MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa
Datum: 2018-10-27 kl. 14.00 - 18.00
Telefonvakt: Oskar Allerbo
Telefon: 031-772 67 92

TMA660 Linjär algebra och geometri F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.
Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. (a) Beräkna determinanterna $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$ och $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 6 & 0 \end{vmatrix}$.

(b) Hur många lösningar har ekvationssystemen

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 2 \end{cases} \quad \text{respektive} \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases} ?$$

(6p)

2. (a) Låt $p(z) = z^3 - z^2 + 9z - 9$ och $q(z) = z^2 - 3z + 2$. Skriv p och q på formen $c(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)$, där $c, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ är komplexa tal.
Tips: p har åtminstone ett rent imaginärt nollställe.

(b) Lös ekvationssystemet $\begin{cases} z^3 - z^2 + 9z - 9 = 0 \\ z^2 - 3z + 2 = 0 \end{cases}$. (6 p)

3. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0. (7 p)

(a) Nollrummet till $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 11 & 2 \\ 3 & 4 & 7 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ är $\{\mathbf{0}\}$.

(b) För alla vektorer $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4 \in \mathbb{R}^3$ gäller att

$$(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) \times (\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_4) + (\mathbf{u}_4 \times \mathbf{u}_3) \times (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_1) = \mathbf{0}.$$

(c) Antag att A, B och C är (3×3)-matriser sådana att $AB = AC$. Då är $B = C$.

(d) Låt P vara parallellepipeden som spänns av vektorerna $(1, -2, 3)$, $(4, 7, 0)$ och $(2, 0, 4)$. Då är volymen av P lika med $24/5$.

(e) Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara moturs rotation av $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ med θ radianer. Låt A vara avbildningsmatrisen till f. Då är $\det(A) = 1$.

(f) Antag att A är en (4×3)-matris vars rang är 3. Då är kolonnerna i A linjärt oberoende.

(g) Antag att A och B är $(n \times n)$-matriser sådana att $AB = I$. Då gäller att $BA = I$.

4. Betrakta de linjära avbildningarna

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \mathbf{u} \mapsto$ ortogonal projektion av $\mathbf{u}$ på $(1, 0, 0)$,

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto t(0, 1, 0)$ och

$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$ roterad $3\pi/4$ radianer moturs.

Låt A_f, A_g och A_h vara avbildningsmatriserna till f, g respektive h. För var och en av matriserna A_f, A_g och A_h avgör om den har en högerinvers och om den har en vänsterinvers. (6 p)

5. Betrakta planen $\Pi_1 = \{x+2y+3z = 6\}$, $\Pi_2 = \{x+2y+4z = 6\}$ och $\Pi_3 = \{2x+4y+6z = 6\}$ i rummet. Bestäm avstånden mellan Π_1 och Π_2, mellan Π_1 och Π_3 samt mellan Π_2 och Π_3. (7 p)

6. Antag att A är en kvadratisk matris som uppfyller

$$A^2 - 3A + 2I = \mathbf{0}.$$

(a) Är det utifrån den här informationen möjligt att avgöra om A är inverterbar? Gör det i så fall. Visa annars med motexempel att det inte är möjligt.

(b) Är det utifrån den här informationen möjligt att bestämma determinanten av A? Gör det i så fall. Visa annars med motexempel att det inte är möjligt. (6 p)

7. (a) Visa att matrismultiplikation är associativ, det vill säga att $(AB)C = A(BC)$.

(b) Visa att kryssprodukt inte är associativ, det vill säga att

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} \neq \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

i allmänhet. (6 p)

8. Låt $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$. Antag att $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ spänner upp $\mathbb{R}^n$ och är linjärt oberoende. Visa att det för varje $\mathbf{u}$ i $\mathbb{R}^n$ finns entydigt bestämda reella tal $u_1, \ldots, u_n$ så att

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{v}_1 + \cdots + u_n\mathbf{v}_n.$$

(6 p)

Lycka till!

Elizabeth

TMA 660 Linjär algebra och geometri 27/10 18, lösningar

1a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} \overset{(-1)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & 0 \end{vmatrix} \overset{2}{=}$

utveckla längs rad 1

$6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & 0 \\ 5 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-1)^{1+3} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -6(35-30) = \underline{\underline{-30}}$

$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \underline{\underline{0}}$ ty 2 rader lika.

b) Låt A = första matrisen vi tog det av B = andra matrisen.
Då första ekvationssystemet : $A\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ har $\underline{\underline{\text{en}}}$ unik lösning eftersom det $A \neq 0 \Leftrightarrow A$ inverterbar.

Andra ekvationssystemet $B\mathbf{X} = \mathbf{0}$ har $\underline{\underline{\infty}}$ många lösningar eftersom det $B \neq 0 \Leftrightarrow B$ ej inverterbar

---

2 a) Givet: p har minst ett rent imaginärt nollställe. Ansätt $z = ai$.
Då $p(ai) = -a^3 i + a^2 + 9ai - 9$ $\quad p(ai) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Im} = 0 \Leftrightarrow -a^3 + 9a = 0 \\ \operatorname{Re} = 0 \Leftrightarrow a^2 - 9 = 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow a = \pm 3$

Alltså $p(z)$ har faktor $(z-3i)(z+3i) = z^2+9$

Dela med denna:

$$\begin{array}{l} \quad z - 1 \\ \hline z^3 - z^2 + 9z - 9 \;\big|\; z^2+9 \\ -(z^3 + 9z) \\ \hline \quad -z^2 - 9 \end{array}$$

Alltså $\underline{p(z) = (z-3i)(z+3i)(z-1)}$

$q(z)$ — kvadratkomplettera, gissa rötter, eller se direkt att
$\underline{\underline{q(z) = (z-2)(z-1)}}$

b) $\begin{cases} z^3 - z^2 + 9z - 9 = 0 \\ z^2 - 3z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p(z) = 0 \\ q(z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} z = 1,\ z = \pm 3i \\ \text{och} \\ z = 1 \quad z = 2 \end{array} \Leftrightarrow \underline{\underline{z = 1}}$ (enda gemensamma lösn.)

