblemet

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \Delta u \quad \text{i } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 & (1) \\ u(0,x,y,z) = \phi_0(x,y,z) \in C^3(\mathbb{R}^3) & (2) \\ u_t(0,x,y,z) = \phi_1(x,y,z) \in C^3(\mathbb{R}^3) & (3) \end{cases}$$

Vi vill hitta en lösningsformel till detta problem.

12/12-2014

VÅGEKVATIONEN

För att lösa detta visar vi först att om $\phi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ så löser

$$(*) \quad u(t,x) := \frac{1}{4\pi t}\int_{|\xi - x| = t} \phi(\xi)\, d\sigma \quad , \text{ där} \quad \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^3,\ x = (x,y,z) \\ \xi \in \mathbb{R},\ \xi = (\xi,\eta,\zeta) \end{array} \quad d\sigma = \{\xi : |\xi - x| = t\}$$

Ytmåttet på sfären

Ytan av en sfär

ekvation (1).

Högerledet i (*) kallas det sfäriska medelvärdet av ϕ.

Inför nu sfäriska koordinater för att beskriva sfären $|\xi - x| = t$.

$$\begin{cases} \xi = x + t\sin\theta\cos\varphi \\ \eta = y + t\sin\theta\sin\varphi \\ \zeta = z + t\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array} \quad , \ d\sigma = t^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi .$$

Vi får då

$$u = \frac{t^2}{4\pi t}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \phi(t,\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{t}{4\pi}\int_{|\xi|=1} \phi(x + t\xi)\, d\sigma \qquad (**)$$

Poängen med detta uttryck är att x-variabeln har försvunnit från integrationsdomänen. Alltså är

$$\Delta u = \frac{t}{4\pi}\int_{|\xi|=1} \Delta\phi(x + t\xi)\, d\sigma = \left[\begin{array}{l}\text{Återgå till} \\ \text{ursprungsform}\end{array}\right] = \frac{1}{4\pi t}\int_{|\xi - x| = t} \Delta\phi(\xi)\, d\sigma .$$

Vidare har vi från (**) att

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\int_{|\xi|=1} \phi(x + t\xi)\, d\sigma + \frac{t}{4\pi}\int_{|\xi|=1} \nabla\phi(x + t\xi)\cdot \underbrace{\xi}_{\text{Enhetsvektor!}}\, d\sigma = \frac{u(t,x)}{t} + \frac{1}{4\pi t}\int_{|\xi - x| = t} \nabla\phi(\xi)\cdot \underbrace{\mathbf{n}}_{\text{Utåtriktad normal}}\, d\sigma$$

Gauss divergenssats på vektorfältet $\mathbb{F} = \nabla\phi$ ger att

$$\int_{|\xi - x| = t} \nabla\phi \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \int_{|\xi - x| \le t} \Delta\phi(\xi)\, d\xi .$$

Obs!

Alltså är

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(t,x)}{t} + \frac{1}{4\pi t}\int_{|\xi - x| \le t} \Delta\phi(\xi)\, d\xi .$$

Återstår att derivera en gång till i t! Låt

$$I = \int_{|\xi - x| \le t} \Delta\phi(\xi)\, d\xi \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(t,x)}{t} + \frac{1}{4\pi t} I .$$

Vi har då att

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{u}{t^2} + \frac{1}{t}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{4\pi t}\frac{\partial I}{\partial t} - \frac{1}{4\pi t^2} I = \frac{1}{t}\overbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{u}{t} - \frac{1}{4\pi t} I\right)}^{=0} + \frac{1}{4\pi t}\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{1}{4\pi t}\frac{\partial I}{\partial t} \qquad (1')$$

Använd sfäriska koordinater igen. Detta ger

$$I = \int_0^t\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \Delta\phi(x + \tilde{t}\sin\theta\cos\varphi,\ y + \tilde{t}\sin\theta\sin\varphi,\ z + \tilde{t}\cos\theta)\, \tilde{t}^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, d\tilde{t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial I}{\partial t} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \Delta\phi(x + t\sin\theta\cos\varphi, \ldots)\, t^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \int_{|\xi - x| = t} \Delta\phi\, d\sigma \qquad (2')$$

12/12-2014

VÅGEKVATIONEN

Enligt ovan hade vi att

$$\Delta u = \frac{1}{4\pi t}\int_{|\xi-x|=t} \Delta\phi(\xi)\,d\sigma \qquad (3')$$

Kombinera nu (1'), (2') och (3'):

$$\left| (1') \Rightarrow \underline{\underline{u_{tt}}} = \frac{1}{4\pi t}\frac{\partial I}{\partial t} \underset{(2')}{=} \frac{1}{4\pi t}\int_{|\xi-x|=t}\Delta\phi(\xi)\,d\sigma \underset{(3')}{=} \underline{\underline{\Delta u}} \right|$$

Vi har visat att denna formel löser (1)! Betrakta nu begynnelsevärdena. Eftersom vi ovan hade formeln

$$u = \frac{t}{4\pi}\int_{|\xi|=1}\phi(x+t\xi)\,d\sigma \quad \text{så har vi} \quad \frac{u}{t} = \frac{1}{4\pi}\int_{|\xi|=1}\phi(x+t\xi)\,d\sigma \,. \quad (4')$$

Vi har även enligt ovan att

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u}{t} + \underbrace{\frac{t}{4\pi}\int_{|\xi|=1}\nabla\phi(x+t\xi)\,d\sigma}_{\longrightarrow 0,\ \text{då } t\to 0}$$

Enligt (4') så gäller då att $\frac{u}{t} \longrightarrow \phi(x)$ när $t\to 0$. Alltså är

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \phi(x) \,.$$

Från (4', vänster) har vi att

$$u(0,x) = 0$$

Alltså löser vårt u problemet $\begin{cases} u_{tt} = \Delta u \\ u(0,x) = 0 \\ u_t(0,x) = \phi(x) \end{cases}$, (6')

Låt $v = \frac{\partial u}{\partial t}$, då gäller att $v_{tt} = v_{xx}$ eftersom $v_{tt} - v_{xx} = \frac{\partial}{\partial t}(u_{tt} - u_{xx}) = 0$.
Vidare gäller att $v(0,x) = u(0,x) = \phi(x)$. Dessutom är $v_t(0,x) = u_{tt}(0,x) = u_{xx}(0,x)$.
Men $u(0,x) = 0 \Rightarrow v_t(0,x) \overset{(6')}{=} 0$!

Kombinera dessa insiktsiakter. Det ger att

$$\boxed{u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t}\int_{|\xi-x|=t}\phi_0(\xi)\,d\sigma\right) + \frac{1}{4\pi t}\int_{|\xi-x|=t}\phi_1(\xi)\,d\sigma}$$

löser ursprungsproblemet med data ϕ_0 och ϕ_1. Detta kallas <u>Poissons formel</u>.

<u>Anm.</u> I detta fall kan vi inte sluta oss till att lösningen är entydig, då vi inte visat att samtliga lösningar har formen

$$\frac{1}{4\pi t}\int_{|\xi-x|=t}\phi\,d\sigma \,.$$

Vi kommer dock se att lösningen trots allt är entydig. Från formeln ser vi att lösningen beror kontinuerligt på data.

<u>Anm.</u> Huygens princip: Givet en punkt (t,x) är domain of dependence en yta av en boll med radie t. Vågorna går exakt med hastigheten C. Alltså ljus och ljud kan plötsligt höras för att sedan plötsligt dö ut. Detta är Huygens princip och gäller inte i två dimensioner!

15/12-2014
Måndag LV7

VÅGEKVATIONEN, FORTS.

Senast härledde vi Poissons (Kirchoffs) formel.

$$u(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t}\int_{|\xi-x|=t}\phi_0(\xi)\,d\sigma\right)+\frac{1}{4\pi t}\int_{|\xi-x|=t}\phi_1(\xi)\,d\sigma \quad (1)$$

som löser det tredimensionella problemet

$$\begin{cases} u_{tt}=\Delta u(x,y,z)=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz} \\ u(0,x,y,z)=\phi_0(x,y,z) \\ u_t(0,x,y,z)=\phi_1(x,y,z) \end{cases}$$

Vi vill nu hitta motsvarande formel för problemet i två rumsdimensioner;

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+u_{yy} \\ u(0,x,y)=\phi_0(x,y) \\ u_t(0,x,y)=\phi_1(x,y) \end{cases} \quad (*)$$

