

MVE670 Linjär algebra F1/TM1

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.

Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).

Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

1. Låt $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \\ 8 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

- (a) Beräkna $\det A$ och $\det B$.
- (b) Bestäm rang A och rang B .
- (c) Avgör om A respektive B har högerinvers. (7 p)

2. Skriv

$$p(z) = (2 - i)z^3 - (6 + 2i)z^2 + (4 - 7i)z$$

på formen $p(z) = c(z - a_1) \cdots (z - a_n)$ där $a_1, \dots, a_n, c \in \mathbb{C}$. (6 p)

3. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0 . (7 p)

- (a) Mängden av alla polynom av grad minst 5 är ett vektorrum.
- (b) Låt T vara tetraedern med hörn i $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 5)$, $(0, 1, 0)$ och $(3, 7, 5)$. Då är volymen av T $21/4$.
- (c) Betrakta linjerna $\ell_1 = (1, 1) + t(1, 2), t \in \mathbb{R}$, $\ell_2 = (2, 2) + t(1, 2), t \in \mathbb{R}$ och $\ell_3 = (3, 3) + t(1, 2), t \in \mathbb{R}$. Då är avståndet mellan ℓ_1 och ℓ_2 lika stort som avståndet mellan ℓ_2 och ℓ_3 .

(d) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. Då är $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ en skalärprodukt på $\mathbb{R}^n$.

(e) Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara vektorer i rummet. Då gäller att

$$((\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

(f) Antag att A är en $(n \times n)$ -matris sådan att $\det A \neq 0$. Då är A diagonaliserbar.

(g) Låt $C(\mathbb{R})$ vara mängden av kontinuerliga funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. Då är $C(\mathbb{R})$ ett oändligdimensionellt vektorrum.

4. Avgör om det finns en linje genom punkten $P = (1, 2, 7)$ som skär linjen $\ell : (1, 2, -2) + t(3, -2, -1), t \in \mathbb{R}$, och som dessutom innehåller punkten $Q = (4, 0, 5)$. Bestäm i så fall linjens ekvation. (6 p)

5. Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara ortogonal projektion på linjen $\ell : t(2, 1), t \in \mathbb{R}$, och låt A vara avbildningsmatrisen till f . Vidare låt $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara moturs rotation med $\pi/3$ radianer och låt B vara avbildningsmatrisen till g . Låt

$$C = A^5 B A^4 B A^3 B A^2 B A.$$

Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till C . (6 p)

6. Antag att $A = (a_{ij})$ är en $(n \times n)$ -matris sådan att alla matriselement a_{ij} är heltal och antag att $\det A = 1$. Låt $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ vara en vektor sådan att $b_1, \dots, b_n$ är heltal. Låt $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ vara en lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Visa att $x_1, \dots, x_n$ är heltal. (6 p)

7. Låt $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$. Antag att $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ spänner upp $\mathbb{R}^n$ och är linjärt oberoende. Visa att det för varje $\mathbf{u}$ i $\mathbb{R}^n$ finns entydigt bestämda reella tal $u_1, \dots, u_n$ så att

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{v}_1 + \dots + u_n \mathbf{v}_n.$$

(6 p)

8. Låt A vara en $m \times n$ -matris, där $m \geq n$. Visa att en lösning till normalekvationen

$$A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b} \quad (1)$$

minimerar $|A\mathbf{x} - \mathbf{b}|$. (6 p)

Lycka till!
Elizabeth

1a) $\det A = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$ eftersom rad 1 & rad 3 lika

$\det B = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \\ 8 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{+2 \quad -1 \quad -3 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow}} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & -2 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{utveckla rad 3}} =$

