MATEMATIK | **Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa**

Chalmers tekniska högskola | Datum: 2017-12-19 kl. 14.00 - 18.00

Tentamen | Telefonvakt: Felix Held

Telefon: 031-772 67 92

TMA660 Linjär algebra och geometri F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.
Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$.

(a) Beräkna determinanterna av A och B.

(b) Låt $\mathbf{x} = (1, 1, -1, 0)$.
Avgör om $\mathbf{x}$ ligger i kolonnrummet till A, om $\mathbf{x}$ ligger i nollrummet till A samt om $\mathbf{x}$ ligger i nollrummet till B. (8 p)

2. För polynomen $p(z)$ givna nedan, lös ekvationen $p(z) = 0$ och plotta lösningarna i det komplexa talplanet; i (c) räcker det med en ungefärlig bild. I (a) och (b) ange lösningarna på formen $a + bi$, där $a, b \in \mathbb{R}$. I (c) går det bra att ange lösningarna på polär form.

(a) $p(z) = z^4 - 16$

(b) $p(z) = z^8 - 64$

(c) $p(z) = z^{2^n} - 2^{2^n}$ (6 p)

3. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 p. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0. (6 p)

(a) Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara spegling in planet $\Pi : x - y - 3z = 0$. Då är f injektiv.

(b) Låt A och B vara $(n \times n)$-matriser. Då gäller att om AB är inverterbar så är BA inverterbar.

(c) Den ortogonala projektionen av vektorn $(1, 2, 3)$ på planet $\Pi : x + z = 0$ är $(1, 0, 3)$.

(d) Vektorn $\mathbf{b} = (1, 1, 0)$ ligger i kolonnrummet till $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(e) Låt A vara en kvadratisk matris. Då gäller att $\det(A) = \pm 1$ om och endast om A är ortogonal.

(f) Det finns oändligt många vektorer $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ så att $\mathbf{u} \times (1, 1, 0) = \mathbf{0}$ and $\mathbf{u} \times (1, 0, 1) = \mathbf{0}$.

4. Lös systemet av matrisekvationer

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ DX + EY = F \end{cases},$$

där $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ och $F = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

(6 p)

5. Betrakta linjerna

$$\begin{aligned}
\ell_1 &: (x,y,z) = (12,0,-1) + t_1(0,1,0), \qquad t_1 \in \mathbb{R} \\
\ell_2 &: (x,y,z) = (4,-5,5) + t_2(1,-5,3), \qquad t_2 \in \mathbb{R} \\
\ell_3 &: (x,y,z) = (-4,1,1) + t_3(1,2,3), \qquad t_3 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Bestäm vilka två av de tre linjerna som ligger närmast varandra, det vill säga mellan vilka två linjer avståndet är som minst. (6 p)

6. Låt A vara en $n \times n$-matris där alla matriselement är heltal. Antag att determinanten av A är 1. Visa att alla matriselement i A^{-1} är heltal. (6 p)

7. Låt A vara en $n \times n$-matris.

(a) Definiera vad det innebär att A är inverterbar.

(b) Visa att om A har en invers så är denna entydigt bestämd. (6 p)

8. Låt $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ och $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ vara baser för $\mathbb{R}^n$. Antag att

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\mathbf{e}'_1 &=& s_{11}\mathbf{e}_1 + s_{21}\mathbf{e}_2 + \cdots + s_{n1}\mathbf{e}_n \\
\mathbf{e}'_2 &=& s_{12}\mathbf{e}_1 + s_{22}\mathbf{e}_2 + \cdots + s_{n2}\mathbf{e}_n \\
 & \vdots & \\
\mathbf{e}'_n &=& s_{1n}\mathbf{e}_1 + s_{2n}\mathbf{e}_2 + \cdots + s_{nn}\mathbf{e}_n
\end{array}\right. .$$

Antag att vektorn $\mathbf{x}$ har koordinater $x_1, x_2, \ldots, x_n$ och $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ med avseende på basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ respektive $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$, d v s

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n = x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2 + \cdots + x'_n\mathbf{e}'_n.$$

Härled ett samband mellan $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ och $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$. (6 p)

Lycka till!

