MATEMATIK | **Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa**

Chalmers tekniska högskola

Tentamen

Datum: 2022-08-22 kl. 14.00 - 18.00

Telefonvakt: Elizabeth Wulcan

Telefon: 031-772 5347

MVE670 Linjär algebra F1/TM1

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.
Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. (a) Beräkna $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 8 & -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ och $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

(b) Ange ett egenvärde till $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 8 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

(6 p)

2. Låt K vara kuben med hörn i $(\pm1, \pm1, \pm1)$, d v s med hörn $P_1 = (1, 1, 1)$, $P_2 = (1, -1, 1)$, $P_3 = (1, -1, -1)$, $P_4 = (1, 1, -1)$, $P_5 = (-1, 1, 1)$, $P_6 = (-1, -1, 1)$, $P_7 = (-1, -1, -1)$ och $P_8 = (-1, 1, -1)$. Vidare låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som avbildar P_1 på P_2, P_2 på P_3 och P_3 på P_4.

(a) Vad är volymen av K?

(b) Bestäm avbildningsmatrisen för f.

(c) Beskriv bilden $f(K)$ av K under f. Bestäm speciellt $f(P_j)$ för $j = 4, 5, 6, 7, 8$. Vad är volymen av $f(K)$? (8 p)

3. Låt $\mathcal{P}_3$ vara mängden av alla polynom av grad högst 3 och låt $D : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3, p \mapsto p'$. Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till D. (6 p)

4. Låt A vara en $(n \times n)$-matris där $n \geq 2$.

(a) Gäller det att om $\det(A^2) = 0$ så är $\det(A) = 0$? Motivera ditt svar. Om svaret är nej räcker det att ange motexempel.

(b) Gäller det att om $A^2 = \mathbf{0}$ så är $A = \mathbf{0}$? Motivera ditt svar. Om svaret är nej räcker det att ange motexempel. (4 p)

5. Avgör om $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ -6 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ är inverterbar och bestäm i så fall A^{-1}.

(6 p)

6. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0. (6 p)

(a) Mängden av alla polynom av grad minst 3 är ett vektorrum.

(b) Antag att λ är ett egenvärde till A. Då är $n\lambda$ ett egenvärde till A^n.

(c) Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ och $\mathbf{x}$ vara vektorer i $\mathbb{R}^3$. Då gäller att

$$(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{w} \bullet \mathbf{x}) = (\mathbf{x} \bullet \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} \bullet \mathbf{u})$$

(d) Antag att $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ är linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^4$. Då spänner $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ upp $\mathbb{R}^4$.

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ saknar högerinvers.

(f) Vektorn $(1, 2, 3)$ ligger i nollrummet till $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

7. Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vara vektorer i rummet ($\mathbb{R}^3$). (8 p)

(a) Definiera vektorprodukten (kryssprodukten) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

(b) Visa att vektorprodukten är antikommutativ, d v s att $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$.

(c) Visa att

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|. \tag{1}$$

När råder likhet i (1)?

(d) Visa, förslagsvis genom att ge ett motexempel, att vektorprodukten inte är associativ, d v s att

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} \neq \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

i allmänhet.

8. Antag att A är en $(n \times n)$-matris med egenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Antag att $\lambda_j \neq \lambda_k$ om $j \neq k$. Visa att A är diagonaliserbar. (6 p)

Lycka till!
Elizabeth

MVE 670 Linjär algebra 22/8 22, lösningar

1 a)

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 8 & -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (-1) \; (-2) \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & -8 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 4 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{utv. kolonn 4}}{=} (-1)^{3+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -3 & -8 & 3 \\ 4 & -4 & 4 \end{vmatrix} \underset{\text{det linjär i rader}}{=}$$

$$(-1) \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 4 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 8 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} 8 \cdot (-8-3+3-8) = -8 \cdot 16 = \underline{\underline{-128}}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \underline{\underline{0}} \text{ ty rad } 1 = \text{rad } 3$$

b) Låt A & B beteckna matriserna som vi tog determinanterna av i a).

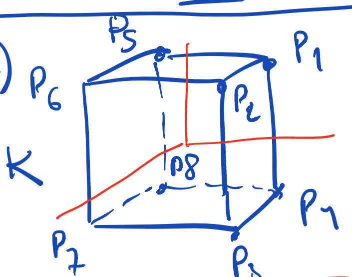
<u>Obs</u> $B = A + 2I$.

Vi såg ovan att $0 = \det B = \det(A + 2I)$.

Alltså $\underline{\underline{-2}}$ egenvärde till A.