$(-1)^{3+2} \cdot (-6) \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-1)^{1+3} \cdot 1 \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 6 \cdot 2 = 12$
 utveckla kolumn 3

b) $\det B \neq 0 \Rightarrow \text{rang } B = 4$

Obs kolumn 1, 2, 4 i A = kolumn 1, 2, 4 i B
 Alltså har A åtminstone 3 linjärt oberoende kolumner (ty kolumnerna i B är linjärt oberoende.)
 Å andra sidan har A högst 3 linjärt oberoende kolumner eftersom $\det A = 0$. Alltså $\text{rang } A = 3$

c) Minimi: $(n \times n)$ -matris A har H-mvns $\Leftrightarrow$

A är invertibel $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Alltså A har ej H-mvns. B har H-mvns

2) Obs $p(z) = z q(z)$ där $q(z) = (2-i)z^2 - (6+2i)z + 4-7i$

Lös $q(z) = 0$ [Obs $\frac{1}{2-i} = \frac{2+i}{12-i^2} = \frac{2+i}{5}$ Dela med $2-i$]

$\Leftrightarrow z^2 - \frac{(2+i)(6+2i)}{5} z + \frac{(2+i)(4-7i)}{5} = 0 \Leftrightarrow$ räkning

$z^2 - (2+2i)z + 3-2i = 0 \Leftrightarrow (z - (1+i))^2 - (1+i)^2 + 3-2i = 0$

$\Leftrightarrow (z - (1+i))^2 = -3+4i$

MVE670 24/10 22

②

Sätt $\tilde{z} = z - (1+i) \Leftrightarrow z = \tilde{z} + 1+i$. Ansätt $\tilde{z} = x+iy$

$$\text{Då } \tilde{z}^2 = -3+4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 & \text{(I)} \quad (\operatorname{Re} \tilde{z} = \operatorname{Re}(-3+4i)) \\ 2xy = 4 & \text{(II)} \quad (\operatorname{Im} \tilde{z} = \operatorname{Im}(-3+4i)) \end{cases}$$

Kan också använda $x^2 + y^2 = 5$ (III) ($|\tilde{z}|^2 = |-3+4i|^2$)

Lös ekvationsystemet: (I) + (III): $2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Sätt in i (II): $x=1 \Rightarrow y=2$, $x=-1 \Rightarrow y=-2$

Obs: båda dessa lösningar uppfyller (I).

Alltså (*) lösningar $\tilde{z} = 1+2i$ & $\tilde{z} = -1-2i$

Alltså har $q(z) = 0$ lösningar

$$z = 1+2i+1+i = \underline{2+3i} \quad \& \quad z = -1-2i+1+i = \underline{-i}$$

Alltså är $q(z) = c(z-2-3i)(z-i)$ där $c = (2-i)$
(koefficienten för z^2)

Alltså $p(z) = (2-i)z(z-2-3i)(z+i)$

3 a) FALSKT, innehåller ej 0

b) FALSKT, Vol(T) = heltal/6

c) SANT, Både avståndet av längden av den ortogonala projektionen av $(1,2)$ på $(2,-1)$

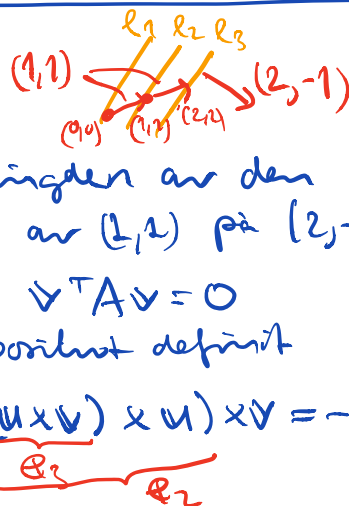
d) FALSKT, Låt $v = (0,1,0)$. Då $v^T A v = 0$

Alltså $\langle x, y \rangle$ ej positivt definit

e) FALSKT, Låt $u = e_1, v = e_1 + e_2$. Då $(\underbrace{u \times v}_{e_2}) \times v = -e_3 \neq 0$

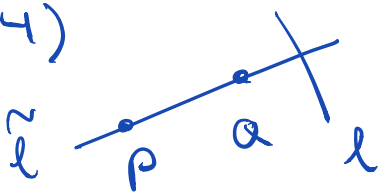
f) FALSKT, Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Då $\det A = 1$, men A ej diagbar.

g) SANT



MVE670 22/10 22

4)



Låt $\tilde{l}$ vara linjen genom P & Q (3)
 Vi ska avgöra om $\tilde{l}$ & L skär.

