MATEMATIK **Hjälpmedel:**
Chalmers tekniska högskola Datum: 2021-01-04 kl. 14.00 - 18.00
Tentamen Telefonvakt:
Telefon:

TMA660 Linjär algebra och geometri F/TM

Motivera noga alla svar på uppgifterna! Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.
Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Betrakta vektorerna $\mathbf{v}_1 = (4, -4, -1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2, -1, 3)$, $\mathbf{v}_3 = (2, -3, 0, -1)$ och $\mathbf{v}_4 = (5, -4, -1, 1)$ i $\mathbb{R}^4$.

(a) Avgör om $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ och $\mathbf{v}_4$ är linjärt beroende.

(b) Är $\mathbf{v}_1$ en linjärkombination av $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ och $\mathbf{v}_4$? (7 p)

2. Betrakta punkterna $P_1 = (0, 2, -1)$, $P_2 = (3, 5, 2)$, $P_3 = (4, 1, 0)$ och $P_4 = (5, 2, 1)$ i rummet. Avgör om det finns ett plan som innehåller P_1, P_2, P_3 och P_4. Bestäm i så fall planets ekvation. (6 p)

3. Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ vara parametriseringen av linjen $\ell : t(1, 2), t \in \mathbb{R}$, d v s avbildningen $f : t \mapsto t(1, 2)$, och låt $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ vara parametriseringen av planet $\Pi : s(-3, 4, -5) + t(6, -7, 8), s, t \in \mathbb{R}$, d v s avbildningen $g : (s, t) \mapsto s(-3, 4, -5) + t(6, -7, 8)$.

(a) Bestäm avbildningsmatrisen för f respektive g.

(b) Bestäm avbildningsmatrisen för $g \circ f$.

(c) Bestäm värdemängden för $g \circ f$. (6 p)

4. Låt $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm A^7.

(b) Bestäm A^{17}. (6 p)

5. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Utelämnat svar ger 0 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0. (6 p)

(a) Determinanten av $A = \begin{bmatrix} c & c & a & a \\ a & b & c & b \\ b & b & b & b \\ a & a & c & c \end{bmatrix}$ är $a^4 + 3a^3b - 2abc^2 + 4b^2c^2$.

(b) i är ett nollställe till $p(z) = z^5 - z^4 - i + 1$ med multiplicitet 3.

(c) Låt $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{w} = (1, 0, 2)$. Då gäller att $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \bullet \mathbf{w} = \mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$.

(d) Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara ortogonal projektion på linjen $\ell : t(1, 2), t \in \mathbb{R}$, och låt A vara dess avbildningsmatris. Då har A rang 1.

(e) Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$. Då har A en entydigt bestämd högerinvers.

(f) Avståndet mellan planen $\Pi_1 = \{3x + 4y + 5z = 9\}$ och $\Pi_2 = \{2x + 3y + 4z = 8\}$ är 1.

6. Låt P vara den fyrhörning i planet vars hörn är $(1,6)$, $(3,2)$, $(6,8)$ och $(7,3)$.

(a) Bestäm arean av P.

(b) Låt ℓ vara linjen $\ell : t(1,-2), t \in \mathbb{R}$, och låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara ortogonal projektion på ℓ. Beskriv bilden av P under f, det vill säga mängden $f(P) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ för något $\mathbf{x} \in P\}$. (7 p)

7. Låt A vara en matris av typ $m \times n$. Visa att det finns en entydigt bestämd matris B av typ $m \times n$ sådan att $A + B = \mathbf{0}$. (6 p)

8. Låt $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ vara två linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^3$. Visa att om $\mathbf{v}$ är en vektor i $\mathbb{R}^3$ så finns en entydig uppdelning $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}^\perp$, där $\mathbf{v}'$ är en linjärkombination av $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{v}^\perp$ är ortogonal mot $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$. (6 p)

Lycka till!
Elizabeth

TMA 660 Linjär algebra & geometri 4/1 2021 Lösning ①

1a) Undersök $\begin{vmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_4 \\ | & & | \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 5 \\ -4 & 2 & -3 & -4 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$ mult rad 2 & 3 m -1 $\rightsquigarrow$ enklare form

