

MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola

Tentamen

Hjälpmedel: Inga, inte ens miniräknare

Datum: 2025-08-25 kl. 14.00 - 18.00

Telefonvakt: Hossein Raufi

Telefon: 031 - 772 82 96

MVE670 Linjär algebra F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 3: 20-29 p, 4: 30-39, 5: 40-50.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Till samtliga beräkningsuppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng.** Motivera och förklara så väl du kan.

1. Polynomet (6 p)

$$p(z) = z^3 + (-2 + 3i)z^2 + (1 - 5i)z + 2 + 6i$$

har en rent imaginär rot. Beräkna alla rötter till $p(z)$.

Obs! Gissning av rötter ger noll poäng!

2. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Uteblivet svar ger 0 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0 .

- (a) Låt $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ vara tre vektorer i $\mathbb{R}^3$. Om $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ och $\mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{v}_3 = 0$ så är $\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_3 = 0$.
- (b) Om A och B är två kvadratiske matriser sådana att $A^2 = B^2$ så är antingen $A = B$ eller $A = -B$.
- (c) Om $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ är en isometri så är $\det(A) = 1$.
- (d) Om A och B är två kvadratiske matriser med samma egenvärden som båda är diagonaliserbara, så existerar en inverterbar matris P sådan att $A = PBP^{-1}$.
- (e) Ekvationen $(z - 1)^8 = 16$ har två reella nollställen.
- (f) Om $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ är egenvektorer till samma egenvärde så är $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ linjärt beroende.
- (g) Om A är en symmetrisk $n \times n$ -matris, så är $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ en skalärprodukt på $\mathbb{R}^n$.

3. Låt $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara en linjär avbildning med avbildningsmatris

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Visa att $\text{Noll}(A)$ är en rät linje genom origo och bestäm dess ekvation på standardform. (3 p)
- (b) Visa att värdemängden för f är ett plan genom origo och bestäm dess ekvation på affin form. (3 p)

Var god vänd!

4. Låt T och F vara två linjära avbildningar från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$ sådana att $F(\mathbf{u})$ är speglingen av $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ i planet $x - y + z = 0$ och $T(\mathbf{u})$ är speglingen av $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ i linjen $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{-2}$. Bestäm avbildningsmatrisen för $T \circ F$ i standardbasen. (6 p)
5. En ljusstråle genom punkten $(1, -2, 2)$ rör sig i riktningen $(0, 1, -1)$ och reflekteras i planet $x + 2y + 3z = 0$. I vilken punkt träffar ljusstrålen planet $x + y = 12$? (6 p)
6. I landet *Hittepå* bor människorna antingen i städer eller på landsbygden. Varje år flyttar 30% av landsbygdsborna in till städerna och 10% av stadsborna ut på landsbygden (vi antar att den totala folkmängden i Hittepå är konstant). Antag att 40% av befolkningen bor på landsbygden från början. Hur stor andel av befolkningen kommer att bo i städerna respektive på landsbygden efter lång tid? (6 p)
7. Låt A vara en 3×3 -matris med egenvärdena 0, 1 och -1.
- (a) Visa att $A^3 = A$. (2 p)
- (b) Visa att $\text{rang}(A) = 2$. (3 p)
8. (a) Definiera vad som menas med *vektorprodukten* (eller *kryssprodukten*) av två geometriska vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. (2 p)
- (b) Låt A vara en $m \times n$ -matris, där $m \geq n$. Visa att en lösning till normalekvationen
- $$A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$$
- minimerar $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$.

Lycka till!

/Hossein

MVEG70, Lmjär algebra F/TM

Lösningar omtenta 25/8-25

1. Antag $z = ai$, $a \in \mathbb{R}$ rot. Då

$$\begin{aligned} p(ai) &= (ai)^3 + (-2+3i)(ai)^2 + ai(1-5i) + 2+6i = \\ &= -a^3i - a^2(-2+3i) + ai + 5a + 2 + 6i = \\ &= -a^3i + 2a^2 - 3a^2i + ai + 5a + 2 + 6i = \\ &= 2a^2 + 5a + 2 + i(-a^3 - 3a^2 + a + 6) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a^2 + 5a + 2 = 0 & (*) \\ -a^3 - 3a^2 + a + 6 = 0 & (**) \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow a^2 + \frac{5}{2}a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - 1} = -\frac{5}{4} \pm \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow a_1 = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = -2$$

$$\begin{aligned} a_1 = -1/2 \text{ i } (**): & -(-\frac{1}{2})^3 - 3(-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2}) + 6 = \\ &= \frac{1}{8} - 3 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 6 = \frac{1}{8} - \frac{6}{8} - \frac{4}{8} + \frac{48}{8} \neq 0 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Falsk} \\ \text{rot!} \end{array}$$

$$a_2 = -2 \text{ i } (**): -(-2)^3 - 3(-2)^2 + (-2) + 6 = 8 - 12 - 2 + 6 = 0 \quad \text{ok!}$$

