

MVE670 Linjär algebra F1/TM1

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.

Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).

Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

1. (a) Beräkna $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 26 & 11 & 0 \\ 4 & 22 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$

(b) Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 26x_2 + 11x_3 = 0 \\ 4x_1 + 22x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$

(c) Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 26 & 11 & 0 \\ 4 & 22 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$ Avgör om vektorn $(1, 2, 3, 4)$ ligger i kolonnrummet till A .
(6 p)

2. Lös ekvationen $p(z) = 0$ där

$$p(z) = z^3 + z^2 - 4z - 24.$$

Tips: $p(z)$ har (åtminstone) ett nollställe på formen $a(1+i)$, där $a \in \mathbb{R}$. (6 p)

3. Bestäm avståndet mellan planet $\Pi = \{4x + y - 8z = 5\}$ och linjen $\ell : (7, 2, -7) + t(3, 4, 1)$, $t \in \mathbb{R}$. (6 p)

4. Låt $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ beteckna mängden av reella (2×2) -matriser. Låt $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ vara avbildningen $X \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} X$. Visa att f är linjär och bestäm avbildningsmatrisen A för f med avseende på basen $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Beräkna determinanten av A . (6 p)

5. Antag att A är en (2×2) -matris och att 2 och 3 är egenvärden till A . Låt $B = 2A^3 - 5A^2 - 3A$. Avgör om B är inverterbar. (6 p)

6. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Uteblivet svar ger 0 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0 . (6 p)

(a) Låt $C[-\pi, \pi]$ vara rummet av kontinuerliga funktioner från $[-\pi, \pi]$ till $\mathbb{R}$ och låt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) \sin(x) dx.$$

Då är $\langle f, g \rangle$ en skalärprodukt på $C[-\pi, \pi]$.

(b) Antag att $\mathbf{x}$ är en egenvektor till A . Då är $\mathbf{x}$ en egenvektor till A^T .

(c) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Då är A diagonaliserbar.

(d) Linjen $\ell : t(1, 1, 1), t \in \mathbb{R}$, är parallell med planet $\Pi = \{x + y + z = 0\}$.

(e) Antag att A är en $(n \times n)$ -matris sådan att $\text{spår} A = 0$. Då är A inte inverterbar.

(f) Låt V vara rummet av polynom av grad högst 5. Då är $(x - 1)$, $(x - 1)(x - 2)$, $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$, $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$ linjärt oberoende i V .

7. (a) Definiera *vektorrum*.

(b) Låt V vara ett vektorrum. Definiera *skalärprodukt på V* . (8 p)

8. Låt $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ vara en vektor i $\mathbb{R}^n$. Visa att det för varje vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ finns en entydigt bestämd uppdelning

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}^\perp,$$

där $\mathbf{u}'$ är parallell med $\mathbf{v}$ och $\mathbf{u}^\perp$ är ortogonal mot $\mathbf{v}$. (6 p)

Lycka till!
Elizabeth

MVE 670 Linjär algebra 3/1 23, lösningar

①

$$1a) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 26 & 11 & 0 \\ 4 & 22 & 2 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{red}} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 26 & 11 & 0 \\ 4 & 22 & 2 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{red}} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & 3 \\ 0 & 14 & 2 & -6 \\ 0 & 6 & -10 & -9 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{red}} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & 3 \\ 0 & 14 & 2 & -6 \\ 0 & 6 & -10 & -9 \end{vmatrix}$$

Utsvekt.
kolonn 1

$$-(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -5 & -1 & 3 \\ 14 & 2 & -6 \\ 6 & -10 & -9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -5 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ -9 & -13 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot 4 \cdot (-13) = 156$$

- b) Obs ekv. syst. kan skrivas $Ax = 0$ där A är matrisen i uppg. c). Uppg a) ger $\det A \neq 0$. Detta är ekvivalent med att $Ax = 0$ endast har den triviala lösningen $x = 0$.
Alltså ekv. syst har lösning $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$

- c) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \text{kolonn } A = \mathbb{R}^4$. Speciellt gäller att $(1, 2, 3, 4) \in \text{kolonn}(A)$

2) Ansätt $z = a(1+i)$
 $p(a(1+i)) = a^3(1+i)^3 + a^2(1+i)^2 - 4(1+i) - 24 =$
 $a^3(1+3i-3-i) + a^2(1+2i-1) - 4(1+i) - 24 =$
 $a^3(-2+2i) + a^2 \cdot 2i - 4a(1+i) - 24 = -2a^3 - 4a - 24 + i(2a^3 + 2a^2 - 4a)$
 $\text{Im } p(a(1+i)) = 0 \Leftrightarrow 0 = 2a^3 + 2a^2 - 4a = 2a(a^2 + a - 2) =$
 $2a(a+2)(a-1) \Leftrightarrow a=0, a=-2, \text{ eller } a=1$
 Sätt in i $r(a) := \text{Re}(p(a(1+i)))$:
 $r(0) = -24, r(-2) = -2(-8) - 4(-2) - 24 = 0, r(1) = -2 - 4 - 24 \neq 0$
 Alltså $-2(1+i)$ nollställe till $p(z)$
 $p(z)$ reella koeff. $\Rightarrow -2(1+i) = -2(1-i)$ också nollställe
 $\Rightarrow (z + 2(1+i))(z + 2(1-i)) = z^2 + 4z + 8$ faktori $p(z)$