För att göra detta använder vi "Hadamards method of descent". Från (1) ser vi att om ϕ_0 och ϕ_1 är oberoende av z så ger denna formel en lösning till (*). Vi ska alltså förenkla (1) i detta fall. Låt $z=0$, då integralerna i (1) är oberoende av z. Låt $\xi=(\xi,\eta,\zeta)$. Den övre halvsfären av sfären $|\xi-x|=t$ ges då av

$$\zeta=\sqrt{t^2-(\xi-x)^2+(\eta-y)^2} \quad (**)$$

Ytmåttet $d\sigma$ ges för denna parametrisering av

$$d\sigma=\sqrt{1+(\zeta'_\xi)^2+(\zeta'_\eta)^2}\,d\xi\,d\eta. \quad \left(\text{motsvaras av } dS=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy=|r'_u\times r'_v|\,du\,dv\right)$$

Vi har att

$$(\zeta'_\xi)^2=\frac{(\xi-x)^2}{\zeta^2}, \quad (\zeta'_\eta)^2=\frac{(\eta-y)^2}{\zeta^2}$$

$$\Rightarrow 1+(\zeta'_\xi)^2+(\zeta'_\eta)^2=\frac{\zeta^2+(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{\zeta^2}\overset{(**)}{=}\frac{t^2}{\zeta^2}$$

Detta ger $d\sigma$ som

$$d\sigma=\frac{t\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{\zeta^2+(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}$$

Vi har alltså att

$$\int_{|\xi-x|=t}\phi(\xi)\,d\sigma=2t\int_{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}\le t}\frac{\phi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}$$

övre-nedre halvsfären

Om vi nu låter $\xi\in\mathbb{R}^2$, $\xi=(\xi,\eta)$ och $x\in\mathbb{R}^2$, $x=(x,y)$ har vi lösningen till (*) genom formeln

$$\boxed{u(t,x)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{|\xi-x|\le t}\frac{\phi_0(\xi)}{\sqrt{t^2-|\xi-x|^2}}\,d\xi\right)+\frac{1}{2\pi}\int_{|\xi-x|\le t}\frac{\phi_1(\xi)}{\sqrt{t^2-|\xi-t|^2}}\,d\xi}$$

I $\mathbb{R}^3$-fallet hade vi likhet här!

15/12-2014

VÅGEKVATIONEN I 2D

Formlerna i $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ är fundamentalt olika vad det gäller hur signaler transporteras. Lättast för att förstå detta är att betrakta fallet $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$, dvs. då lösningen ges av d'Alemberts formel

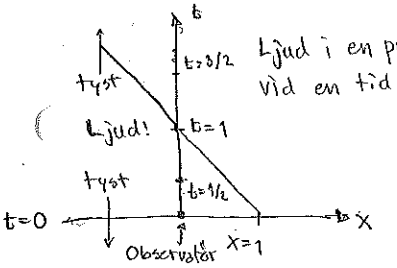
$$u(t,x) = \underbrace{\frac{1}{2}\big(\phi_0(x-t)+\phi_0(x+t)\big)}_{\text{I 3D är termerna "}\phi_0\text{" och "}\phi_1\text{" av denna natur!}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\phi_1(\tilde{x})\,d\tilde{x}}_{\text{I 2D ---}}$$

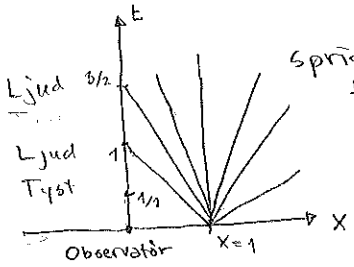
För att förstå skillnaden mellan 2 och 3 rumsdimensioner kan vi betrakta fallet i en rumsdimension i de båda fallen

$$(2)\begin{cases}\phi_0 \neq 0\\ \phi_1 = 0\end{cases} \qquad (2')\begin{cases}\phi_0 = 0\\ \phi_1 \neq 0\end{cases}$$

Motsv. 3D — Motsv. 2D

(2): antag att $\phi_0 = \delta(x-1), \phi_1 = 0$ (2'): Antag att $\phi_1 = \delta(x-1)$, $\phi_0 = 0$





sprids åt alla håll, ljud överallt för $t > x$.

Vi hoppar över entydighetsbeviset men konstaterar att det gäller. Vågekvationens lösningar är entydiga!

