

MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola

Tentamen

Hjälpmedel: Inga, inte ens miniräknare

Datum: 2023-10-21 kl. 14.00 - 18.00

Telefonvakt: Hossein Raufi

Telefon: 031 - 772 82 96

MVE670 Linjär algebra F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 3: 20-29 p, 4: 30-39, 5: 40-50.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Till samtliga beräkningsuppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng.** Motivera och förklara så väl du kan.

1. (a) Bestäm skärningslinjen mellan planen $x - 2y + 2z = -2$ och $2x - y + 2z = 2$. Ange linjens ekvation på parameterform. (2 p)
- (b) Bestäm ekvationen för det plan som är vinkelrätt mot båda planen i (a) och innehåller punkten $P_0 = (1, 2, -1)$. Ange planets ekvation på affin form. (2 p)
- (c) Bestäm (minsta) avståndet från punkten $P = (2, 4, 4)$ till planet i (b). Bestäm dessutom den ortogonala projektionen av P på samma plan. (3 p)

2. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

- (a) Bestäm kolonnrummet och rangen av A . (2 p)
 - (b) Bestäm nollrummet och nulldimensionen av A . (2 p)
 - (c) Avgör om A har en vänsterinvers. (1 p)
 - (d) Avgör om A har en högerinvers. (1 p)
3. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Uteblivet svar ger 0 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0 .
- (a) Om det för $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ gäller att $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$, så måste $|\mathbf{v} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})| = |\mathbf{v}|^2 |\mathbf{u}|$.
 - (b) Varje homogent linjärt ekvationssystem med fler ekvationer än obekanta har en unik lösning.
 - (c) Mängden av alla ortogonala matriser är ett underrum av mängden av alla kvadratiske matriser.
 - (d) Om λ är ett egenvärde till både A och A^2 , så är $\lambda = 0$.
 - (e) Om $z_0 \in \mathbb{C}$ är en lösning till $z^n = 1$, $n \in \mathbb{N}$, så är $\bar{z}_0 = z_0^{n-1}$.
 - (f) Antag att A och B är två kvadratiske matriser sådana att B kan erhållas genom att utföra elementära radoperationer på A . Då har matriserna samma determinant.

Var god vänd!

4. Faktorisera polynomet (6 p)

$$p(z) = (1 + i)z^2 - (4 + 8i)z + 1 + 21i$$

5. Låt T och F vara två linjära avbildningar från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$ sådana att $T(\mathbf{u})$ är den ortogonala projektionen av $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ på planet $3x - y + z = 0$ och $F(\mathbf{u})$ är speglingen av $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ i linjen $x = y = -z$. Bestäm avbildningsmatrisen för $F \circ T$. (6 p)

6. För vilka symmetriska 3×3 -matriser X gäller att (6 p)

$$AX = BX$$

givet att

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 10 \\ 4 & 5 & 12 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

7. (a) Definiera vad som menas med en *egenvektor* till en kvadratisk matris. (1 p)
(b) Definiera vad som menas med det *karakteristiska polynomet* till en kvadratisk matris. (1 p)
(c) Antag att A , B , och C är tre kvadratiske matriser som uppfyller $AC = CB$. Visa att om C inte har egenvärdet 0, så har A och B samma egenvärden. (5 p)

8. Låt A vara en $m \times n$ -matris, där $m \geq n$. Visa att en lösning till normalekvationen (6 p)

$$A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$$

minimerar $|A\mathbf{x} - \mathbf{b}|$.

Lycka till!
/Hossein

MVE670, Linjär algebra F/TM

Lösningar ordinarie tenta 21/10-23

1(a) Antag $L: Q + tV, t \in \mathbb{R}$

$$\pi_1: x - 2y + 2z = -2 \Rightarrow m_1 = (1, -2, 2)$$

$$\pi_2: 2x - y + 2z = 2 \Rightarrow m_2 = (2, -1, 2)$$

$$\text{Vet att } V \perp m_1 \text{ \& } V \perp m_2 \Rightarrow V \parallel m_1 \times m_2$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{längden av} \\ V \text{ irrelevant} \end{array} \right\} \Rightarrow V = m_1 \times m_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$Q \in L \text{ uppfyller: } \begin{cases} x - 2y + 2z = -2 \\ 2x - y + 2z = 2 \end{cases} \xrightarrow{\substack{\text{(t.ex.)} \\ z=0}} \begin{cases} x - 2y = -2 \\ 2x - y = 2 \end{cases} \begin{matrix} \text{②} \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -2 \\ 3y = 6 \end{cases} \begin{matrix} \text{①} \\ \leftarrow \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -2 \\ y = 2 \end{cases} \begin{matrix} \text{②} \\ \leftarrow \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q = (2, 2, 0)$$

