

MVE670 Linjär algebra F1/TM1

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.

Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).

Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

1. (a) Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}.$$
- (b) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. Bestäm kolonnrummet och nollrummet till A samt rangen och nolldimensionen av A .
- (c) Avgör om A har en vänsterinvers.
- (d) Avgör om A har en högerinvers. (7 p)
2. Skriv
- $$p(z) = z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 20z + 25$$
- på formen $p(z) = c(z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_n)$ där $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$.
- Ledtråd:** Ett nollställe till $p(z)$ är $1 - 2i$. (6 p)
3. (a) Visa att $V = \{\text{diagonala } (n \times n)\text{-matriser}\}$ är ett vektorrum. **Tips:** Du får använda att mängden av alla $(n \times n)$ -matriser är ett vektorrum.
- (b) Visa att $\langle A, B \rangle = \text{spår}(AB)$ är en skalärprodukt på V . (6 p)
4. Låt $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara spegling i planet $\Pi = \{x + 2y + 3z = 0\}$ och låt A vara avbildningsmatrisen till f . Visa att A är symmetrisk. (6 p)
5. Låt P_1, P_2, P_3 vara punkter i rummet och låt T vara triangeln med hörn i P_1, P_2, P_3 . Låt f vara ortogonal projektion på ett plan. Visa att arean av T är större än eller lika med arean av $f(T)$. (6 p)

6. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Uteblivet svar ger 0 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0 . (6 p)

(a) Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara moturs rotation med $\pi/3$ radianer. Då är 0 ett egenvärde till f .

(b) Enhetsmatrisen är diagonaliserbar.

(c) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$. Då har A rang 2.

(d) Linjen $\ell : (1, 1, 1) + t(1, 0, -1), t \in \mathbb{R}$, är parallell med planet $\Pi = \{x + y + z = 0\}$.

(e) Låt V vara rummet av polynom av högst grad 5 och låt $D : V \rightarrow V$ vara avbildningen $D(p(x)) = p'(x)$. Då är D en bijektiv linjär avbildning.

(f) Låt $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ vara vektorer i rummet. Då gäller att

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{u} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v}.$$

7. Visa att ekvationen

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_s \mathbf{v}_s = \mathbf{0}$$

har en icke trivial lösning (d v s en annan lösning än den triviala lösningen $\lambda_1 = \cdots = \lambda_s = 0$) om och endast om någon av vektorerna $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$ är en linjärkombination av de andra.

(6 p)

8. Låt A vara en $n \times n$ -matris.

(a) Definiera determinanten av A .

(b) Antag att A har egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Visa att $\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n$. (7 p)

Lycka till!
Elizabeth

1a) Skriv på matrisform:

PMAT

Sätt $x_3 = s$, $x_4 = t$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \end{array}$$

där gäller (II):

$$x_2 + 2s + 3t = 1 \Leftrightarrow x_2 = 1 - 2s - 3t$$

$$\text{där (I): } x_1 + 1 - 2s - 3t + s + t = 1 \Leftrightarrow x_1 = s + 2t$$

Alltså lös. till lin. syst:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

b) Obs A koefmatris i a). Minns lös. $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$ ← homo lös.

$$\text{Alltså } \underline{\underline{NM A}} = \left\{ \mathbf{x} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{n\dim A}} = \dim(NM A) = \underline{\underline{2}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\text{rang } A}} = \# \text{ kolonner} - n\dim A = 4 - 2 = \underline{\underline{2}}$$

 $\Rightarrow$ kolonn A spänns av 2 linjärt oberoende kolonner, t.ex. de 2 första (linj. oberoende ty ej parallella)

$$\text{Alltså } \underline{\underline{\text{kolonn } A}} = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$

c) # rader i A < # kolonner i A $\Rightarrow$ A har ej vänsterinv.

d) Låt H vara en 4×3 -matris. Obs kolonner i $AH = [] []$ linjärbas av kolonner i A. A har rang 2 $\Rightarrow$ AH högst rang 2 $\Rightarrow AH \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alltså högst rank 2.

2) $p(z)$ reella koef $\Rightarrow 1 - 2i = 1 + 2i$ nMställe $\Rightarrow$
 $p(z)$ har en faktor $(z - (1 - 2i))(z - (1 + 2i)) = \dots = z^2 - 2z + 5$

$$\begin{array}{r|l} \text{Polynomdiv} & \\ \hline z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 20z + 25 & z^2 - 2z + 5 \\ - (z^4 - 2z^3 + 5z^2) & \\ \hline -2z^3 + 9z^2 - 20z + 25 & \\ - (-2z^3 + 4z^2 - 10z) & \\ \hline 5z^2 - 10z + 25 & \end{array} \quad \begin{array}{l} - (5z^2 - 10z + 25) \\ \hline 0 \end{array}$$

2) Fmts. Alltså $p(z) = (z^2 - 2z + 5)^2 = \underbrace{(z - (1 - 2i))}_{z^2 - 2z + 5}^2 (z - (1 + 2i))^2$

3a) Räkna ut V underrum till $W = \{(n \times n)\text{-matriser}\}$

Behöver komma: $A, B \in V \Rightarrow A+B \in V$

$$\lambda \in \mathbb{R}, A \in V \Rightarrow \lambda A \in V$$

Antag $A, B \in V$, dvs A, B diagonala

Då $A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_n \end{bmatrix}$ & $B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_n \end{bmatrix}$ för något $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$

Nu $A+B = \begin{bmatrix} a_1+b_1 & 0 \\ 0 & a_n+b_n \end{bmatrix}$ diagonal. Alltså $A+B \in V$

$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_1 & 0 \\ 0 & \lambda a_n \end{bmatrix}$ diagonal. Alltså $\lambda A \in V$

Alltså V underrum till W .

Alltså V vektorrum. $\square$

b) Klar att $\langle A, B \rangle = \text{spår}(AB)$ är en funktion $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

Skalarprodukt om - symmetrisk

- linjär i första variabeln

- positivt definit.

Obs Om vi skriver $A \in V$ som $A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_n \end{bmatrix}$ så är

$$\text{spår } AB = \text{spår} \begin{bmatrix} a_1 b_1 & 0 \\ 0 & a_n b_n \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n a_j b_j = (a_1, \dots, a_n) \cdot (b_1, \dots, b_n)$$

där " $\cdot$ " betecknar den vanliga skalarprodukten på $\mathbb{R}^n$

Eftersom $\cdot$ är symmetrisk och linjär i första variabeln

gäller att $\langle A, B \rangle$ är det. Vidare är $\langle A, A \rangle \geq 0$

eftersom $a \cdot a \geq 0$ och $\langle A, A \rangle = 0$ om och endast om $a_1 = \dots = a_n = 0$

$\Leftrightarrow A = n \times n$ matrisen. Alltså $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pos def. Alltså $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalarprod på V

MVE670 21/8 23

4) Välj vektorer $\hat{s}_1 \neq 0 \perp \pi$, $\hat{s}_2 \neq 0$, $\hat{s}_3 \neq 0$ så att $\hat{s}_2 \perp \hat{s}_3$ & $\hat{s}_2, \hat{s}_3 \parallel \pi$ (T.ex. t.ex. $\hat{s}_1 = (1, 2, 3)$, $\hat{s}_2 = (3, 0, -1)$, $\hat{s}_3 = (1, -5, 3)$.)

Låt $s_j = \hat{s}_j / |\hat{s}_j|$ för $j=1, 2, 3$. Då är s_1, s_2, s_3 ON-bas för $\mathbb{R}^3$. Vidare $f(s_1) = -s_1$, $f(s_2) = s_2$, $f(s_3) = s_3$.

Är s_1, s_2, s_3 egenvektorer till f och därmed A , med egenvärden $-1, 1, 1$.

Minns att $A = SDS^{-1}$ där $S = [s_1 \ s_2 \ s_3]$ & $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Eftersom S ortogonal är $S^{-1} = S^T$. Är $A = SDS^T$.

Nu följer $A^T = (SDS^T)^T = (S^T)^T D^T S^T = SDS^T = A$

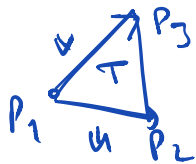
Är A symmetrisk.

$\uparrow D$ diag

5) Välj en HON-bas e_1, e_2, e_3 så att $e_1, e_2 \parallel \pi$, $e_3 \perp \pi$ och välj origo i π , där π betecknar planet.

Då är π (x, y) -planet och $f(x, y, z) = (x, y, 0)$.

Låt $u = (u_1, u_2, u_3) = \overrightarrow{P_1 P_2}$ och $v = (v_1, v_2, v_3) = \overrightarrow{P_1 P_3}$.



Då är area $(T) = \frac{1}{2} |u \times v|$ och

area $(f(T)) = \frac{1}{2} |f(u) \times f(v)|$.

$$\text{Nu } u \times v = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

$$\text{och } f(u) \times f(v) = (u_1, u_2, 0) \times (v_1, v_2, 0) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (0, 0, u_1 v_2 - u_2 v_1).$$

$$\text{Är } |u \times v|^2 = (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)^2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2$$

$$\geq (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 = |f(u) \times f(v)|^2 \geq 0$$

Är $|u \times v| \geq |f(u) \times f(v)|$. Är area $(T) \geq \text{area}(f(T))$

- 6a) FALSKT f saknar egenvärde
 b) SANT I är tom diagonal.
 c) FALSKT rang $A=1$
 d) SANT linjens riktningsvektor $(1,0,-1)$ är ortogonal mot planets normalvektor $(1,1,1)$
 e) FALSKT D ej bijektiv. T avbildar alla konstanta polynom på 0.
 f) FALSKT Tag $u=e_1, v=w=e_2$.
 Då $(u \times v) \times w = (e_1 \times e_2) \times e_2 = e_3 \times e_2 = -e_1$
 men $(v \times w) \times u = (e_2 \times e_2) \times e_1 = 0$

7) Se Sparr, Kap 2.4

8a) Se Sparr, Kap 9.9, Definition 4

b) Se Sparr, Kap 10.4, Sats 7