ICKE-HOMOGENA FALLET

Betrakta problemet

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+\underbrace{f(x,y,z)}_{\text{Källterm}} \\ u(0,x,y,z)=0 \\ u_t(0,x,y,z)=0 \end{cases} \qquad \text{(IH)}$$

Anm. Har vi både en källterm och begynnelsedata $\phi_0, \phi_1 \neq 0$ så kan vi betrakta de båda delproblemen

$$\begin{cases} f \neq 0 \\ \phi_0 = \phi_1 = 0 \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} f = 0 \\ \phi_0, \phi_1 \neq 0 \end{cases}$$

samt sedan addera lösningarna.

För att lösa (IH) betraktar vi problemet

$$(PV)\begin{cases} v_{tt} = v_{xx}+v_{yy}+v_{zz}, \quad v\in\mathbb{R}^3,\ t>\tau & \text{(PV1)} \\ v(\tau,x,y,z)=0 & \text{(PV2)} \\ v_t(\tau,x,y,z) = f(\tau,x,y,z) & \text{(PV3)} \end{cases}$$

Här är τ en parameter, dvs. funktionen v kan skrivas $v(t,x,y,z;\tau)$ obs!

15/12-2014

INHOMOGENA VÅGEKVATIONEN

Från Poissons formel får vi en lösning till (PV) genom att translatera tiden ($t \to t-\tau$), vilket ger

$$v(t,x,y,z;\tau) = \frac{t-\tau}{4\pi}\int_{|\xi|=1} f(\tau, x+\xi(t-\tau))\,d\sigma .$$

Påstående: Låt $u(t,x,y,z)$ definieras av

$$u(t,x,y,z) := \int_0^t v(t,x,y,z;\tau)\,d\tau .$$

Då är u en lösning till (IH).

BEVIS Vi har $\Delta u = \int_0^t \Delta v(t,x,y,z;\tau)\,d\tau$.

Vidare har vi

$$u_t = \underbrace{v(t,x,y,z;t)}_{=0 \text{ enl. PV2}} + \int_0^t v_t(t,x,y,z;\tau)\,d\tau = \int_0^t v_t(t,x,y,z;\tau)\,d\tau .$$

$$u_{tt} = \underbrace{v_t(t,x,y,z;t)}_{=f \text{ enl. PV3}} + \int_0^t v_{tt}(t,x,y,z;\tau\,d\tau = f(t,x,y,z) + \int_0^t v_{tt}(t,x,y,z;\tau)\,d\tau$$

Dessa kalkyler medför att

$$\Delta u = \int_0^t \Delta v(t,x,y,z;\tau)\,d\tau = \int_0^t v_{tt}(t,x,y,z;\tau)\,d\tau = u_{tt} - f(t,x,y,z),$$

dvs. $\underline{u_{tt} = \Delta u + f}$.

Sätter vi in v i formeln får vi

$$u(t,x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\int_0^t (t-\tau)\int_{|\xi|=1} f(\tau, x+\xi(t-\tau))\,d\sigma\,d\tau = \begin{bmatrix} r=t-\tau \\ \vdots \end{bmatrix} = \frac{1}{4\pi}\int_0^t r\int_{|\xi|=1} f(t-r, x+\xi r)\,d\sigma\,dr =$$

$$\begin{bmatrix} \xi' = x+\xi r \\ r = |\xi'-r| \\ t, |\xi|=1 \end{bmatrix} \underset{\xi'\to\xi}{=} \frac{1}{4\pi}\int_{|\xi-x|\le t} \frac{f(t-|\xi-x|, \xi)}{|\xi-x|}\,d\xi$$

Högerledet här kallas för den <u>retarderade potentialen</u>. För motsvarande formler i $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ se ekv. (2.37) och (2.38) i Colton.

EXEMPELRÄKNING

2.1 Eventuell tentauppgift!

2.2 Finn lösningen till

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t \ge 0,\ -\infty < x < \infty & (1) \\ u(x,x) = \phi(x),\ -\infty < x < \infty & (2) \\ u_x(x,-x) - u_t(x,\underset{\substack{\uparrow \\ \text{obs! } t\text{-variabeln}}}{-x}) = \psi(x),\ -\infty < x < \infty & (3) \end{cases}$$