$$\therefore L: (2, 2, 0) + t(-2, 2, 3), t \in \mathbb{R}$$

$$(b) \pi_3 \perp \pi_1 \text{ \& } \pi_3 \perp \pi_2 \Rightarrow m_3 \parallel m_1 \times m_2 = V$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{längden av} \\ m_3 \text{ irrelevant} \end{array} \right\} \Rightarrow m_3 = V = (-2, 2, 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_3: -2x + 2y + 3z = d$$

$$P_0 \in \pi_3 \text{ ger: } (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = d \Leftrightarrow d = -1$$

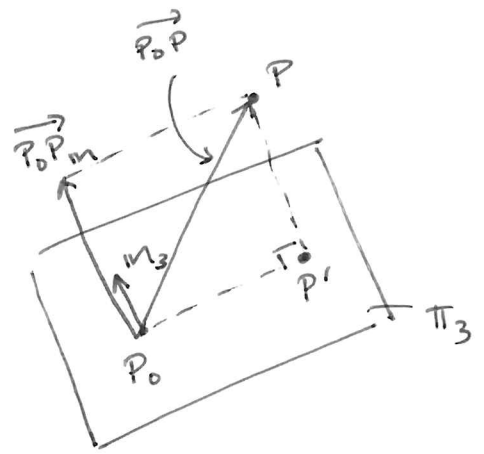
$$\therefore \pi_3: -2x + 2y + 3z = -1$$

$$(c) \vec{P_0P} = P - P_0 = (1, 2, 5)$$

$$\begin{aligned} \vec{P_0P}_m &= \frac{\vec{P_0P} \cdot m_3}{|m_3|^2} m_3 = \\ &= \frac{(1, 2, 5) \cdot (-2, 2, 3)}{(-2)^2 + 2^2 + 3^2} (-2, 2, 3) = \\ &= \frac{17}{17} (-2, 2, 3) = m_3 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{Mmsta avst.} = |\vec{P_0P}_m| = |m_3| = \underline{\underline{\sqrt{17}}} \text{ t.e.}$$

$$\begin{aligned} P' &= P - \vec{P_0P}_m = P - m_3 = (2, 4, 4) - (-2, 2, 3) = \\ &= \underline{\underline{(4, 2, 1)}} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 2. \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textcircled{-2} \textcircled{-1} \\ \swarrow \downarrow \\ \swarrow \downarrow \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textcircled{3} \\ \textcircled{2} \end{matrix} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textcircled{-1} \\ \swarrow \downarrow \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textcircled{\frac{1}{3}} \\ \textcircled{-1} \end{matrix} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \swarrow \downarrow \\ \swarrow \downarrow \\ \textcircled{-1} \textcircled{-2} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textcircled{\frac{1}{2}} \\ \textcircled{2} \end{matrix} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \swarrow \downarrow \\ \textcircled{-1} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} = T
 \end{aligned}$$

(a) $A \Leftrightarrow T$ där kolumn 1, 2 & 4 pivotkolumner

$$\Rightarrow \text{Kolonn}(A) = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^3$$

$$\text{rang}(A) = 3$$

(b) $A \mathbb{x} = \mathbf{0} \Rightarrow (A | \mathbf{0}) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (T | \mathbf{0}) =$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 11x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_5 = 0 \\ x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 &\begin{matrix} x_3 = s \\ x_5 = t \end{matrix} \Rightarrow \mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11t \\ -s-2t \\ s \\ 5t \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -11 \\ -2 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{Noll}(A) = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 \\ -2 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{nolldim}(A) = 2$$

(c) Vet att: A har vänsterinvers $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A$'s kolumner linjärt oberoende ($\Leftrightarrow$ massa andra påst.)

$\therefore A$ har ej vänsterinvers

(d) Vet att: A har högerinvers $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Ax=b$ löslig $\forall b \in \mathbb{R}^3$ ($\Leftrightarrow$ massa andra påstående)

$\uparrow$

Detta stämmer då vi har ett pivotelement i varje rad.