Elizabeth

TMA660 Linjär algebra och geometri 19/12 17, lösningar ①

1)a)
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} (-1)(-3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{Utv. rad 4}}{=} (-1)^{4+2}\cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{Utv. rad 3}}{=}$$

$$2\cdot(-1)^{3+2}\cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2(2-4) = \underline{4}$$

$|B| = \underline{\underline{0}}$ ty rad 3 = 2 · rad 1

b) Minns (huvudsatsen) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \text{Kolonn} A = \mathbb{R}^4 \Leftrightarrow \text{NM} A = \{0\}$

Alltså följer speciellt att $\underline{\underline{X \in \text{Kolonn} A}}$, $\underline{\underline{X \notin \text{NM} A}}$

$X \in \text{NM} B$ omm $BX = 0$.

Kolla: $BX = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ Alltså $\underline{\underline{X \notin \text{NM} B}}$

2a) $p(z) = 0 \Leftrightarrow 0 = z^4 - 16 = (z^2-4)(z^2+4) = (z-2)(z+2)(z-2i)(z+2i)$

Lösn. $z_1 = 2,\ z_2 = -2,\ z_3 = -2i,\ z_4 = 2i$

b) Ansätt $z = re^{i\theta}$, $r>0$. Då $p(z) = 0 \Leftrightarrow r^8 e^{i8\theta} = 64 e^0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} r^8 = (64) = 2^6 \Leftrightarrow r = 2^{6/8} = 2^{3/4} \\ 8\theta = 2\pi k \Leftrightarrow \theta = \frac{2\pi}{8}k,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$ $k = 0, \ldots, 7$ ger olika lösn.

$z_1 = 2^{3/4}e^0 = 2^{3/4}$, $z_2 = 2^{3/4}e^{i\pi/4} = 2^{3/4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2^{1/4}(1+i)$,

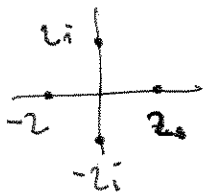
$z_3 = 2^{3/4}e^{\pi/2} = 2^{3/4}i$, $z_4 = \ldots = 2^{1/4}(-1+i)$, $z_5 = -2^{3/4}$, $z_6 = 2^{1/4}(-1-i)$,

$z_7 = -2^{3/4}i$ $z_8 = 2^{1/4}(1-i)$

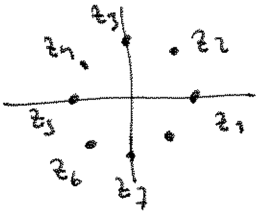
c) Ansätt $z = re^{i\theta}$ $r>0$ Då $p(z) = 0 \Leftrightarrow r^{2^n} e^{i2^n\theta} = 2^{2^n} e^0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{2\pi k}{2^n} \end{cases}$$ $k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$ ger olika lösningar $z = 2e^{i\frac{\pi k}{2^{n-1}}}$

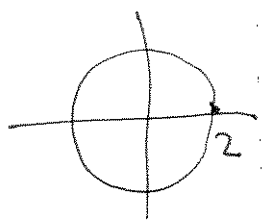
Plotten: a)



b)



c)



---

3 a) SANT spegling surjektiv

b) SANT BA inverterbar $\Leftrightarrow \det BA = \det AB \neq 0 \Leftrightarrow$ AB inverterbar

c) FALSKT (1,0,3) ligger inte i Π

d) SANT T ex $(1,1,0) = \frac{1}{4}\left(2(1,0,0)+(2,4,0)\right)$

e) FALSKT $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1/2\end{bmatrix}$ har determinant 1, men är ej ortogonal.

f) FALSKT $\left.\begin{array}{l} u\times(1,1,0)=0 \Leftrightarrow u \parallel (1,1,0)\\ u\times(1,0,1)=0 \Leftrightarrow u \parallel (1,0,1)\end{array}\right\}$ Endast 0 är parallell med både (1,1,0) & (1,0,1)

---

4) $\begin{cases} AX+BY=C & (1)\\ DX+EY=F & (2)\end{cases}$ Obs A inverterbar med invers $A^{-1}=\begin{bmatrix}7 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}$

Strategi: Lägg $-DA^{-1}\cdot$ rad 1 till rad 2: Ny (2): $(E-DA^{-1}B)Y = F-DA^{-1}C$ (2')

$$DA^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 4 & -1\end{bmatrix}$$

$$E-DA^{-1}B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & -1\\ 4 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$F-DA^{-1}C=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & -1\\ 4 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\ 11 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