LÖSNING En dimension, allmän lösning enligt d'Alembert är

$$u(t,x) = F(x-t) + G(x+t).$$

15/12-2014

EXEMPELRÄKNING

Enligt (2) har vi

$$u(x,x) = F(0) + G(2x) = \phi(x) \; ; \qquad (4)$$

och enligt (3) har vi

$$u_x(x,-x) = F'(2x) + G'(0) + F'(2x) - G'(0) = 2F'(2x) = \psi(x) \qquad (5)$$

Vi kan skriva om (5) som

$$2F'(x) = \psi\left(\frac{x}{2}\right) \implies \underline{F(x)} - F(0) = \frac{1}{2}\int_0^x \psi\left(\frac{\tilde{x}}{2}\right) d\tilde{x}$$

Liknande omskrivning av (4) ger

$$\underline{G(x)} = \phi\left(\frac{x}{2}\right) - F(0)$$

Sätt in $F(x)$ och $G(x)$ i lösningsformeln!

$$\implies u(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^{x+t} \psi\left(\frac{\tilde{x}}{2}\right) d\tilde{x} + \cancel{F(0)} + \phi\left(\frac{x+t}{2}\right) - \cancel{F(0)} .$$

2.3 Visa att
$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt} & \\ u(x,x) = \phi(x) & (2) \\ u_x(x,x) + u_t(x,x) = \psi(x) & (3) \end{cases}$$
inte är välställt i allmänhet. Ge villkor på ϕ och ψ då det faktiskt är välställt.

LÖSNING Vi har att $u(t,x) = F(x-t) + G(x+t)$. Från (2) fås att

$$u(x,x) = F(0) + G(2x) = \phi(x), \qquad (4)$$

och från (3) fås

$$F'(0) + G'(2x) - F'(0) + G'(2x) = 2G'(2x) = \psi(x) \qquad (5)$$

Dessa två uttryck ger

$(4) \implies 2G'(2x) = \phi'(x)$,

men (5) säger att $2G'(2x) = \psi(x)$! Problemet är ej välställt om inte $\underline{\phi'(x) = \psi(x)}$!

2.7 Visa att den allmänna lösningen till $u_{xx} - yu_{yy} - \frac{1}{2}u_y = 0$ $(y>0)$ har formen

$$u(x,y) = f_1(x + 2\sqrt{y}) + f_2(x - 2\sqrt{y}).$$

LÖSNING Om vi låter $t = 2\sqrt{y}$ blir ekvationen ovan $u_{tt} = u_{xx}$, och vi vet att lösningen då har den givna formen!

2.10 Betrakta $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$, $u_t(t,x,y) = 0$ på ∂D i $(x,y) \in D$, $t \geq 0$. Visa att

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint_D u_t^2 + u_x^2 + u_y^2 \, dx\,dy = 0.$$

LÖSNING Vi har $\frac{\partial}{\partial t}(u_t^2 + u_x^2 + u_y^2) = 2u_t u_{tt} + 2u_x u_{xt} + 2u_y u_{yt} = 2u_t\overbrace{(u_{tt} - u_{xx} - u_{yy})}^{=0\,!} + 2u_t u_{xx} + 2u_t u_{yy} +$

$$+ 2u_x u_{xx} + 2u_y u_{yt} = 2\nabla\cdot(u_x u_t, u_y u_t)$$

$$\implies \frac{\partial}{\partial t}\int_D u_t^2 + u_x^2 + u_y^2 \, dx\,dy = \int_D \nabla\cdot(u_x u_t, u_y u_t)\, dx\,dy = [\text{Gauss}] = \int_{\partial D} (u_x u_t, u_y u_t)\cdot n \, ds = 0$$

$u_t = 0$ på ∂D

2.12 "Bra uppgift!"

17/12-2014
Onsdag LV7

DISTRIBUTIONSTEORI

Började utvecklas under 1930-talet av bl.a. Sobler under hans studier av elliptiska pde. L. Schwartz utvecklade dessa idéer till en fullständig teori under 1940-talet.

Två viktiga metoder inom analys är derivering och Fouriertransform. Alla funktioner är dock inte deriverbara eller transformerbara. Syftet med distributionsteori är att lösa detta genom att bädda in funktionerna i en större klass av objekt, de så kallade distributionerna.

Om $f \in L^1_{Lok}$ (lokalt integrerbar funktion) identifieras den med avbildningen

$$\phi \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f\phi \, dx,$$

där ϕ tillhör ett rum av "snälla" funktioner, t.ex. C_0^∞ = rummet av glatta funktioner med kompakt stöd (dvs. $f=0$ utanför kompakt mängd). Den grundläggande idén är nu att inte uppfatta en funktion som punktvis definierad, utan som ett slags medelvärde.

