

MVE670 Linjär algebra F1/TM1

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.

Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).

Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

1. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Avgör om $\mathbf{b}$ ligger i nollrummet till A , om $\mathbf{b}$ ligger i kolonnrummet till A , samt om $\mathbf{b}$ är en egenvektor till A . (6 p)

2. Låt $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara moturs rotation runt z -axeln med $\pi/2$ radianer och låt A vara f s avbildningsmatris. Betrakta det karakteristiska polynomet för A som ett komplext polynom och skriv det på formen

$$c(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n),$$

där $c, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ är komplexa tal. Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till A .

(6 p)

3. Bestäm avståndet mellan linjerna $\ell_1 : (3, 2, 0) + s(2, 0, -3), s \in \mathbb{R}$, och $\ell_2 : (-9, 8, -11) + t(-5, 3, -7), t \in \mathbb{R}$. (7 p)

4. Låt A vara $(n \times n)$ -matrisen med matriselement $a_{ij} = \begin{cases} a & \text{om } i = j \\ b & \text{om } i \neq j \end{cases}$.

Beräkna determinanten av A för

(a) $n = 3$

(b) $n = 5$

(c) allmänt n .

(6 p)

5. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0 . (6 p)

(a) Mängden av alla polynom av grad högst 3 är ett vektorrum.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ är diagonaliserbar.

(c) Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara ortogonal projektion på linjen $\ell : t(1, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, låt $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara ortogonal projektion på linjen $\ell : t(1, 1, 1)$, $t \in \mathbb{R}$, och låt A_f och A_g vara motsvarande avbildningsmatriser. Då är nolldimensionen av A_f lika med nolldimensionen av A_g .

(d) Antag att A är en $(m \times n)$ -matris. Då är $\text{rang}(A) + \text{nolldim}(A) = m$.

(e) Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ och $\mathbf{x}$ vara vektorer i $\mathbb{R}^3$. Då gäller att

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \bullet (\mathbf{w} \times \mathbf{x}) = (\mathbf{x} \times \mathbf{w}) \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{u}).$$

(f) Antag att $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ spänner upp $\mathbb{R}^3$. Då är $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ linjärt oberoende.

6. En matris sägs vara skevsymmetrisk om $A^T = -A$. Antag att A är en skevsymmetrisk $(n \times n)$ -matris.

(a) Visa att om A är inverterbar så är A^{-1} skevsymmetrisk.

(b) Visa att om n är udda så är A ej inverterbar. (6 p)

7. Betrakta $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Antag att $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Visa att det för varje vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ finns en entydigt bestämd uppdelning

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}^\perp,$$

där $\mathbf{u}'$ är parallell med $\mathbf{v}$ och $\mathbf{u}^\perp$ är ortogonal mot $\mathbf{v}$. (7 p)

8. Antag att A är en symmetrisk matris av typ $(n \times n)$. Vidare antag att $\mathbf{s}$ är en egenvektor till A med egenvärde λ och att $\mathbf{s}'$ är en egenvektor till A med egenvärde λ' och att $\lambda \neq \lambda'$. Visa att $\mathbf{s}$ är ortogonal mot $\mathbf{s}'$. (6 p)

Lycka till!
Elizabeth

MVE 670 Linjär algebra 8/1 22 lösningar

①

1) $b \in \text{NM } A$? Obs $Ab = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1-1 \\ 1-1 \\ 4+1-5 \\ 6-2-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$

Autär $b \in \text{NM } A$.

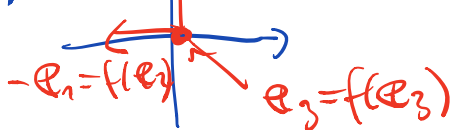
Det följer också att b är en egenvektor till A .
(med egenvärde 0)

$b \in \text{Kern } A$? Dvs är $Ax = b$ lösbar?

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 8 & 4 & -1 \end{array} \right] \begin{matrix} \textcircled{-2} \textcircled{-3} \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -7 \end{array} \right] \begin{matrix} \uparrow \\ \uparrow \end{matrix} \begin{matrix} \text{ej lösbar} \\ \text{samtidigt} \end{matrix}$$

$Ax = b$ är lösbar. Autär $b \notin \text{Kern } A$

2) obs: $e_2 = f(e_1)$



Matriks:

$$A = [f(e_1) \ f(e_2) \ f(e_3)] = \begin{bmatrix} e_2 & -e_1 & e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{p_A(z)} = \det(zI - A) = \begin{vmatrix} z & 1 & 0 \\ -1 & z & 0 \\ 0 & 0 & z-1 \end{vmatrix} = z^2(z-1) + (z-1) = (z^2+1)(z-1) = \underline{(z-i)(z+i)(z-1)}$$

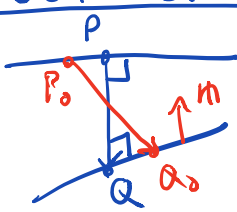
Eigenvärden & egenvektorer:

