

MVE670 Linjär algebra F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.

Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).

Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

1. Låt $A = \begin{bmatrix} 1-c & 2-c & 4-2c \\ c & 2c & 3c \\ c & c & c \end{bmatrix}$.

Bestäm för varje värde på $c \in \mathbb{R}$ nollrummet och kolonnrummet till A . (6 p)

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ och $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Avgör om det finns en matris B så att

(a) $ABC = A$

(b) $ABC = B$

(c) $ABC = C$.

Om så är fallet ange en sådan matris B . (6 p)

3. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0 . (6 p)

(a) Antag att λ är ett egetvärde till A och att μ är ett egetvärde till B . Då är $\lambda + \mu$ ett egetvärde till $A + B$.

(b) Polynomet $p(z) = 2z^6 - 3z^5 + z - 11$ har exakt fem reella nollställen.

(c) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ och låt $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Då har $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$ en entydigt bestämd lösning.

(d) Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara ortogonal projektion på linjen $\ell_f : t(1, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, låt $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara ortogonal projektion på linjen $\ell_g : t(1, 1, 1)$, $t \in \mathbb{R}$, och låt A_f och A_g vara motsvarande avbildningsmatriser. Då är rangen av A_f lika med rangen av A_g .

(e) Mängden av alla polynom av grad 3 är ett vektorrum.

(f) Antag att A är en inverterbar matris. Då är spåret av A nollskilt.

4. Betrakta punkterna $P_1 = (1, 0, 2)$, $P_2 = (2, 0, 3)$, $P_3 = (3, 3, 0)$ och $P_4 = (4, 4, 4)$. Avgör om det finns ett plan som innehåller P_1 , P_2 , P_3 och P_4 . Bestäm i så fall planets ekvation. (6 p)

5. Låt $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ vara avbildningen $(x, y) \mapsto x + yi$, låt $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vara avbildningen $z \mapsto z + \bar{z}$ och låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara avbildningen $f = g^{-1} \circ h \circ g$. Visa att f är linjär och bestäm avbildningsmatrisen till f . Bestäm alla egetvärden och egenvektorer till f . (6 p)

6. Låt A vara en $(n \times n)$ -matris, $n \geq 2$. Visa att (6 p)

$$\det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-1}.$$

7. (a) Definiera *vektorrum*.

(b) Låt V vara ett vektorrum. Definiera *skalärprodukt på V* . (8 p)

8. Visa att ekvationen

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_s \mathbf{v}_s = \mathbf{0}$$

har en icke trivial lösning (d v s en annan lösning än den triviala lösningen $\lambda_1 = \cdots = \lambda_s = 0$) om och endast om någon av vektorerna $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$ är en linjärkombination av de andra. (6 p)

Lycka till!
Elizabeth

MVE670 Linjär algebra 23/10 21 lösningar

1) Undersök $\det A = \begin{vmatrix} 1-c & 2-c & 4-2c \\ c & 2c & 3c \\ c & c & c \end{vmatrix} = c^2 \begin{vmatrix} 1-c & 2-c & 4-2c \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ ①
↑ byt ut c^2
 $c^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3-c \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = c^2 (-1)^{3+1} \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 3-c \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = c^2 (2 - (3-c)) = c^2 (c-1)$
↑ utvech. kolumn 1

Alltså $\det A = 0 \Leftrightarrow c = 0$ (med mult 2) eller $c = 1$

Alltså om $c \neq 0$ & $c \neq 1$ så $\text{ndrum}(A) = \{0\}$ $\text{kolonn}(A) = \mathbb{R}^3$

$c = 0$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\text{kolonn}(A) = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

$\text{NM}(A) = \{Ax = 0\} = \{x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0\}$

$c = 1$: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$Ax = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{①}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{②}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{③}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$

(I) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow Tx = 0$ Sätt $x_3 = t$ & (II): $x_2 = -2t$
 (II): $x_1 - 2t + t = 0 \Rightarrow x_1 = t$

$x = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Alltså $\text{NM}(A) = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Minst kolonn(A) spänns av "pivotkolonner"

Alltså $\text{kolonn } A = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

2 b) Obs B måste ha typ 3×2 för att produkten ABC ska vara definierad. B har typ 2×3 . Alltså saknas $ABC = B$ lösning

c) A har rang 2 $\Rightarrow \exists$ högerinvers till A.