För att detta ska vara meningsfullt måste vi se att det finns fler funktioner än $\phi \equiv 0$ i klassen C_0^∞.

PROP: $\boxed{\text{Det finns icke-triviala funktioner } \phi \text{ i } C_0^\infty.}$

BEVIS: Låt $f(x)$ ges av

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ e^{-1/x}, & x>0 \end{cases}, \quad f \text{ är en } C^\infty\text{-funktion.}$$

Vi har då att $f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-1/x} \xrightarrow{x \to 0} 0$, analogt för högre derivator. Låt nu $\phi(x) = f(x-a) \cdot f(b-x)$, då är ϕ i klassen C^∞ och dessutom är $\phi = 0$ utanför intervallet $[a,b]$, V.S.B.

För att kunna introducera distributioner behöver vi konvergensbegreppet för testfunktioner.

DEF: Om ϕ och ϕ_j tillhör C_0^∞ så innebär $\phi_j \longrightarrow \phi$ att ϕ och ϕ_j är noll utanför samma begränsade intervall I och att $\phi_j \longrightarrow \phi$ samt $\phi_j^{(m)} \longrightarrow \phi^{(m)}$ likformigt på I.

Anm: Likformig konvergens betyder att $\|\phi_j - \phi\|_\infty = 0$ då $j \to \infty$, där $\|\phi\|_\infty := \sup_{x \in I}\{\phi(x)\}$

DEF:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{En distribution } u \text{ är en linjär avbildning} \\ \phi \longmapsto u[\phi] \text{ av } C_0^\infty \text{ på } \mathbb{R} \ (u: C_0^\infty \to \mathbb{R}) \\ \text{som är kontinuerlig i den meningen att} \\ \phi_j \longmapsto \phi \text{ medför att } u[\phi_j] \longrightarrow u[\phi]\end{array}}$$

"Distributioner gör tal av testfunktioner"

17/12-2014

DISTRIBUTIONSTEORI

Ex1 Om u är en vanlig funktion ges distributionen av $u[\phi] = \int_{\mathbb{R}} u\phi \, dx$.

Ex2 I specialfallet då funktionen är $H = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$, dvs. Heavisidefunktionen, ges distributionen av

$$u[\phi] = \int_{0 \leftarrow \text{ej } -\infty!}^{\infty} \phi \, dx$$

Ex3: Låt u vara sådant att $u[\phi] = \phi(0)$, dvs $u = \delta(x)$, eller mer allmänt $u[\phi] = \phi(a)$ ger $u = \delta_a$.

Fler exempel se kompendium!

DEF: $\boxed{\text{Om } u \text{ är en distribution så är dess } \underline{\text{derivata}} \ u' \text{ den distribution som ges av } u'[\phi] = -u[\phi'] \ \forall \phi \in C_0^\infty.}$

Vi ska se att vi med distributioner kan derivera t.ex. Heavisidefunktionen och Diracdeltat, vilket inte går i klassisk mening. Heavisidedistributionen ges av

$$H[\phi] = \int_0^\infty 1 \cdot \phi(x) \, dx.$$

Från definitionen av H' fås att

$$H'[\phi] = -H[\phi'] = -\int_0^\infty \phi'(x) \, dx = -\left[\phi(x)\right]_{x=0}^{\infty} = -\left(\overset{0}{\phi(\infty)} - \phi(0)\right) = -(0 - \phi(0)) = \phi(0) = \delta$$

Alltså är $H' = \delta(x)$! Vidare kan vi derivera igen, vilket ger

$$H''[\phi] = -H'[\phi'] \overset{=H'}{=} -\delta[\phi'] = -\phi'(0),$$

vilket inte är något annat än δ', ty

$$\delta'[\phi] = -\delta[\phi'] = -\phi'(0).$$

Alltså är $H'' = \delta'$!