$\therefore z = -2i$ rot till $p(z) \Rightarrow z + 2i$ faktor i $p(z)$

$$\begin{aligned} z^3 + (-2+3i)z^2 + (1-5i)z + 2+6i &= p(z) = \\ &= (z+2i)(z^2 + \alpha z + \beta) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + 2iz^2 + 2i\alpha z + 2i\beta = \\ &= z^3 + (\alpha+2i)z^2 + (\beta+2i\alpha)z + 2i\beta \end{aligned}$$

Koeffizientenidentifikation ger:

$$\begin{cases} \alpha + 2i = -2 + 3i \Leftrightarrow \alpha = -2 + i \\ 2i\beta = 2 + 6i \Leftrightarrow \beta = 3 - i \end{cases}$$

$$\text{Test: } \beta + 2i\alpha = 3 - i + 2i(-2 + i) = 1 - 5i \quad \text{ok!}$$

$$\therefore p(z) = (z + 2i)(z^2 + (-2 + i)z + 3 - i)$$

$$z^2 + (-2 + i)z + 3 - i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^2 + 2\left(-1 + \frac{i}{2}\right)z + \left(-1 + \frac{i}{2}\right)^2 - \left(-1 + \frac{i}{2}\right)^2 + 3 - i = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z - 1 + \frac{i}{2}\right)^2 = 1 - i + \frac{-1}{4} - 3 + i = -\frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow z - 1 + \frac{i}{2} = \pm \frac{3}{2}i \Leftrightarrow z = 1 - \frac{i}{2} \pm \frac{3i}{2}$$

$$\therefore z_1 = -2i, \quad z_2 = 1 + i, \quad z_3 = 1 - 2i$$

2. (a) Låt $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 0, 0)$, $v_3 = (1, 1, 0)$. Då
 $v_1 \times v_2 = (0, 0, 0)$ & $v_2 \cdot v_3 = 0$ men $v_1 \cdot v_3 = 2 \neq 0$

$\therefore$ Falskt

(b) Låt $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Då

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B^2 \text{ men } A \neq \pm B$$

$\therefore$ Falskt

(c) $f(x) = A x$ Isometri $\Leftrightarrow A^T A = I \Rightarrow$

$$\Rightarrow \det(A^T A) = \det(I) \Leftrightarrow \det(A^T) \det(A) = 1$$

$$\Leftrightarrow \det(A)^2 = 1 \Leftrightarrow \det(A) = \pm 1$$

$\therefore$ Falskt

(d) $A = S D S^{-1}$, $B = \tilde{S} D \tilde{S}^{-1} \Leftrightarrow D = S^{-1} A S$, $D = \tilde{S}^{-1} B \tilde{S}$

$$\Leftrightarrow S^{-1} A S = \tilde{S}^{-1} B \tilde{S} \Leftrightarrow A = \underbrace{S \tilde{S}^{-1}}_P B \underbrace{\tilde{S} S^{-1}}_{P^{-1}} = P B P^{-1}$$

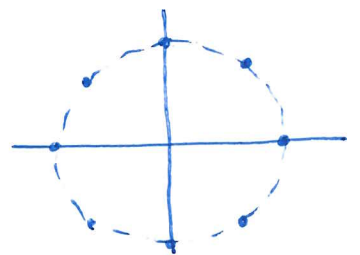
$\therefore$ Sant

(e) $w = z^{-1} \Rightarrow w^8 = 16$

$$w = r e^{i\theta} \text{ och } 16 = 16 e^{i \cdot 2\pi n} \text{ ger:}$$

$$w^8 = 16 \Leftrightarrow r^8 e^{i \cdot 8\theta} = 16 e^{i \cdot 2\pi n}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^8 = 16 \\ 8\theta = 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{4} \cdot n \end{cases}, n \in \mathbb{Z}$$



$$\therefore z = 1 + \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4} \cdot n}, \quad n = 0, 1, \dots, 7$$

$$\underline{n=0}: z = 1 + \sqrt{2} \in \mathbb{R}$$

$$\underline{n=4}: z = 1 + \sqrt{2} e^{i\pi} = 1 - \sqrt{2} \in \mathbb{R}$$

$\therefore$ Sant

(f) Låt $A = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Då $x_1 = e_1$ & $x_2 = e_2$
egenvektorer till samma egenvärde 1 och
 e_1, e_2 linjärt oberoende

$\therefore$ Falskt

(g) Låt $A = -I$. Då A symmetrisk men

$$\langle x, x \rangle = x^T A x = -x^T I x = -x^T x = -|x|^2 \leq 0$$

så ej positivt definit.

$\therefore$ Falskt

$$\begin{aligned}
3(a) \quad A\mathbf{x} = \mathbf{0} &\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \textcircled{-3} \textcircled{2} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \textcircled{-1/5} \\ \textcircled{1/8} \end{array} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \textcircled{-1} \textcircled{-3} \\ \leftarrow \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{x_3=t} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t, \quad t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{Noll}(A) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0} \} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t, t \in \mathbb{R} \right\}$$

dvs den räta linjen $L: (-1, -1, 1)t, t \in \mathbb{R}$
som går genom origo.

$$L: \begin{cases} x = -t \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = t \\ -y = t \\ z = t \end{cases}$$

Standardform: $-x = -y = z$

$$\begin{aligned}
(b) \quad V(f) &= \{ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3; \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ så att } f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \} = \\
&= \{ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3; \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ så att } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \} = \text{Kolonn}(A)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Vet från (a) att } \text{Kolonn}(A) &= \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} t; s, t \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

Klart att $\vec{0}$ plan och $\mathbf{0} \in V(f)$ (välj $s=t=0$)

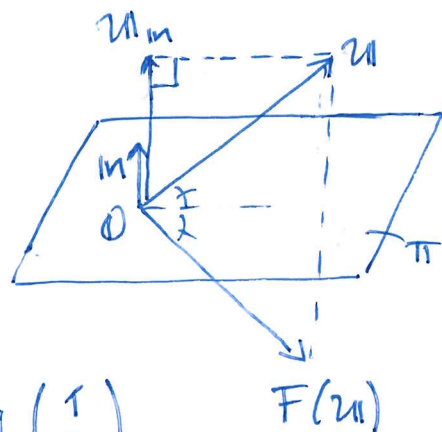
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ tillhör planet } \Rightarrow m // \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore V(f) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 14x - 8y - 5z = 0 \}$$

$$4. F(u) = u - 2u_m = u - 2 \frac{u \cdot m}{|m|^2} m$$

$$\pi: x - y + z = 0 \Rightarrow m = (1, -1, 1)$$

$$F(u) = Au \quad \text{d.w.} \quad A = (F(e_1) \ F(e_2) \ F(e_3))$$



$$F(e_1) = e_1 - 2 \frac{e_1 \cdot m}{3} m = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$F(e_2) = e_2 - 2 \frac{e_2 \cdot m}{3} m = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

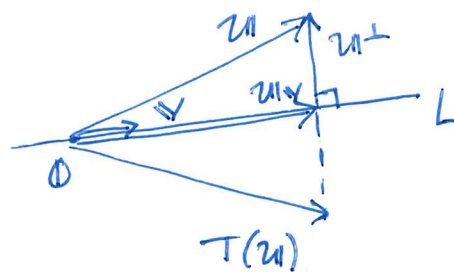
$$F(e_3) = e_3 - 2 \frac{e_3 \cdot m}{3} m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(u) = u - 2u_{\perp} =$$

$$= u - 2(u - u_{\parallel}) = 2u_{\parallel} - u =$$

$$= 2 \cdot \frac{u \cdot v}{|v|^2} v - u$$



$$x = \frac{y}{2} = \frac{z}{-2} \Rightarrow v = (1, 2, -2)$$

$$T(u) = Bu \quad \text{d.w.} \quad B = (T(e_1) \ T(e_2) \ T(e_3))$$

$$T(e_1) = 2 \cdot \frac{e_1 \cdot v}{9} v - e_1 = \frac{2}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$T(e_2) = 2 \cdot \frac{e_2 \cdot v}{9} v - e_2 = \frac{4}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$T(e_3) = 2 \cdot \frac{e_3 \cdot v}{9} v - e_3 = -\frac{4}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -7 & 4 & -4 \\ 4 & -1 & -8 \\ -4 & -8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T \circ F(u) = T(F(u)) = T(Au) = B(Au) = BAu$$

$$\therefore BA = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} -7 & 4 & -4 \\ 4 & -1 & -8 \\ -4 & -8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 9 & -18 & 18 \\ 18 & -9 & -18 \\ -18 & -18 & -9 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Sökt skärn-pkt. mellan L_2 och $\tilde{\pi}: x+y=12$:

$$1+s+1+9s=12 \Leftrightarrow 10s=10 \Leftrightarrow s=1$$

$$\therefore (1+1, 1+9, -1-4) = \underline{\underline{(2, 10, -5)}}$$

6. Låt $x_1^{(j)}$ = andel stadsbor år j
 $x_2^{(j)}$ = andel landsbygdsbor år j

Då vet vi att:

$$\begin{aligned} x_1^{(j+1)} &= 0.9x_1^{(j)} + 0.3x_2^{(j)} \\ x_2^{(j+1)} &= 0.1x_1^{(j)} + 0.7x_2^{(j)} \end{aligned}, \quad \begin{aligned} x_1^{(0)} &= 0.6 \\ x_2^{(0)} &= 0.4 \end{aligned} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(j+1)} \\ x_2^{(j+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.3 \\ 0.1 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(j)} \\ x_2^{(j)} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{x}^{(j+1)} \qquad A \qquad \mathbb{x}^{(j)}$

Då gäller: $\mathbb{x}^{(1)} = A\mathbb{x}^{(0)}, \mathbb{x}^{(2)} = A\mathbb{x}^{(1)} = A^2\mathbb{x}^{(0)}$
 $\dots \mathbb{x}^{(k)} = A^k\mathbb{x}^{(0)}$

Vi vill alltså beräkna $A^k\mathbb{x}^{(0)}$ då $k \rightarrow \infty$.

För detta behöver vi A 's egenvärden & egenvektorer

$$\det(\lambda I - A) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 0.9 & -0.3 \\ -0.1 & \lambda - 0.7 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 0.9)(\lambda - 0.7) - 0.03 = \lambda^2 - 1.6\lambda + 0.6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 0.8 \pm \sqrt{0.64 - 0.6} = 0.8 \pm 0.2 \Rightarrow \begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 0.6 \end{aligned}$$

$\lambda_1 = 1$: $(I - A)\mathbf{u} = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0.1 & -0.3 & 0 \\ -0.1 & 0.3 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} \textcircled{10} \textcircled{1} \\ \textcircled{10} \end{matrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow u_1 - 3u_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} t, \quad t \neq 0, \quad \text{låt } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\lambda_2 = 0.6} : (0.6I - A)\mathbb{V} = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -0.3 & -0.3 & 0 \\ -0.1 & -0.1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \textcircled{-10/3} \textcircled{-1} \\ \textcircled{-10} \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \stackrel{v_2=s}{=} \begin{pmatrix} -s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} s, s \neq 0, \text{ l t } \mathbb{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vill nu uttrycka $\mathbb{X}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}$ i termer av $\mathbb{V}_1$ & $\mathbb{V}_2$

dvs hitta $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ s.a. $c_1 \mathbb{V}_1 + c_2 \mathbb{V}_2 = \mathbb{X}^{(0)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0.4 \\ 3 & 1 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{-3} \\ \textcircled{\uparrow} \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0.4 \\ 0 & 4 & -0.6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{4} \\ \textcircled{\uparrow} \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1.6 \\ 0 & 4 & -0.6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{\uparrow} \\ \textcircled{1} \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -0.6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{1/4} \\ \textcircled{1/4} \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.25 \\ 0 & 1 & -0.15 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0.25 \\ c_2 = -0.15 \end{cases} \Rightarrow \mathbb{X}^{(0)} = 0.25 \mathbb{V}_1 - 0.15 \mathbb{V}_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{X}^{(k)} = A^k \mathbb{X}^{(0)} = A^k (0.25 \mathbb{V}_1 - 0.15 \mathbb{V}_2) =$$

$$= 0.25 A^k \mathbb{V}_1 - 0.15 A^k \mathbb{V}_2 = 0.25 \cdot 1^k \mathbb{V}_1 - 0.15 \cdot 0.6^k \mathbb{V}_2 =$$

$$= 0.25 \mathbb{V}_1 - 0.15 \cdot 0.6^k \mathbb{V}_2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.25 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ 75% stadsbor & 25% landsbygdsbor
efter lång tid.

7. (a) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$ tre olika egenvärden

$\Rightarrow A$ har tre linjärt oberoende egenvektorer

$\Rightarrow A$ är diagonaliserbar $\Rightarrow$

$$\Rightarrow A = PDP^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ för någon inv. bar matris } P$$

$$\Rightarrow A^3 = PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^3P^{-1} =$$

$$= P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^3 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1^3 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^3 \end{pmatrix} P^{-1} =$$

$$= P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = A \quad \square$$

(b) Låt v_1, v_2 & v_3 vara egenvektorer med motsvarande egenvärden $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ resp. $\lambda_3 = -1$

$$Av_2 = 1 \cdot v_2 \Rightarrow v_2 \in \text{Kolonn}(A)$$

$$Av_3 = -1 \cdot v_3 \Rightarrow v_3 = A(-v_3) \Rightarrow v_3 \in \text{Kolonn}(A)$$

$$\Rightarrow \text{rang}(A) \geq 2$$

$$Av_1 = 0v_1 = 0 \Rightarrow v_1 \in \text{Noll}(A)$$

$$\Rightarrow \text{nolldim}(A) \geq 1$$

$$\text{Vet att: } \text{nolldim}(A) + \text{rang}(A) = 3$$

$$\therefore \text{nolldim}(A) = 1 \text{ och } \text{rang}(A) = 2 \quad \square$$