MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Hjälpmedel: Inga, inte ens miniräknare
Datum: 2024-10-26 kl. 14.00 - 18.00
Telefonvakt: Hossein Raufi
Telefon: 031 - 772 82 96

MVE670 Linjär algebra F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 3: 20-29 p, 4: 30-39, 5: 40-50.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Till samtliga beräkningsuppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng**. Motivera och förklara så väl du kan.

1. (a) En raket sänds ut från origo. Den rör sig med konstant hastighet längs en rät linje i riktningen (2,1,1) och passerar så småningom planen $x+y+2z = 10$ och $2x+y-z = 9$. Vilken av dessa två plan når raketen först? Motivera! (3 p)

(b) Låt ℓ vara skärningslinjen mellan planen $x + y + z = 2$ och $x - 2y + 2z = 1$. Visa att ℓ är parallellt med planet $\pi : x + 4y = 8$ och bestäm det minsta avståndet mellan ℓ och π. (4 p)

2. Det komplexa polynomet (6 p)

$$p(z) = z^3 - 2z^2 + (3 - 2i)z - 4 - 2i$$

har minst en rent imaginär rot. Bestäm samtliga rötter till polynomet.

3. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Uteblivet svar ger 0 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0.

(a) Om $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ är vektorer i $\mathbb{R}^3$ sådana att $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ är parallell med $\mathbf{u} \times \mathbf{w}$ så är $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ parallella.

(b) Det finns en 4×7-matris A sådan att $\text{nolldim}(A) = \text{rang}(A)$.

(c) Det finns inga injektiva linjära avbildningar från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^2$.

(d) Låt A och C typ $n \times n$. Om C är ortogonal och A är symmetrisk så är även $C^{-1}AC$ symmetrisk.

(e) Ekvationen $z^9 = -1$ har fyra rötter med positiv realdel.

(f) Om A är diagonaliserbar, så är A ekvivalent med en diagonal matris.

(g) Om P är ett plan genom origo i $\mathbb{R}^3$ och $T(\mathbf{x})$ betecknar spegelbilden av vektorn $\mathbf{x}$ i P, så är standardmatrisen för avbildningen T diagonaliserbar.

Var god vänd!

4. Låt $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{k\to\infty} A^k$, $k \in \mathbb{N}$. (6 p)

5. (a) Bestäm för vilka värden på $x \in \mathbb{R}$ som $\det(A) = 0$, då $A = \begin{pmatrix} 1 & x & x & x \\ x & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ x & x & x & 1 \end{pmatrix}$. (3 p)

(b) Givet att B är en 3×3-matris med $\det(B) = 2$, beräkna (4 p)

$$\det\left(B^{-1} + 2\mathrm{adj}(B)\right).$$

6. Låt V beteckna vektorrummet av alla kvadratiska 2×2-matriser, och låt $M \subset V$ beteckna delmängden av alla kvadratiska 2×2-matriser A med $\text{spår}(A) = 0$.

(a) Visa att M är ett underrum av V. (2 p)

(b) Bestäm en bas för M. (4 p)

7. (a) Definiera vad som menas med *nollrummet* till en $m \times n$-matris A. (1 p)

(b) Låt A vara en $m \times n$-matris. Visa att (4 p)

$$\mathrm{Noll}(A^T A) = \mathrm{Noll}(A).$$

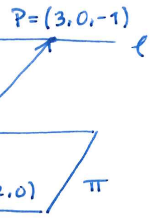
8. Låt A vara en $n \times n$-matris med egenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ och motsvarande egenvektorer $\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n$. Visa att om $\lambda_i \neq \lambda_j$ för alla $i \neq j$, så är $\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n$ linjärt oberoende. (6 p)

Lycka till!

/Hossein

3

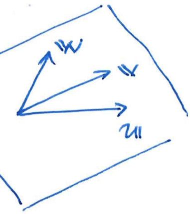
-1


P=(3,0,-1)
ℓ
π

$a_1 = 1$
$a_2 = -2$

$\Leftrightarrow$

$2+i$



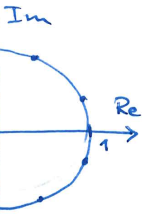
2x3

ber.

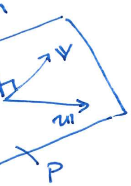
ber.

AC

la



$\neq \lambda_2)$



-4

$\Leftrightarrow$

$s \} \Rightarrow$

$0)$

$\Rightarrow$

$\Big| =$

$.3)$

B^{-1}

$1))$

$= \dfrac{125}{2}$

$_{12})$
$_{22})$

$_2 = 0$

$)$

$=$

2

$0 \;\; 0)$
$1 \;\; 0)$

$!$

$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$

$\mathrm{ll}(A)$,

$A)$:

$= 0$

$= 0$.

$x) = 0$