MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Hjälpmedel: Inga, inte ens miniräknare
Datum: 2024-08-26 kl. 14.00 - 18.00
Telefonvakt: Hossein Raufi
Telefon: 031 - 772 82 96

MVE670 Linjär algebra F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 3: 20-29 p, 4: 30-39, 5: 40-50.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Till samtliga beräkningsuppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng**. Motivera och förklara så väl du kan.

1. Bestäm ekvationen för den linje som ligger i planet $2x + y - 3z = 1$ och som skär linjen $x + 1 = 2 - y = z + 3$ under rät vinkel. (6 p)

2. Lös matrisekvationen $XA = B + 2X$, där (6 p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 12 & -2 \\ 6 & 3 & 15 & -4 \end{pmatrix}$$

3. Låt $A = \begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}$

(a) Diagonalisera A med en ortogonal matris S, och diagonal matris D. (4 p)

(b) Beräkna en matris B sådan att $B^2 = A$. (3 p)

4. Låt $A = \begin{pmatrix} x & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & x \end{pmatrix}$. (6 p)

För vilket/vilka värden på $x \in \mathbb{R}$ är matrisen inte inverterbar? För detta/dessa värden på x, bestäm en bas för kolonnrummet och nollrummet av A.

5. Låt $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ beteckna standardbasen i $\mathbb{R}^3$, och låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbilningen sådan att: (6 p)

$$\mathbf{e}_1 = T(\mathbf{e}_2) - T(\mathbf{e}_3), \quad \mathbf{e}_2 = T(\mathbf{e}_1) + T(\mathbf{e}_3), \quad \mathbf{e}_3 = T(\mathbf{e}_1) - T(\mathbf{e}_2).$$

Bestäm avbildningsmatrisen för T. Avgör också huruvida T är en volymbevarande avbildning eller ej.

Var god vänd!

6. Låt V beteckna vektorrummet av alla kvadratiska $n \times n$-matriser.

(a) Visa att $\langle A, B\rangle = \text{spår}(A^T B)$ definierar en skalärprodukt på V. (4 p)

(b) Givet att vi definierar vinkeln mellan två matriser via (3 p)

$$\langle A, B\rangle = \|A\|\|B\| \cos(\theta) \qquad 0 \le \theta \le \pi$$

beräkna vinkeln mellan matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Det räcker att svara i termer av inversa trigonometriska funktioner.

7. Betrakta $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Antag att $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Visa att det för varje vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ finns en entydigt bestämd uppdelning (6 p)

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}^{\perp}$$

där $\mathbf{u}'$ är parallell med $\mathbf{v}$ och $\mathbf{u}^{\perp}$ är ortogonal mot $\mathbf{v}$.

8. Visa att för symmetriska matriser gäller att egenvektorer svarande mot olika egenvärden är ortogonala. (6 p)

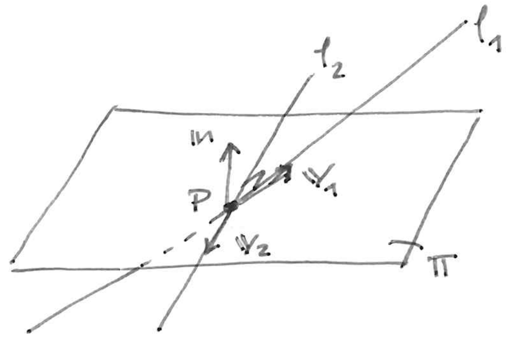
Lycka till!