$\therefore A$ har högerinvers

3. (a) Sant, $u \cdot v = 0 \Rightarrow u \perp v$ dvs $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \text{Vet } v \perp u \times v &\Rightarrow |v \times (u \times v)| = |v| |u \times v| = \\ &= |v| |u| |v| \sin \frac{\pi}{2} = |v|^2 |u| \end{aligned}$$

(b) Falskt, Kan finnas ∞ många lsn.

$$\text{t.ex. } \begin{cases} x+y=0 \\ 2x+2y=0 \\ 3x+3y=0 \end{cases}$$

(c) Falskt, $\mathbb{O}$ ej ortogonal matris

(d) Falskt, $\lambda=1$ kan också vara egenvärde till både A och A^2 .

(Om $A=I$, så $I^2=I$ men I har endast egenvärdet $\lambda=1$.)

(e) Sant, Om $z_0^n = 1$ så $|z_0|^n = 1 \Rightarrow |z_0| = 1$
 $\Rightarrow z_0 \bar{z}_0 = |z_0|^2 = 1$. Om vi mult. båda
sidor i $z_0 z_0^{n-1} = 1$ med $\bar{z}_0$ får vi:

$$\bar{z}_0 z_0 z_0^{n-1} = \bar{z}_0 \Leftrightarrow \bar{z}_0 = z_0^{n-1}$$

(f) Falskt, T.ex. byta plats på två rader är en
elementär radoperation men determ.
är alternerande.

$$4. \quad \frac{4+8i}{1+i} = \frac{(1-i)(4+8i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{4+8+i(8-4)}{2} = 6+2i$$

$$\frac{1+21i}{1+i} = \frac{(1-i)(1+21i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+21+i(21-1)}{2} = 11+10i$$

$$p(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 - (6+2i)z + 11+10i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 2(3+i)z + (3+i)^2 - (3+i)^2 + 11-10i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z - (3+i))^2 = 9+6i-1-11-10i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z - (3+i))^2 = -3-4i \quad (*)$$

Låt $w = z - 3 - i$. Då $(*) \Leftrightarrow w^2 = -3-4i$

Antag $w = u+iv$, där $u, v \in \mathbb{R}$. Då

$$w^2 = u^2 - v^2 + i \cdot 2uv \stackrel{\text{vill}}{=} -3-4i$$

Därtill: $|w^2| = |-3-4i| \Leftrightarrow u^2 + v^2 = \sqrt{9+16} = 5$

Sammantaget:

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = -3 \\ u^2 + v^2 = 5 \\ 2uv = -4 \end{cases} \Rightarrow 2u^2 = 2 \Leftrightarrow u = \pm 1$$

$$u_1 = 1 \Rightarrow v_1 = -\frac{2}{u_1} = -2 \Rightarrow w_1 = u_1 + iv_1 = 1-2i$$

$$u_2 = -1 \Rightarrow v_2 = -\frac{2}{u_2} = 2 \Rightarrow w_2 = u_2 + iv_2 = -1+2i$$

$$\therefore z_1 = w_1 + 3 + i = \underline{\underline{4-i}}$$

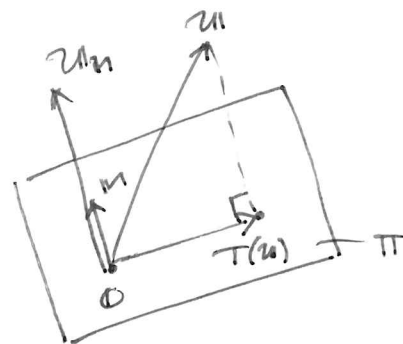
$$z_2 = w_2 + 3 + i = \underline{\underline{2+3i}}$$

$$p(z) = (1+i) \underline{\underline{(z - (4-i))(z - (2+3i))}}$$

$$5. \pi: 3x - y + z = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow m = (3, -1, 1)$$

Ser att:

$$T(u) = u - u_m = u - \frac{u \cdot m}{|m|^2} m$$



Detta ger:

$$T(e_1) = e_1 - \frac{e_1 \cdot m}{|m|^2} m = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{11} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$T(e_2) = e_2 - \frac{e_2 \cdot m}{|m|^2} m = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(-1)}{11} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(e_3) = e_3 - \frac{e_3 \cdot m}{|m|^2} m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