MULTIPLIKATION

DEF: $\boxed{\text{Om } u \text{ är en distribution och } f \in C^\infty \text{ så är produkten } fu \text{ distributionen } (fu)[\phi] = u[f\phi] \quad (f\phi \in C_0^\infty)}$

Ex Låt $u = \delta_a$. Vi tar fram distributionen $f\delta_a$ där $f \in C^\infty$. Vi har

$$(f\delta_a)[\phi] = \delta_a[f\phi] = f(a)\phi(a) = f(a)\delta_a[\phi]$$

Ex Mindre uppenbart; vad är $x\delta'$?

$$(x\delta')[\phi] = \delta'[x\phi] = -\delta[(x\phi)'] = -((x\phi)')\big|_{x=0} = -(\phi + x\phi')\big|_{x=0} = -\phi(0)$$

Alltså är $\boxed{x\delta' = -\delta}$

I högre dimensioner ($\mathbb{R}^n$) är begreppen analoga och inga nya idéer krävs.

17/12-2014

DISTRIBUTIONSTEORI

FALTNING

Från Fourieranalysen har vi att faltningen av två funktioner u och ψ är

$$(u*\psi) = \int_{\mathbb{R}} u(y)\psi(x-y)\,dy.$$

DEF: Om u är en distribution och ψ en testfunktion så är faltningen $(u*\psi)$ den funktion vars värde i punkten x är

$$u[\psi(x-\cdot)] \quad (= u_y[\psi(x-y)])$$

dvs. u verkar på ψ som funktion av y.

Ex $(\delta_a*\psi)(x) = \delta_a[\psi(x-\cdot)] = \psi(x-a)$.

Speciellt har vi då $a=0$, dvs. $\delta_a=\delta$ att

$$(\delta*\psi)(x) = \psi(x).$$

Ex $(\delta'*\psi)(x) = \delta'[\psi(x-\cdot)] = -\delta[(\psi(x-\cdot))'] = -\frac{\partial}{\partial y}(\psi(x-y))\Big|_{y=0} = \psi'(x)$.

Allmänt har vi att $\frac{\partial}{\partial x}(u*\psi) = \frac{\partial u}{\partial x}*\psi$. Detta innebär att om P är en differentialoperator, t.ex. $P=\Delta$, och om vi har problemet

$$Pu = f \qquad (*)$$

gäller att vi kan finna den så kallade fundamentallösningen E som löser

$$PE = \delta. \qquad (**)$$

Då gäller att $E*f$ löser $(*)$, ty

$$P(E*f) = (PE)*f = \delta*f = f.$$

I fallet med Laplaceoperatorn, dvs. då

$$P = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2},$$

så är

$$E = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\log|x|, & \text{då } n=2 \\ -\frac{1}{\omega_n(n-2)|x|^{n-2}}, & \text{då } n\geq 3 \end{cases}.$$

Alltså gäller $\underbrace{\Delta E}_{=\delta}[\phi] = \phi(0)$

DISTRIBUTIONER & FOURIERTRANSFORMER

Om $u\in L^1$ så är dess Fouriertransform $\hat{u}$ en begränsad funktion given av

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x)e^{-i\xi x}\,dx.$$

Verkan av $\hat{u}$ på en testfunktion ϕ är

$$\hat{u}[\phi] = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi)\phi(\xi)\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} u(x)e^{-i\xi x}\,dx\right)\phi(\xi)\,d\xi = -\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\xi)e^{-i\xi x}\,d\xi\right)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\hat{\phi}(x)\,dx, \quad \text{dvs. } \hat{u}[\phi] = u[\hat{\phi}] \quad (1).$$

Vi bör definiera Fouriertransformen av u genom (1), även då u är en distribution.

DISTRIBUTIONSTEORI

Ett problem med detta är dock att även om ϕ är en testfunktion, dvs. $\phi \in C_0^\infty$, behöver inte $\hat{\phi}$ tillhöra denna klass! För att lösa detta vidhåller man att (1) är en bra definition, men man introducerar istället en ny klass av testfunktioner vilken kallas Schwartz-klassen, och betecknas med S. Om $\phi \in S$ innebär det att

$$|x|^k \phi^{(m)}(x) \longrightarrow 0 \quad \text{då} \quad |x| \longrightarrow \infty \quad \forall k, m.$$

Dessa funktioner behöver inte vara 0 utanför en kompakt mängd. Det fina är att om $\phi \in S$ är även $\hat{\phi} \in S$. (1) är alltså väldefinierat för klassen S.

DEF: Samma definition som för distributioner men med C_0^∞ utbytt mot S ger de så kallade tempererade distributionerna.