/Hossein

MVE670, Linjär algebra F/TM

Lösningar omtenta 2, 26/8-24

1. Låt $\pi: 2x + y - 3z = 1$



$\ell_1: x + 1 = 2 - y = z + 3$

Sökt: $\ell_2 \subset \pi$ med $\ell_2 \perp \ell_1$

π har normalen $\mathbf{n} = (2, 1, -3)$

$$\ell_1: \begin{cases} x + 1 = t \\ 2 - y = t \\ z + 3 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - t \\ z = -3 + t \end{cases} \quad \text{så } \mathbf{v}_1 = (1, -1, 1) \text{ riktningsvektor}$$

Låt $\mathbf{v}_2$ riktningsvektor för ℓ_2.

$$\ell_2 \subset \pi \ \& \ \ell_2 \perp \ell_1 \Rightarrow \mathbf{v}_2 \perp \mathbf{n} \ \& \ \mathbf{v}_2 \perp \mathbf{v}_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_2 \parallel \mathbf{n} \times \mathbf{v}_1 = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2, -5, -3)$$

$$\therefore \mathbf{v}_2 = (2, 5, 3) \quad (\text{längden irrelevant})$$

$P \in \ell_2$ skärningspunkt mellan π och ℓ_1

$$2(-1+t) + (2-t) - 3(-3+t) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 + 2t + 2 - t + 9 - 3t = 1 \Leftrightarrow 2t = 8 \Leftrightarrow t = 4$$

$$\Rightarrow P = (-1+4, 2-4, -3+4) = (3, -2, 1)$$

$$\therefore \ell_2: P + t\mathbf{v}_2 = (3, -2, 1) + t(2, 5, 3) \quad t \in \mathbb{R}$$

2. $XA = B + 2X \iff XA - 2X = B \iff X(A - 2I) = B \iff$

$\iff (A-2I)^T X^T = B^T$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left((A-2I)^T \,\vdots\, B^T \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc:cc} -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 12 & 15 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -2 & -4 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 12 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 12 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \left(I \;\vdots\; \underbrace{\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{array}}_{X^T} \right)$$

$$\therefore\ X = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}}}$$

3 (a) $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-16 & 12 \\ 12 & \lambda-9 \end{vmatrix} = (\lambda-16)(\lambda-9) - 144 =$

$$= \lambda^2 - 25\lambda + 144 - 144 = \lambda(\lambda - 25) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0 \quad \text{och} \quad \lambda_2 = 25$$

$\underline{\lambda_1 = 0}$: $(0\cdot I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -16 & 12 & 0 \\ 12 & -9 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} \end{array} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ \, \end{array} \sim \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -4x_1 + 3x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{4}t \\ x_2 = t \end{cases} \overset{t=4s}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x_1 = 3s \\ x_2 = 4s \end{cases} \quad s \neq 0$$

$$\therefore \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} s, \quad s \neq 0$$

$\underline{\lambda_2 = 25}$: $(25I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 9 & 12 & 0 \\ 12 & 16 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{array} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} -1 \\ \, \end{array} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 3x_1 + 4x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{4}{3}t \\ x_2 = t \end{cases} \overset{t=3s}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x_1 = -4s \\ x_2 = 3s \end{cases} \quad s \neq 0$$

$$\therefore \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} s, \quad s \neq 0$$

Låt $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ser att $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$

Om $S = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$ så S ortogonal, D diagonal, och $A = SDS^{-1}$.

(b) Låt $S = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ som i (a) och $\tilde{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

så $\tilde{D}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = D$. Låt nu $B = S\tilde{D}S^{-1}$!

Då $B^2 = B \cdot B = S\tilde{D}S^{-1} \cdot S\tilde{D}S^{-1} = S\tilde{D}^2S^{-1} = SDS^{-1} = A$.

$$\therefore B = S\tilde{D}S^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\frac{1}{9+16}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -20 & 15 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 80 & -60 \\ -60 & 45 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix} \left(= \frac{1}{5}A\right)$$

4. $\det(A) = \begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & x \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 1 \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 9 & 9 & 9 & 9 \\ 2 & 1 & 0 & x \end{vmatrix} =$

$= 9 \begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} =$

-1

$= -9 \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} \; 1 \; -1 = -9 \begin{vmatrix} x+1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} =$

$= -9 \begin{vmatrix} x+1 & 0 \\ 0 & x+1 \end{vmatrix} = -9(x+1)^2$

A ej inverterbar då $\det(A) = 0$, dvs
då $x = -1$ (dubbelrot)