---

3 a) FALSKT (nolldim $A = 4 - \operatorname{rang}(A) \geq 4 - 3 \geq 1$)

b) SANT ty $(\mathbf{u}_4 \times \mathbf{u}_3) \times (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_1) = (-1)^2 (\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_4) \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) = -(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) \times (\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_4)$

c) FALSKT Tag t ex $A = \mathbf{0}$. Då är $AB = AC$ för alla val av B, C.

d) FALSKT $\operatorname{Vol}(P) = \pm \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 7 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ heltal ty heltal i determinanten

e) SANT $\det A = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

f) SANT $\operatorname{rang} A = 3 \Leftrightarrow 3$ linjärt oberoende kolonner

g) SANT För kvadratiska matriser är varje högerinvers en vänsterinvers.

4) Minns A_f har invers $\iff$ f bijektiv
vänsterinvers $\iff$ f injektiv
högerinvers $\iff$ f surjektiv

Om A_f $n\times n$ $\iff$ $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ så ~~kan~~ har A h-invers omm A har v-invers.

f: ej surjektiv ty $f(\mathbb{R}^3)$ = linjen $t(1,0,0)$ $t\in\mathbb{R}$.
Alltså A_f saknar högerinvers och eftersom A_f 3×3 så saknar A_f vänsterinv.

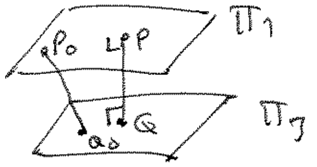
g: ej surjektiv $f(\mathbb{R})$ = linjen $t(0,1,0)$ $t\in\mathbb{R}$. Alltså A_g saknar högerinvers
injektiv ty $g(t)=g(t') \iff (0,t,0) \iff (0,t',0) \iff t=t'$
Alltså: har A_g vänsterinvers.

h: bijektiv, inversen är $h^{-1}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x$ roterad $\frac{3\pi}{4}$ rad medurs
Alltså har A_h invers speciellt har A_h höger- och vänsterinvers.

---

5) Minns avstånd(Π_j,Π_k) = minsta avstånd mellan $P\in\Pi_j$ och $Q\in\Pi_k$.
Speciellt är avstånd$(\Pi_j,\Pi_k)=0$ omm Π_j och Π_k skär.
För att avgöra om planen skär, hitta normalvektorn:
Minns: $n=(a,b,c)\perp\Pi=\{ax+by+cz=d\}$
Alltså $n_1=(1,2,3)\perp\Pi_1$, $n_2=(1,2,4)\perp\Pi_2$, $n_3=(2,4,6)\perp\Pi_3$
Obs $n_3=2n_1$ så $n_1 \parallel n_3$ men n_2 ej parallell med n_1, n_3.
$\implies$ avstånd$(\Pi_1,\Pi_2)=0$, avst.$(\Pi_2,\Pi_3)=0$

Återstår att bestämma avstånd(Π_1,Π_3).
Minns avstånd mellan $P\in\Pi_1$ och $Q\in\Pi_3$ är som minst om $\overrightarrow{PQ}\perp\Pi_1,\Pi_3$.



För att hitta $\overrightarrow{PQ}$ tag $P_0\in\Pi_1$ & $Q_0\in\Pi_3$. Då är $\overrightarrow{PQ}$ ortogonal proj av $\overrightarrow{P_0Q_0}$ på n_1 och alltså:

$$\text{avstånd}(\Pi_1,\Pi_3)=\left|\begin{array}{c}\text{orto proj av}\\ \overrightarrow{P_0Q_0}\text{ på } n_1\end{array}\right| = \left|\frac{\overrightarrow{P_0Q_0}\cdot n_1}{|n_1|^2}n_1\right| = \frac{|\overrightarrow{P_0Q_0}\cdot n_1|}{|n_1|}$$

Kan ta $P_0=(1,1,1)\in\Pi_1$ och $Q_0=(0,0,1)\in\Pi_2$. Då $\overrightarrow{P_0Q_0}=(-1,-1,0)$
$\implies \overrightarrow{P_0Q_0}\cdot n_1=(-1,-1,0)\cdot(1,2,3)=-3$, $|n_1|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$

avstånd$(\Pi_1,\Pi_3)=\frac{|-3|}{\sqrt{14}}=\underline{\underline{\frac{3}{\sqrt{14}}}}$

---

6 a) $A^2-3A+2I=0 \iff \frac{1}{2}(3I-A)A=I \iff$ A inv.bar med invers $\frac{1}{2}(3I-A)$

b) Ej möjligt. Motex $n=1$. $A=[a]$ Då $A^2-3A+2I=0 \iff a^2-3a+2=0 \iff$
$a=2$ eller $a=1 \iff \det A=2$ eller $\det A=1$

---

7 a) Se Sparr kap 7.2 b) Se Sparr kap 5

---

8) Se Sparr kap 6 + ant. på hemsidan