Ex $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ är en högerinvers, ty $AB = I$ ②

Alltså gäller med detta val av B att $ABC = IC = C$

a) Obs C har rang 1 ($C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ där $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$)

Låt D vara en godtycklig matris. $D = \begin{bmatrix} -\delta_i & - \end{bmatrix}$

Da $DC = \begin{bmatrix} -\delta_i \cdot 1 & 2\delta_i & 3\delta_i \end{bmatrix}$. Obs $\text{rang}(DC) \leq 1$

Alltså för alla B gäller $\text{rang}(ABC) \leq 1$

Men $\text{rang } A = 2$. Alltså finns ej lösning till $ABC = A$

3 a) FALSKT Låt t.ex. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. De 1 egenvärde till A & B , men $1+1=2$ ej egenv. till $A+B=I$

b) FALSKT ty # nollställen som är ej reella är parvis.

c) SANT ty A är symmetrisk $\Rightarrow A^T A$ är symmetrisk $\Rightarrow \exists!$ lös.

d) SANT $\text{rang}(\text{ortogonal proj på linje}) = 1$

e) FALSKT Låt t.ex. $p = x^3 + x^2$ $q = x^3$. Då p & q grad 3 men $p - q = x^2$ grad 2

f) FALSKT Tag t.ex. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Då är spåret av $A = 0$ men A är invertierbar.

4) Strategi: Beträkta den parallelepiped P som spänns av $\vec{P_1P_2}, \vec{P_1P_3}, \vec{P_1P_4}$



Obs att P_1, P_2, P_3, P_4 ligger i ett plan om

$$\text{vol}(P) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \vec{P_1P_2} & \vec{P_1P_3} & \vec{P_1P_4} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Räkna: $\vec{P_1P_2} = (2,0,3) - (1,0,2) = (1,0,1)$

③

$\vec{P_1P_3} = (3,3,0) - (1,0,2) = (2,3,-2)$

$\vec{P_1P_4} = (4,4,4) - (1,0,2) = (3,4,2)$

$$\begin{vmatrix} \vec{P_1P_2} & \vec{P_1P_3} & \vec{P_1P_4} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 8 + 0 + 8 - 0 - 9 = 13 \neq 0$$

Alltså ligger punkterna ej i ett plan.

5) obs $g^{-1}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2, z \mapsto (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$

Nu $f(x,y) = g^{-1}(h(g(x,y))) = g^{-1}(h(x+iy)) =$

$g^{-1}((x+iy) + (x-iy)) = g^{-1}(2x) = (2x, 0)$

dvs $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Alltså är f linjär med avbildningsmatris $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

obs om $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$ diagonal, så är λ_j egenvärden.
egenvektorer $t e_j, t \neq 0$

Alltså A har egenvärde 2 m egenvekt $t(1,0), t \neq 0$
— n — 0 — n — $t(0,1), t \neq 0$

6) Minns $(\operatorname{adj} A)A = \det A \cdot I$ (*)

$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$
 $\det I = 1$

• Antag först $\det A \neq 0$

Tag det av (*): $\det((\operatorname{adj} A)A) = \det(\det A \cdot I)$

det mult: $\det(\operatorname{adj} A) \det A = (\det A)^n$

division med $\det A$ ger $\det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-1}$

- Antag nu att $\det A = 0$ ④
 - Om $A = \mathbf{0}$ så är alla underdeterminanter 0, vilket ger $\text{adj } A = \mathbf{0} \Rightarrow \det(\text{adj } A) = 0$
 - Om $A \neq \mathbf{0}$ så $\exists x \in \mathbb{R}^n$ så att $Ax \neq \mathbf{0}$
Nu ger (*) att

$$(\text{adj } A)Ax = \det A \cdot Ix = \mathbf{0}$$
 Alltså $Ax \in \text{nollrum}(\text{adj } A)$
 Alltså $\text{nollrum}(\text{adj } A) \neq \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow$
 $\text{adj } A$ ej inv. bar $\Leftrightarrow \det(\text{adj } A) = 0$
 Alltså i båda fallen

$$\det(\text{adj } A) = 0 = (\det A)^{n-1}$$

7a) Se Hdmått, Def 1.1
 b) — " — Def 2.1

8) Se Sparr, kap 2.4