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -6 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

-1

utveckla längs rad 3

utv. längs kolonn 3

$$1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Alltså $\underline{v_1, \dots, v_4 \text{ linjärt beroende}}$

b) Undersök om

$$v_1 = x_1 v_2 + x_2 v_3 + x_3 v_4 \quad \text{för några } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

dvs lös ekv. systemet

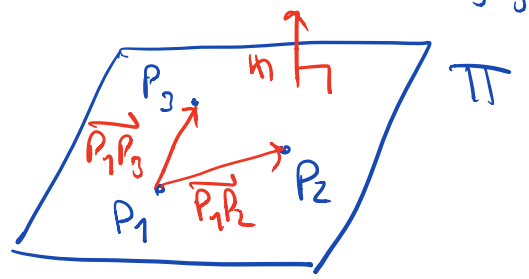
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & -4 & -4 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} -2 & 1 & -3 \end{matrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -7 & -14 & -12 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -7 & -14 & -11 \end{array}\right]$$

ej lösbara samtidigt

Lösning saknas (by ekv. 2 & 4 ej lösbara samtidigt)! $\underline{\text{Alltså } v_1 \text{ ej linj. komb av } v_2, v_3, v_4}$

2) <u>Strategi</u>: I dim ett plan Π som innehåller P_1, P_2, P_3.
Kolla om P_4 ligger i Π.



Bestäm normalvektorn till Π

$\overrightarrow{P_1P_2} = (3,5,2) - (0,2,-1) =$
$(3,3,3) = 3(1,1,1)$

$\overrightarrow{P_1P_3} = (4,1,0) - (0,2,-1) = (4,-1,1)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = 3\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3(2,3,-5)$$

Alltså $(2,3,-5)$ normalvektorn till Π.
Alltså är Π på formen $\Pi = \{2x+3y-5z=d\}$
Bestäm d: Sätt in P_1: $2\cdot 0 + 3\cdot 2 - 5\cdot(-1) = 11$
Alltså $\Pi = \{2x+3y-5z=11\}$.
Kolla om $P_4 \in \Pi$: $2\cdot 5 + 3\cdot 2 - 5\cdot 1 = 11$. Alltså $P_4 \in \Pi$.
<u>Slutsats: $\Pi = \{2x+3y-5z=11\}$ innehåller $P_1, \dots, P_4$</u>

---

3 a) <u>Obs</u> $f: [t] \mapsto t\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}[t]$

$$g: \begin{bmatrix}s\\t\end{bmatrix} \mapsto s\begin{bmatrix}-3\\4\\-5\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}6\\-7\\8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & 6\\4 & -7\\-5 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s\\t\end{bmatrix}$$

Alltså är avb. matriserna $A_f = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ & $A_g = \begin{bmatrix}-3 & 6\\4 & -7\\-5 & 8\end{bmatrix}$

b) Minns avbildn. matris av $g \circ f$ är

$$A_g A_f = \begin{bmatrix}-3 & 6\\4 & -7\\-5 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9\\-10\\11\end{bmatrix}$$

c) Alltså är $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ $t \mapsto t(9,-10,11)$

Alltså är värdemängden $\underline{\underline{\text{linjen } t(9,-10,11),\ t \in \mathbb{R}}}$

---

4) Obs $A = \begin{bmatrix} \cos \pi/4 & -\sin \pi/4 \\ \sin \pi/4 & \cos \pi/4 \end{bmatrix}$ avb. matris för

$f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$ roterad moturs $\pi/4$ radianer

a) A^7 är avb. matris för $(f_A)^7 = \underbrace{f_A \circ \dots \circ f_A}_{7 \text{ gånger}}$ – moturs rotation med $7\pi/4$ rad

Alltså $A^7 = \begin{bmatrix} \cos 7\pi/4 & -\sin 7\pi/4 \\ \sin 7\pi/4 & \cos 7\pi/4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{1/\sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}}$

b) Obs $(f_A)^8 = id$ (rotation m $8\pi/4 = 2\pi$ rad)

