

Tentamen för MVE670 – Linjär algebra F/TM

25/10 – 2025, 14.00–18.00

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel

Examinator: Malin Palö Forsström

Telefonvakt: Malin Palö Forsström 0768 30 36 35

Betygsgränser: 3: 20-29 p, 4: 30-39, 5: ≥ 40 (inklusive bonuspoäng)

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. Motivera och förklara så väl du kan. Poäng ges bara för lösningar som går att följa. Endast svar ger inga poäng.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

1. Hitta en matris A sådan att $(1, 1, 1, 0), (1, 2, 3, 4) \in \text{Noll}(A)$. (4 poäng)
2. En stråle skickas ut från från origo i riktningen $(1, 2, 3)$. Passerar strålen genom triangeln med hörn i $(1, 1, 2)$, $(2, 3, 3)$ och $(-2, 6, -1)$? (6 poäng)
3. Lös den homogena differentialekvationen $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0$ genom att använda diagonalisering för att lösa $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, där $\mathbf{x}(t) = (y'(t), y(t))$, om $y(0)$ och $y'(0)$ är givna. (8 poäng)
4. Låt F vara mängden av alla kontinuerliga funktioner $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ och låt P_n vara underrummet till P bestående av alla polynom av grad högst n .
 - (a) Visa att $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$ är en innerprodukt på P .
 - (b) Hitta en ortogonalbas för P_2
 - (c) Hitta ortogonalprojektionerna av $f(x) = \sin \pi x$ på P_2 . (8 poäng)
5. Ekvationen $z^3 + iz - (1 + i) = 0$ har en lösning $z = 1$. Hitta alla lösningar till ekvationen. (4 poäng)

6. Visa om följande påståenden är sanna eller falska. Om påståendet är sant, motivera varför med ett kort argument. Om påståendet är falskt räcker det med ett motexempel. (8 poäng)
- (a) Alla kvadratiske matriser har minst ett (reellt) egenvärde.
 - (b) Om A är en ortogonalmatrix av typ $m \times m$ och $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ så är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ densamma som vinkeln mellan $A\mathbf{u}$ och $A\mathbf{v}$.
 - (c) Om A och B är två symmetriska matriser av samma typ så är $AB = BA$.
 - (d) Om π är ett plan genom origo i $\mathbb{R}^3$ och A är avbildningsmatrisen för ortogonalprojektion på π så är A symmetrisk.
7. Visa att matrismultiplikation är associativ, dvs. visa att om A är av typ $m \times n$, B är av typ $n \times p$ och C är av typ $p \times r$ så är $(AB)C = A(BC)$. (6 poäng)
8. Visa att om $\hat{\mathbf{x}}$ är en lösning till ekvationen $A^T A \hat{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b}$ så är

$$|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}| \leq \min_{\mathbf{x}} |A\mathbf{x} - \mathbf{b}|.$$

(6 poäng)

Lycka till!
/Malin

Lösningar till tentamen för MVE670 – Linjär algebra F/TM

25/10 – 2025, 14.00–18.00

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel

Examinator: Malin Palö Forsström

Telefonvakt: Malin Palö Forsström 0768 30 36 35

Betygsgränser: 3: 20-29 p, 4: 30-39, 5: 40-50.

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringslista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. Motivera och förklara så väl du kan. Poäng ges bara för lösningar som går att följa. Endast svar ger inga poäng.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfälle

1. Hitta en matris A sådan att $(1, 1, 1, 0), (1, 2, 3, 4) \in \text{Noll}(A)$. (4 poäng)

Den enklaste lösningen till uppgiften är att låta A vara en nollmatris av rätt dimension, exempelvis $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Alternativt kan vi hitta en matris med nollrum $\text{Span}((1, 1, 1, 0), (1, 2, 3, 4))$: Efter-som att

$$\begin{aligned}\text{Span}((1, 1, 1, 0), (1, 2, 3, 4)) &= \text{Span}((1, 1, 1, 0), (-2, -1, 0, 4)) \\ &= \text{Span}((1, 1, 1, 0), (-1/2, -1/4, 0, 1)) \\ &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) = s(1, 1, 1, 0) + t(-1/2, -1/4, 0, 1), s, t \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

är en sådan matris

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

2. En stråle skickas ut från från origo i riktningen $(1, 2, 3)$. Passerar strålen genom triangeln med hörn i $(1, 1, 2)$, $(2, 3, 3)$ och $(-2, 6, -1)$?