Obs: $(E-DA^{-1}B)$ inverterbar med invers $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

Nu ger (2'): $Y=(E-DA^{-1}B)^{-1}(F-DA^{-1}C)=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$

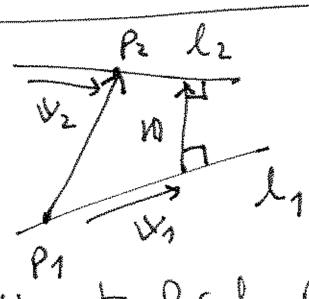
Nu ger (1): $X=A^{-1}(C-BY)=\begin{bmatrix}7 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}3 & 0\\ 11 & 1\end{bmatrix}-\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}-2 & -2\\ -5 & -5\end{bmatrix}}\right)=$

$$\begin{bmatrix}7 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 2\\ 16 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

Slutsats: $\underline{\underline{X=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix} \quad Y=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}}}$

---

5) $l_1: (x,y,z) = (12,0,1) + t_1 v_1,\ t_1\in\mathbb{R}\quad v_1=(0,1,0)$
$l_2: (x,y,z) = (4,-5,5) + t_2 v_2,\ t_2\in\mathbb{R}\quad v_2=(1,-5,3)$
$l_3: (x,y,z) = (4,1,1) + t_3 v_3,\ t_3\in\mathbb{R}\quad v_3=(1,2,3)$



Minns: För att beräkna avståndet mellan l_1 & l_2, givet att v_1 & v_2 ej parallella, tag $P_1\in l_1$, $P_2\in l_2$ och $n\perp v_1$ & v_2. Då avstånd$(l_1,l_2) = |\text{orto proj av } \overrightarrow{P_1P_2} \text{ på } n|$

Obs inga av v_1, v_2, v_3 är parallella.

Hitta $n\perp v_1, v_2$: $n = v_1\times v_2 = \begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -5 & 3\end{vmatrix} = (3,0,-1)$

5) (forts.) Obs $\mathbb{n} \cdot \mathbb{v}_3 = 0$ så $\mathbb{n} \perp \mathbb{v}_3$ osv.

Tag $P_j \in l_j$, t.ex genom att välja $t_j = 0 \Rightarrow P_1 = (12,0,1)$, $P_2 = (4,-5,5)$, $P_3 = (-4,1,1)$

$\overrightarrow{P_1P_2} = (-8,-5,6)$, $\overrightarrow{P_1P_3} = (-16,1,2)$, $\overrightarrow{P_2P_3} = (-8,6,-4)$

Minns: Ortogonal proj av $\mathbb{v}$ på $\mathbb{n}$ ges av $\frac{\mathbb{v} \cdot \mathbb{n}}{|\mathbb{n}|^2}\mathbb{n}$

Obs: För att avgöra mellan vilka två linjer l_i & l_j som avståndet är som minst räcker det att avgöra för vilka linjer $|\overrightarrow{P_iP_j} \cdot \mathbb{n}|$ är som minst.

$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \mathbb{n} = (-8,-5,6) \cdot (3,0,-1) = -24 - 6 = -30 \quad |\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \mathbb{n}| = 30$

$\overrightarrow{P_1P_3} \cdot \mathbb{n} = (-16,1,2) \cdot (3,0,-1) = -48 - 2 = -50 \quad |\overrightarrow{P_1P_3} \cdot \mathbb{n}| = 50$

$\overrightarrow{P_2P_3} \cdot \mathbb{n} = (-8,6,-4) \cdot (3,0,-1) = -24 + 4 = -20 \quad |\overrightarrow{P_2P_3} \cdot \mathbb{n}| = 20$

Slutsats l_2 & l_3 ligger närmast.

---

6) Om A är inverterbar så är $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$.

Speciellt om $\det A = 1$ så är $A^{-1} = \operatorname{adj} A$.

Minns att $(\operatorname{adj} A)_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$, där D_{ij} är underdeterminanten till A där man strukit rad i, kolonn j.

Om A's matriselement är heltal så är D_{ij} heltal, och alltså är matriselementen i $A^{-1} = \operatorname{adj} A$ heltal. $\square$

---

7) Se Sparr, Kapitel 7.5 (Def 5 & Lma 2)

---

8) Se Sparr, Kapitel 7.6 (Sats 6)