Bestäm $\tilde{l}$'s ekvation:

$$\vec{PQ} = (4, 0, 5) - (1, 2, 7) = (3, -2, -2)$$

Alltså $\tilde{l}: Q + s\vec{PQ} = (4, 0, 5) + s(3, -2, -2), s \in \mathbb{R}.$

Skärningen av $\tilde{l}$ & L ges av lösningen till:

$$\begin{cases} 4 + 3s = 1 + 3t \\ -2s = 2 - 2t \\ 5 - 2s = -2 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3s - 3t = -3 \cdot 1/3 \cdot (2/3) \\ -2s + 2t = 2 \\ -2s + t = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s - t = -1 \text{ (I)} \\ 0 = 0 \\ -t = -9 \text{ (II)} \end{cases}$$

(II) $\Rightarrow t = 9$ (I) $= s - 9 = -1 \Rightarrow s = 8$

Alltså $\tilde{l}$ & L skär i punkten $(28, -16, -11)$

Alltså linjen $\tilde{l}: (4, 0, 5) + s(3, -2, -2), s \in \mathbb{R}$ går genom P ,
 skär L och innehåller Q .

5) Obs $A^2 = A$ eftersom f är en projektion.

Alltså $C = (AB)^T A$

Obs eigenvärden & vektorer till A $\leftarrow$ guldtycklig (max)-
matris
 $f_A =$
 arb. matris till A valfri bas

Låt $S_1 = (2, 1)$, $S_2 = (-1, 2)$. Då $S_1 \parallel L$ & $S_2 \perp L$

$S_2 \nearrow S_1$ L & S_2 denna bas har vi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{där } \theta = \pi/3$$

$f(S_1) \quad f(S_2)$

$g(S_1) \quad g(S_2)$

Obs $AB = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Låt oss se vad $f_C = (f_{AB})^T f_A$ ger med S_1 & S_2

$$S_1 \xrightarrow{f_A} S_1 \xrightarrow{f_{AB}} \cos \theta S_1 \xrightarrow{f_{AB}} (\cos \theta)^2 S_1 \xrightarrow{f_{AB}} (\cos \theta)^3 S_1 \xrightarrow{f_{AB}} (\cos \theta)^4 S_1$$

$$S_2 \xrightarrow{f_A} 0 \xrightarrow{(f_{AB})^T} 0$$

MVE670 22/10 22

(4)

Anta $f_C(s_1) = (\cos \theta)^4 s_1$ & $f_C(s_2) = 0$

Anta $s_1 = (2, 1)$ egenvektor med egenvalue $(\cos \theta)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

$s_2 = (-1, 2)$ ————— 0

eftersom C är (2×2) finns maximalt 2 egenvalue (med mult) och max 2 linjärt oberoende egenvektorer.

Anta är egenvalue & egenvektorer till C :

$\frac{1}{16}$ egenvalue, $t(2, 1)$, $t \neq 0$

0 ————— $t(-1, 2)$, $t \neq 0$

6) OBS A är matris. De ges lösningarna till $Ax = b$

är

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & \dots & b & \dots & a_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1 & \dots & b & \dots & a_n \end{vmatrix}}{\det A} = \begin{vmatrix} a_1 & \dots & b & \dots & a_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1 & \dots & b & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

bedömning *det A = 1*

Nu är detta ett heltal ty alla element i A och b är heltal

Anta $x_1, \dots, x_n$ heltal

7) Se sparck kap 6 + föreläsning 2/9

8) Se anteckningar hemvidan + föreläsning 21/9