(6 poäng)

Låt $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$, $P = (1, 1, 2)$, $Q = (2, 3, 3)$ och $R = (-2, 6, -1)$. Då passerar strålen genom triangeln om det finns s, t, r så att $t, r \geq 0$ och $t + r \leq 1/2$ så att

$$s\mathbf{v} = OP + tPQ + rPR.$$

Vi löser den ekvivalenta ekvationen

$$s\mathbf{v} - tPQ - rPR = OP.$$

Vi har

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -5 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & -1 \\ 0 & 2 & -6 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1/2 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/11 \\ 0 & 1 & 0 & -5/22 \end{pmatrix}$$

Detta ger $t = 1/11$ och $r = -5/22$, och strålen passerar alltså inte genom triangeln.

En alternativ lösning är att leta efter b, c, d sådana att $a\mathbf{v} = aOP + bOQ + cOR$ där vi dessutom har $a + b + c = 1$ och $a, b, c \geq 0$.

3. Lös den homogena differentialekvationen $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0$ genom att använda diagonalisering för att lösa $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, där $\mathbf{x}(t) = (y'(t), y(t))$, om $y(0)$ och $y'(0)$ är givna. (8 poäng)

Vi ska lösa differentialekvationen

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$$

För att göra detta hittar vi egenvärden och egenvektorer till A :

$$0 = -\lambda(-\lambda - 3) - 1(-2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

Motsvarande egenvektorer ges av $(1, -1)$ och $(1, -2)$. Lösningen ges därför av

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} & 0 \\ 0 & c_2 e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \mathbf{x}(0) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-2t} \\ -e^{-t} & -2e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(0) \\ &= \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix} \mathbf{x}(0) \end{aligned}$$

och vi får därför

$$y(t) = (2e^{-t} - e^{-2t})y(0) + (e^{-t} - e^{-2t})y'(0).$$

4. Låt F vara mängden av alla kontinuerliga funktioner från $p: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ och låt P_n vara underrummet till F bestående av alla polynom av grad högst n . (8 poäng)

- (a) Visa att $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$ är en innerprodukt på F .
(b) Hitta en ortogonalbas för P_2

(c) Hitta ortogonalprojektionen av $f(x) = \sin \pi x$ på P_2 .

(a) Vi behöver visa att $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$, $\langle f, f \rangle \geq 0$ med likhet bara om $f = 0$, och att $\langle af_1 + bf_2, g \rangle = a\langle f_1, g \rangle + b\langle f_2, g \rangle$. Med detta följer omedelbart av motsvarande egenskaper för integralen.

(b) Vi har

$$p_1(x) = 1,$$

$$p_2(x) = x - \langle x, p_1(x) \rangle / \langle p_1(x), p_1(x) \rangle p_1(x) = x$$

och

$$\begin{aligned} p_2(x) &= x^2 - \langle x^2, p_1(x) \rangle / \langle p_1(x), p_1(x) \rangle p_1(x) - \langle x^2, p_2(x) \rangle / \langle p_2(x), p_2(x) \rangle p_2(x) \\ &= (3x^2 - 1)/3 \end{aligned}$$

Om vi normaliserar dessa får vi ortonormalbasen

$$q_1(x) = 1/2, \quad q_2(x) = x/\sqrt{2/3}, \quad q_3(x) = (3x^2 - 1)/\sqrt{8/5}$$