Reella lösningar till $p_A(\lambda) = 0$ är $\lambda = 1$

$\lambda = 1$: Lös $(I - A)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \downarrow \end{matrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} \textcircled{I} \\ \textcircled{II} \end{matrix}$

Så $x_3 = t$ (II) $\Rightarrow x_2 = 0$ (I) $\Rightarrow x_1 = 0$

Autär A har egenvektorer $t(0, 0, 1)$, $t \neq 0$, m eigenvärde 1

3) 
 $l_1: (3, 2, 0) + s(2, 0, -3), s \in \mathbb{R}$
 $l_2: (-9, 8, -11) + t(-5, 3, -7), t \in \mathbb{R}$
Minns: avstånd $(l_1, l_2) =$ minsta avstånd mellan $P \in l_1$ & $Q \in l_2$

Minns att detta erhålls om P, Q uppfyller $\overrightarrow{PQ} \perp l_1, l_2$
 För att få $\overrightarrow{PQ}$ tar vi $n \perp l_1, l_2$ & $P_0 \in l_1, Q_0 \in l_2$. Då är $\overrightarrow{PQ} =$ ortogonal projektion av $\overrightarrow{P_0Q_0}$ på n .

Obs l_1 & l_2 ej parallella $\Rightarrow$ kan välja n som

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -5 & 3 & -7 \end{vmatrix} = (9, 29, 6)$$

Kan välja $P_0 = (3, 2, 0)$ ($s=0$) & $Q_0 = (-9, 8, -11)$ ($t=0$).

Då $\overrightarrow{P_0Q_0} = (-12, 6, -11)$

Ortogonal proj. av $\overrightarrow{P_0Q_0}$ på $n = \frac{\overrightarrow{P_0Q_0} \cdot n}{|n|^2} n = \frac{(-12, 6, -11) \cdot (9, 29, 6)}{|n|^2} n =$

$$\frac{-108 + 174 - 66}{|n|^2} n = 0 \cdot n = \mathbf{0}$$

Altern avstånd $(l_1, l_2) = |\overrightarrow{PQ}| = \left| \frac{\text{ort proj}}{\text{på } n} \right| = |0| = \underline{0}$

Alternativ lösning: undersöka om l_1 & l_2 skär:

Lös $\begin{cases} 3 + 2s = -9 - 5t \\ 2 = 8 + 3t \\ -3s = -11 - 7t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2s + 5t = -12 & \text{(I)} \\ -3t = 6 & \text{(II)} \\ -3s + 7t = -11 & \text{(III)} \end{cases}$

(II) $\Rightarrow t = -2$ Sätt in i (I) & (III): $\begin{cases} 2s = -2 \\ -3s = 3 \end{cases} \Leftrightarrow s = -1$

Altern: (I) har lösning $\Rightarrow l_1$ & l_2 skär $\Leftrightarrow$

avstånd $(l_1, l_2) = 0$

MVE 670 3/1 22

③

$$4) \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & b & & & \\ \vdots & & & & b \\ b & b & & b & a \end{vmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \textcircled{1} \\ \vdots \\ \textcircled{1} \\ \textcircled{1} \end{matrix} = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & \dots & a+(n-1)b \\ b & a & & b \\ \vdots & b & & \vdots \\ b & b & & b \\ & & & a \end{vmatrix}$$

bringt ut $a+(n-1)b$ från rad 1

$$(a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ b & a & & b \\ \vdots & b & & \vdots \\ b & b & & b \\ & & & a \end{vmatrix} \begin{matrix} \textcircled{-b} \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} = (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a-b & & 0 \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \\ & & & a-b \end{vmatrix}$$

utveckla kolumn 1

$$(a+(n-1)b) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} a-b & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a-b \end{vmatrix} = \underline{(a+(n-1)b) (a-b)^{n-1}}$$

5) a) SANT, $x \in \mathbb{H}$

b) FALSKT, enda egenvektoren är $t(1,0)$, $t \neq 0$
 $\Rightarrow$ 2 linjärt beroende egenvektorer

c) FALSKT, $\dim f = 1$, $\dim g = 2$

d) FALSKT, $\text{rang } A + \dim A = n$

e) SANT, $(u \times v) \cdot (w \times x) = (w \times x) \cdot (u \times v) =$
 $(-1)(x \times w) \cdot (-1)(v \times u) = (x \times w) \cdot (v \times u)$

f) SANT, $\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

MVE670 3/1 22

④

6a) Antag $A^T = -A$ & A invertierbar. Då

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = (-A)^{-1} = -A^{-1}$$

Anta A^{-1} skesymmetrisk

Se Sats 1 s 130 Sparr

$$(cA)^{-1} = \frac{1}{c} A^{-1} \quad c \neq 0$$

b) Antag $A^T = -A$ $A \text{ } n \times n$

$$\text{Då } \det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n \det A$$

Sats 2, kap 9 Sparr

Sats 5 kap 9 Sparr

Om n udda så

$$\det A = -\det A \Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow A \text{ ej invertbar}$$

7) Se föreläsning 5

8) Se Lemma 2, s 256, Sparr + Föreläsning 24