$\underline{x=-1:}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \; 3 \; 6 \; 2 \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 12 \\ 0 & 5 & 10 & 15 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} \\ \\ \end{matrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \; -1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} x_3 = t \\ x_4 = s \end{matrix}$ $\Longleftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - t - 2s = 0 \\ x_2 + 2t + 3s = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t + 2s \\ x_2 = -2t - 3s \end{cases}$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+2s \\ -2t-3s \\ t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s$$

$\therefore$ Bas för kolonnrummet : $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bas för nollrummet : $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. $e_1 + e_2 + e_3 = T(e_2) - T(e_3) + T(e_1) + T(e_3) + T(e_1) - T(e_2)$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2T(e_1) \Leftrightarrow T(e_1) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = T(e_1) + T(e_3) \Leftrightarrow T(e_3) = e_2 - T(e_1) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$e_3 = T(e_1) - T(e_2) \Leftrightarrow T(e_2) = T(e_1) - e_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A_T = \begin{pmatrix} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) \end{pmatrix} = \underline{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$\det(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 \\ \\ \\ \end{matrix} = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{8} \cdot 4 = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ T ej volymbevarande

6. (a) Om $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$ och $\alpha \in \mathbb{R}$

så gäller att:

I. $$\text{spår}(A^T) = \text{spår}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} + \dots + a_{nn} = \text{spår}(A)$$

II. $$\text{spår}(\alpha A) = \text{spår}\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \dots & \alpha a_{nn} \end{pmatrix} = \alpha a_{11} + \dots + \alpha a_{nn} =$$

$$= \alpha(a_{11} + \dots + a_{nn}) = \alpha\,\text{spår}(A)$$

III. $$\text{spår}(A+B) = \text{spår}\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \dots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11}+b_{11}+\dots+a_{nn}+b_{nn} =$$

$$= a_{11}+\dots+a_{nn}+b_{11}+\dots+b_{nn} = \text{spår}(A) + \text{spår}(B)$$

Från dessa följer:

(i) Symmetri: $\langle A, B\rangle = \text{spår}(A^TB) \overset{I}{=} \text{spår}((A^TB)^T) =$

$$= \text{spår}(B^T(A^T)^T) = \text{spår}(B^TA) = \langle B, A\rangle$$

(ii) Linjär i 1:a variabeln:

$$\langle \alpha A, B\rangle = \text{spår}((\alpha A)^TB) = \text{spår}(\alpha A^TB) \overset{II}{=}$$

$$= \alpha\,\text{spår}(A^TB) = \alpha\langle A, B\rangle$$

$$\langle A_1 + A_2, B\rangle = \text{spår}((A_1+A_2)^TB) =$$

$$= \text{spår}(A_1^T B + A_2^T B) \overset{\text{III}}{=} \text{spår}(A_1^T B) + \text{spår}(A_2^T B) =$$

$$= \langle A_1, B \rangle + \langle A_2, B \rangle$$

(iii) Positivt definit:

$$\langle A, A \rangle = \text{spår}(A^T A) = \sum_{i=1}^{n} (A^T A)_{ii} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^T a_{ki} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{ki} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2 \geq 0$$

$$\langle A, A \rangle = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2 = 0 \iff$$

$$\iff a_{ki} = 0 \quad \forall i, k = 1, \ldots, n \iff A = \mathbb{O}$$

(b)

$$A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 16 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{pmatrix}$$

$$B^T B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 14 \\ 14 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\langle A, B \rangle = \text{spår}(A^T B) = 20$$

$$\|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{\text{spår}(A^T A)} = \sqrt{30}$$

$$\|B\| = \sqrt{\langle B, B \rangle} = \sqrt{\text{spår}(B^T B)} = \sqrt{30}$$

$$\therefore \theta = \arccos\left(\frac{\langle A, B \rangle}{\|A\| \|B\|}\right) = \arccos\left(\frac{20}{\sqrt{30}\sqrt{30}}\right) =$$

$$= \underline{\underline{\arccos\left(\frac{2}{3}\right)}}$$