---

2 a)



<u>Obs</u> K spanns upp av t.ex.

$$\overrightarrow{P_7P_3} = (1,-1,-1) - (-1,-1,-1) = (2,0,0)$$

$$\overrightarrow{P_7P_8} = (-1,1,-1) - (-1,-1,-1) = (0,2,0)$$

$$\overrightarrow{P_7P_6} = (-1,-1,1) - (-1,-1,-1) = (0,0,2)$$

<u>Alltså</u> $\boxed{\mathrm{Vol}(K)} = \left| \begin{vmatrix} | & | & | \\ \overrightarrow{P_7P_3} & \overrightarrow{P_7P_8} & \overrightarrow{P_7P_6} \\ | & | & | \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \right| = |8| = \boxed{8}$

b) Avbildningsmatrisen A uppfyller

$$A \begin{bmatrix} | & | & | \\ \overrightarrow{OP_1} & \overrightarrow{OP_2} & \overrightarrow{OP_3} \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \overrightarrow{OP_2} & \overrightarrow{OP_3} & \overrightarrow{OP_4} \\ | & | & | \end{bmatrix} \text{ dvs } A \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{=:B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}}_{=:C}$$

Beräkna B^{-1}!

$$[B\,|\,I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&-1&-1&0&1&0\\1&1&-1&0&0&1\end{array}\right]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&2&2&2&0&0\\0&-2&-2&-1&1&0\\0&0&-2&-1&0&1\end{array}\right]\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&2&0&1&0&1\\0&-2&0&0&1&-1\\0&0&-2&-1&0&1\end{array}\right]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&1&1&0\\0&-2&0&0&1&-1\\0&0&-2&-1&0&1\end{array}\right]\begin{array}{l}\cdot 1/2\\ \cdot(-1/2)\\ \cdot(-1/2)\end{array}\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/2&1/2&0\\0&1&0&0&-1/2&1/2\\0&0&1&1/2&0&-1/2\end{array}\right]=[I\,|\,B^{-1}]$$

Nu följer att

$$\underline{\underline{A}}=CB^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&-1&1\\1&-1&-1\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\1&0&-1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&-2\\0&2&0\end{bmatrix}=\underline{\underline{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}}}$$

c) Minns att en linjär avbildning avbildar parallellepiped med hörn P_j på parallellepiped med hörn $f(\overrightarrow{OP_j})$.

$$f(\overrightarrow{OP_4})=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\overrightarrow{OP_1}$$

Alltså $\underline{P_4\mapsto P_1}$. På samma sätt ser $\underline{P_5\mapsto P_6,\ P_6\mapsto P_7,\ P_7\mapsto P_8,\ P_8\mapsto P_5}$

Alltså $\underline{\underline{f \text{ avbildar } K \text{ på } K}}$. Spec $\underline{\mathrm{Vol}(f(K))}=\mathrm{Vol}(K)=\underline{\underline{8}}$

---

3) Låt $p=p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$

Då $Dp=a_1+2a_2x+3a_3x^2$

Antag $p\not\equiv 0$ egenvektor till D.

Då är $Dp=\lambda p$ för något λ, dvs

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2=\lambda(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)\quad\forall x$$

Identifiera koeff. $\begin{cases}a_1=\lambda a_0 & \mathrm{I}\\ 2a_2=\lambda a_1 & \mathrm{II}\\ 3a_3=\lambda a_2 & \mathrm{III}\\ 0=\lambda a_3 & \mathrm{IV}\end{cases}$

Om $\lambda=0$, så I–III $\Rightarrow a_1=a_2=a_3=0$, dvs $p=a_0$

Om $\lambda\neq 0$ så IV $\Rightarrow a_3=0 \overset{III}{\Rightarrow} a_2=0 \overset{II}{\Rightarrow} a_1=0 \overset{I}{\Rightarrow} a_0=0$, dvs $p=0$

Eftersom $p\neq 0$ är de enda lösningarna $\lambda=0$ & $p=a_0\neq 0$.

Alltså D har egenvärde 0 m egenvektorer $p=a_0\neq 0$

4a) Minns $\det(AB)=\det A\cdot\det B$

Alltså $\boxed{\det A^2=0} \Rightarrow (\det A)^2=0 \boxed{\Rightarrow \det A=0}$

b) Låt $A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\neq 0$ Då $A^2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=0$

Alltså gäller inte att $A^2=0\Rightarrow A=0$.

5) Obs A 7x7-matris sådan att $A^T=-A$ (*)

(A är skevsymmetrisk)

Nu gäller

$$\boxed{\det A}=\det A^T \overset{(*)}{=} \det(-A) \underset{\text{det linjär i rader}}{=} (-1)^7\det A \boxed{=-\det A}$$

$\Rightarrow \det A=0$

Alltså är A ej inverterbar.

6 a) FALSKT, tag tex $p=x^3+x^2$ $q=x^3$ av grad 3

Då har $p-q=x^2$ grad 2.

b) FALSKT, motex: 1 egenvärde till I, men n ej egenvärde till $I^n=I$ om $n>1$.

c) SANT, ty skalärprod & mult av reella tal är kommutativa.

d) FALSKT ty krävs 4 vektorer för att spänna $\mathbb{R}^4$

e) FALSKT ty $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-1 = 1 \neq 0$ Alltså A har invers, speciellt högerinvers

f) FALSKT ty $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \neq \mathbb{0}$

---

7) Se Sparr Kap 5.2

8) Se Sparr Kap 10, Sats 3