(c) Projektionen ges av

$$\begin{aligned} &\langle \sin x, p_1(x) \rangle p_1(x) + \langle \sin x, p_2(x) \rangle p_2(x) + \langle \sin x, p_3(x) \rangle p_3(x) \\ &= \langle \sin \pi x, 1 \rangle 1 + \langle \sin \pi x, x/\sqrt{2/3} \rangle x/\sqrt{2/3} + \langle \sin \pi x, (3x^2 - 1)\sqrt{8/5} \rangle (3x^2 - 1)/\sqrt{8/5} \\ &= \langle \sin \pi x, x \rangle / (2/3) \\ &= \int_{-1}^1 x \sin \pi x \, dx \cdot \frac{3x}{2} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{3x}{2} = \frac{3x}{\pi} \end{aligned}$$

5. Ekvationen $z^3 + iz - (1 + i) = 0$ har en lösning $z = 1$. Hitta alla lösningar till ekvationen. (4 poäng)

Polynomdivision ger

$$z^3 + iz - (1 + i) = (z - 1)(z^2 + z + 1 + i)$$

och det återstår därför att hitta lösningar till $z^2 + z + 1 + i = 0$. Kvadratkomplettering ger

$$z^2 + z + 1 + i = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{-3 - 4i}{4}$$

Vi letar nu efter $a, b \in \mathbb{R}$ med $(a + bi)^2 = -3 - 4i$. Märk först att vi inte kan ha $a = 0$. För $a \neq 0$ får vi

$$\begin{aligned} -3 - 4i &= (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2abi = -4i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ ab = -2 \end{cases} \\ &\stackrel{a \neq 0}{\Rightarrow} a^2 - (-2/a)^2 = -3 \Leftrightarrow a^4 + 3a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left(a^2 + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow a^2 = -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} \in \{-4, 1\} \end{aligned}$$

vilket eftersom att a är reellt ger att $a = \pm 1$. Detta ger de två lösningarna $a + bi = \pm(1 - 2i)$ vilka i sin tur ger

$$(z + \frac{1}{2})^2 - \frac{(1 - 2i)^2}{4} = (z + \frac{1}{2} - \frac{1 - 2i}{2})(z + \frac{1}{2} + \frac{1 - 2i}{2}) = (z + i)(z + 1 - i)$$

(båda lösningarna ger samma faktorisering). Alla lösningar ges därför av $z_1 = 1$, $z_2 = -i$ och $z_3 = -1 + i$

6. Visa om följande påståenden är sanna eller falska. (8 poäng)

(a) Alla kvadratiska matriser har minst ett (reellt) egenvärde.

Falskt, matrisen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ har inga reella egenvärden.

(b) Om A är en ortogonalmatrix av typ $m \times m$ och $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ så är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ densamma som vinkeln mellan $A\mathbf{u}$ och $A\mathbf{v}$.

Sant, ty

$$A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} = (A\mathbf{u})^T A\mathbf{v} = \mathbf{u}^T A^T A\mathbf{v} = \mathbf{u}^T I\mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

(c) Om A och B är två symmetriska matriser av samma typ så är $AB = BA$.

Falskt, om exempelvis $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ så är $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) Om π är ett plan genom origo och A är avbildningsmatrisen för ortogonalprojektion på π så är A symmetrisk.

Sant. A går att skriva som PDP^T där D är en diagonalmatrix och P är en ortogonalmatrix med två kolonner som är riktningsvektorer till planet. Därför är

$$A^T = (PDP^T)^T = (P^T)^T D^T P^T = PDP^T = A$$

dvs. A är symmetrisk.

7. Visa att matrismultiplikation är associativ, dvs. att om A är av typ $m \times n$, B är av typ $n \times p$ och C är av typ $p \times r$ så är $(AB)C = A(BC)$. (6 poäng)

8. Visa att lösningen $\hat{\mathbf{x}}$ till ekvationen $A^T A \hat{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b}$ är mindre än eller lika med $\min_{\mathbf{x}} |A\mathbf{x} - \mathbf{b}|$ (6 poäng)

Lycka till!
/Malin