MATEMATIK | **Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2017-10-23 kl. 14.00 - 18.00
Tentamen | Telefonvakt: Elizabeth Wulcan
Telefon: 031-772 53 47

TMA660 Linjär algebra och geometri F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.
Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Låt A vara matrisen $\begin{bmatrix} a^2 & 1 & 1 \\ a^2 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

För alla värden på a, bestäm A's rang, nolldimension, kolonnrum och nollrum. (8 p)

2. Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara ortogonal projektion på linjen $\ell : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

(a) Bestäm avbildningsmatrisen A för f.

(b) Beräkna A^2. Beräkna A^3.

(c) Är A inverterbar? Bestäm i så fall A^{-1}.

(d) För vilka $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ gäller att $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$? (7 p)

3. Avgör om planen $\Pi_1 : \begin{cases} x = 1 + 4s + 7t \\ y = 2 + 5s + 8t \\ z = 3 + 6s + 9t \end{cases} \quad , \quad s, t \in \mathbb{R}$

och $\Pi_2 = \{x - 2y + z = 2\}$ är parallella. (5 p)

4. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 p. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0. (6 p)

(a) Antag att $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ är linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^3$. Då är $\mathbf{u}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ och $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ en bas för $\mathbb{R}^3$.

(b) Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara spegling i planet $x - y - 3z = 0$. Då är f en isometri.

(c) Ekvationssystemet $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 6 \end{cases}$ har en unik lösning.

(d) Antag att $p(z)$ är ett polynom med reella koefficienter. Då har $p(z)$ åtminstone ett reellt nollställe.

(e) För alla vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ gäller att

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{w} \times \mathbf{x}) = (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \times (\mathbf{x} \times \mathbf{w}).$$

(f) Låt A vara en $(n \times n)$-matris. Antag att $|A| = 0$. