MATEMATIK | **Hjälpmedel: Inga, inte ens miniräknare**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2025-01-07 kl. 14.00 - 18.00
Tentamen | Telefonvakt: Hossein Raufi
Telefon: 031 - 772 82 96

MVE670 Linjär algebra F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 3: 20-29 p, 4: 30-39, 5: 40-50.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Till samtliga beräkningsuppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng**. Motivera och förklara så väl du kan.

1. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & -5 \\ -2 & -4 & -1 & -7 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) Avgör om A har en vänsterinvers. (1 p)

(b) Avgör om A har en högerinvers. (1 p)

(c) Bestäm en bas för Noll(A) och Kolonn(A). (2 p)

(d) Konstruera en ON-bas för Kolonn(A). (2 p)

2. (a) Bestäm spegelbilden av punkten $P = (2, -5, 7)$ med avseende på linjen genom punkterna $(5, 4, 6)$ och $(-2, -17, -8)$. (4 p)

(b) Linjerna ℓ_1 och ℓ_2 ligger båda i planet $x+y+z = 3$. Linjen ℓ_1 ligger dessutom i planet $2x + y + 3z = 0$, medan ℓ_2 ligger i planet $2x + y = 0$. Linjerna skär varandra i en punkt. Bestäm denna skärningspunkt och bestäm även vinkeln mellan linjerna. (4 p)

3. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Uteblivet svar ger 0 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0.

(a) Om $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ är två linjärt beroende vektorer i $\mathbb{R}^n$, så gäller att $|\mathbf{u} - \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| - |\mathbf{v}|$.

(b) Låt A och B vara två inverterbara matriser. Om $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ så gäller att $AB = BA$.

(c) Om $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ är en ortogonalprojektion på ett plan genom origo, så är $\det(A) = 0$.

(d) Alla inverterbara matriser är diagonaliserbara.

(e) En reell 3×3-matris har alltid minst ett reellt egenvärde.

(f) Mängden av alla vektorer $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ med heltalselement är ett underrum av $\mathbb{R}^n$.

Var god vänd!

4. Vad är det största vertikala avståndet från någon av punkterna (6 p)

$$(-2,-1),\ (-1,-1),\ (0,1),\ (1,-2) \text{ och } (2,-2)$$

till den andragradskurva som är bäst anpassad till punkterna enligt minsta kvadratmetoden?

5. En linjär avbildning $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges av: (6 p)

$$F\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \qquad F\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} \qquad F\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}.$$

Visa att inversen F^{-1} existerar och ange dess avbildningsmatris.

6. Låt (6 p)

$$A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1 & 2\\ 3 & 3 & -4 & 5\\ 1 & -4 & 7 & -5\end{pmatrix}$$

Ange två 4×4-matriser B och C sådana att Noll(A) =Kolonn(B) och Kolonn(A) =Noll(C).

7. (a) Låt A och B vara två $n \times n$-matriser. Visa att spår(AB) = spår(BA). (2 p)

(b) Låt A vara en symmetrisk, och B en skewsymmetrisk (dvs $B^T = -B$) $n \times n$-matris. Visa att spår$(AB) = 0$. (2 p)

8. Låt A vara en $n \times n$-matris.

(a) Definiera vad som menas med *determinanten* av A. (1 p)

(b) Antag att A har egenvärdena $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Visa att:

(i) $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$ (3 p)

(ii) spår$(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$ (4 p)

Lycka till!

/Hossein

) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Rightarrow$

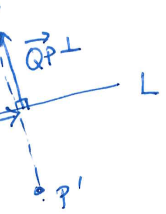
à

u

smetod :

.

)}



$3, 5)$

$-3)$

$/1, s \in \mathbb{R}$

$t \in \mathbb{R}$

ℓ_2

& Ψ_2

koeff.

te

nder

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

=

$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

)

)

ok!

$\Leftrightarrow$

$$\begin{matrix} /3 & 1/3 \\ 5/3 & 4/3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\Bigg)$$

$\Longrightarrow$

$s, t \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{c} \cancel{x}_2 \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \end{array} \Bigg\}$$

$| = 0$

$| = 0$ $\frac{1}{3}$

dar

nn(A).

A)

(*)

B)