$\Rightarrow A^8 = I$ Alltså $\underline{\underline{A^{17} = A = 1/\sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}}$

---

5 a) FALSKT ty det delbar m b

b) FALSKT ty de skulle $-i$ också ha mult 3

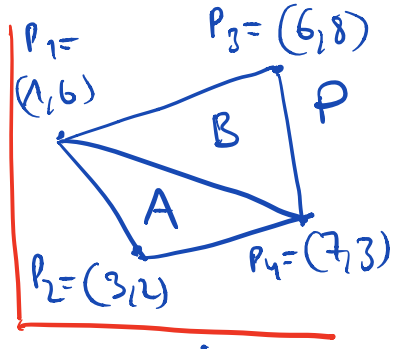
c) SANT (för alla val av u_1, u_2, u_3)

d) SANT Värdemängden är ℓ som har dim 1

e) FALSKT Entydig h-invers finns bara för kvadratiska matriser.

f) FALSKT Planen skär ty dessa normalvektorer

6 a)



Area (P) =
Area (A) + Area (B)

A spänns av $\overrightarrow{P_1P_2}$ & $\overrightarrow{P_1P_4}$

B —— " —— $\overrightarrow{P_1P_3}$ & $\overrightarrow{P_1P_4}$

<u>Räkna</u>: $\overrightarrow{P_1P_2} = (3,2)-(1,6) = (2,-4)$

$\overrightarrow{P_1P_3} = (6,8)-(1,6) = (5,2)$

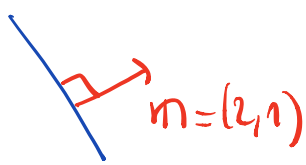
$\overrightarrow{P_1P_4} = (7,3)-(1,6) = (6,-3)$

$$\text{Area}(A) = \frac{1}{2}\left|\left|\overrightarrow{P_1P_2}\ \overrightarrow{P_1P_4}\right|\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|18| = 9$$

$$\text{Area}(B) = \frac{1}{2}\left|\left|\overrightarrow{P_1P_3}\ \overrightarrow{P_1P_4}\right|\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|-27| = \frac{27}{2}$$

Alltså $\underline{\underline{\text{Area}(P)}} = 9 + \frac{27}{2} = \underline{\underline{\frac{45}{2}}}$

b) $\ell : t(1,-2)\ t \in \mathbb{R}$



<u>Obs</u> ortogonal projektion på ℓ kommer avbildas efterson ℓ går genom origo.
Bestäm avbildningsmatris A_f

<u>Obs</u> $n = (2,1) \perp \ell$

Ortogonal projektion på n : $v \mapsto \frac{v \cdot n}{|n|^2} n$

f - ortogonal projektion på ℓ : $v \mapsto v - \frac{v \cdot n}{|n|^2} n$

$$f: e_1 = (1,0) \mapsto (1,0) - \frac{(1,0)\cdot(2,1)}{(2,1)\cdot(2,1)}(2,1) = (1,0) - \frac{2}{5}(2,1) =$$

$$\frac{1}{5}(1,-2)$$

$$f: e_2 = (0,1) \mapsto (0,1) - \frac{(0,1)\cdot(2,1)}{5}(2,1) = (0,1) - \frac{1}{5}(2,1) =$$

$$\frac{1}{5}(-2,4)$$

Alltså $A_f = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

Var hamnar punkterna?

$A_f\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -11 \\ 22 \end{bmatrix}$, $A_f\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $A_f\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -10 \\ 20 \end{bmatrix}$

$A_f\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ Extrempunkter: $11/5(-1,2)$ och $1/5\,(1,-2)$

Alltså $\underline{\underline{f(P) = \text{linjesegmentet med ändpunkter}}}$

$\underline{\underline{11/5(-1,2) \ \& \ 1/5\,(1,-2)}}$

---

7) Se Kapitel 7 Sparr

8) Se Kapitel 4 & 5 Sparr