MVE 670 3/1 22

2) Frys. Polynomdivision:

Anta $p(z) = (z^2 + 4z + 8)(z - 3)$

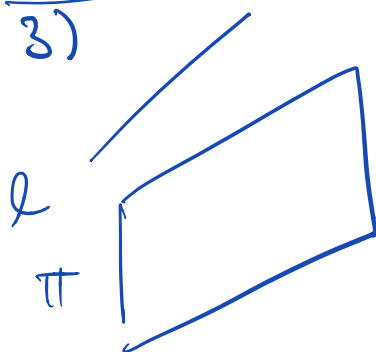
Anta $p(z) = 0$ har l sning.

$z = -2 - 2i, z = -2 + 2i, z = 3$

$$\begin{array}{r} z-3 \\ z^3+z^2-4z-24 \overline{) z^3+4z+8} \\ \underline{-(z^3+4z^2+8z)} \\ -3z^2-12z-24 \\ \underline{-(-3z^2-12z-24)} \\ 0 \end{array}$$

②

3)



Obs $n = (4, 1, -8)$ normalvektor
till π

$v = (3, 4, 1)$ r ktningsvektor till l .

$n \cdot v = (4, 1, -8) \cdot (3, 4, 1) = 12 + 4 - 8 = 8 \neq 0$

Anta n  r ortogonal mot v

$\Rightarrow l$ sk r $\pi \Rightarrow$ Avst ndet mellan l & π  r 0

4) L t $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. D   r $f(X) = BX$.

Fr n r knereglerna f r matriser f lj r att

$f(\lambda X + \lambda' X') = B(\lambda X + \lambda' X') = \lambda BX + \lambda' BX' = \lambda f(X) + \lambda' f(X')$

Anta  r f linj r.

Avbildningsmatrisen m p basen E_1, E_2, E_3, E_4 g s

av

$A = \begin{bmatrix} | & & | \\ f(E_1) & \dots & f(E_4) \\ | & & | \end{bmatrix}$ d r $f(E_j)$  r koordinaterna
i basen $E_1, \dots, E_4$

$f(E_1) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = aE_1 + cE_3$

$f(E_2) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{bmatrix} = aE_2 + cE_4$

$f(E_3) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix} = bE_1 + dE_3$

MVE 670 3/1 22

③

$$f(E_4) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & a \end{bmatrix} = bE_2 + dE_4$$

Alltså avbildningsmatrisen $A = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{vmatrix} = \begin{matrix} \text{whr.} \\ \text{kolmn 1} \end{matrix} a \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{matrix} \text{whr. rad 2} \\ c \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \text{whr. rad 1} \\ c \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{vmatrix} + \begin{matrix} \text{whr. kolmn 1} \\ a \end{matrix} \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix}$$

$$ad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + c(-b) \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (ad-bc) \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \underline{\underline{(ad-bc)^2}} \\ = (\det B)^2$$

5) Lemma Om $B(n \times n)$ har egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. (*)
 Då B inverterbar $\Leftrightarrow \lambda_i \neq 0 \forall i$.

Låt $p(t) = 2t^3 - 5t^2 - 3t$

Obs om $Ax = \lambda x$ så är $Bx = (2A^3 - 5A^2 - 3A)x =$

$$2A^3x - 5A^2x - 3Ax = 2\lambda^3x - 5\lambda^2x - 3\lambda x = p(\lambda)x$$

Alltså om λ egenvärde till A , så är $p(\lambda)$ egenvärde till B

2 egenvärde till $A \Rightarrow p(2) = 2 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 = 16 - 20 - 6 = \underline{\underline{-10}}$
 egenvärde till B

3 egenvärde till $A \Rightarrow p(3) = 2 \cdot 3^3 - 5 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 = (6 - 5 \cdot 1) \cdot 9 = \underline{\underline{0}}$
 egenvärde till B

Alltså B (2×2) har egenvärden -10 & 0

(*) ovan $\Rightarrow B$ ej inverterbar

TMA 3/1 22

④

- 6 a) FALSKT Låt $f=1$ då $\langle f, f \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) dx = 0$
 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ej positivt definit
- b) FALSKT Tag α . $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Då $Av = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
 $A^T v = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Alltså v egenv. till A men ej till A^T .
- c) SANT A är $\neq 0$ m diagonal.
- d) FALSKT $(1,1,1)$ normalvektor till $\Pi \Rightarrow l \perp \Pi$
- e) FALSKT Tag α $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Då $\text{spår } A = 0$ men A mbar
- f) SANT t.g. x_1, x_2, x_3, x_4 linjärt beroende
-

7 a) Se [H4] Definition 1.1

b) Se [H4] Definition 2.1

8 Se material på hemsidan om ortogonal projektion,
+ kap 4 i Sparr