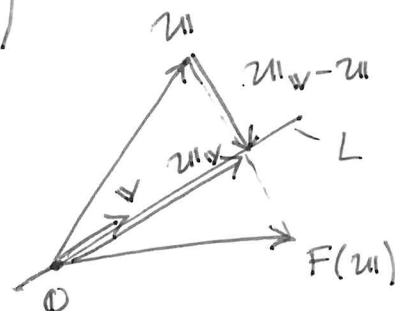
$$\therefore T(x) = A x \quad \text{där} \quad A = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & 10 & 1 \\ -3 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

$$L: x = y = \frac{z}{-1} \Rightarrow v = (1, 1, -1)$$

Ser att:

$$F(u) = u - 2(u_v - u) = 2u_v - u =$$

$$= 2 \cdot \frac{u \cdot v}{|v|^2} v - u$$



Detta ger:

$$F(e_1) = 2 \cdot \frac{e_1 \cdot v}{|v|^2} v - e_1 = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$F(e_2) = 2 \cdot \frac{e_2 \cdot v}{|v|^2} v - e_2 = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$F(e_3) = 2 \cdot \frac{e_3 \cdot v}{|v|^2} v - e_3 = -\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore F(x) = Bx \text{ där } B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Sammantaget:

$$F \circ T \text{ linjär} \iff F \circ T(x) = Cx$$

Å andra sidan:

$$F \circ T(x) = F(T(x)) = F(Ax) = B(Ax) = BAx$$

$$\Rightarrow C = BA = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & 10 & 1 \\ -3 & 1 & 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{33} \begin{pmatrix} 10 & 15 & -15 \\ 7 & -6 & -27 \\ -7 & -27 & -6 \end{pmatrix}$$

$$6. AX = BX \Leftrightarrow AX - BX = \mathbf{0} \Leftrightarrow (A - B)X = \mathbf{0}$$

$$\text{Om } X = (\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{smallmatrix}) \text{ så } (A - B)X = \mathbf{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (A - B)(\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{smallmatrix}) = (\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((A - B)x_1 \quad (A - B)x_2 \quad (A - B)x_3) = (\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix})$$

$$(A - B)x_i = \mathbf{0} \Rightarrow (A - B | \mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \textcircled{-2} \textcircled{-1} \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \textcircled{\frac{1}{2}} \\ \updownarrow \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_i = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ x_{3i} \end{pmatrix} = \{ x_{3i} = t_i \} = \begin{pmatrix} -2t_i \\ -2t_i \\ t_i \end{pmatrix}, t_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} -2t_1 & -2t_2 & -2t_3 \\ -2t_1 & -2t_2 & -2t_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{pmatrix} \text{ vil } \begin{pmatrix} -2t_1 & -2t_1 & t_1 \\ -2t_2 & -2t_2 & t_2 \\ -2t_3 & -2t_3 & t_3 \end{pmatrix} = X^T$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2t_1 = -2t_2 & t_3 = s \\ t_1 = -2t_3 \\ t_2 = -2t_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -2s \\ t_2 = -2s \\ t_3 = s \end{cases}$$

$$\therefore X = \begin{pmatrix} 4s & 4s & -2s \\ 4s & 4s & -2s \\ -2s & -2s & s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

7. (a) Definition. Låt A typ $n \times n$. $x \in \mathbb{R}^n$ eigenvektor till A om $x \neq 0$ och det finns något tal $\lambda \in \mathbb{R}$ så att $Ax = \lambda x$.

(b) Definition: $p_A(\lambda) := \det(\lambda I - A)$ kallas för det karaktäristiska polynomet för A .

($p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I)$ går också bra)

(c) C har ej egenvärdet 0 $\Leftrightarrow C$ inverterbar

Detta ger: $AC = CB \Leftrightarrow B = C^{-1}AC$

Vill visa att $B = C^{-1}AC$ & A har samma egenvärden.

Detta är Sats 6 (iii), s. 259 i Sparr (föreläsning 24) och gäller då:

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det(\lambda I - B) = \det(\lambda C^{-1}C - C^{-1}AC) = \\ &= \det(C^{-1}(\lambda I - A)C) = \det(C^{-1}) \det(\lambda I - A) \det(C) = \\ &= \det(C^{-1}) \det(C) p_A(\lambda) = \det(C^{-1}C) p_A(\lambda) = \\ &= \det(I) p_A(\lambda) = p_A(\lambda) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

8. Se anteckningar på kurshemsidan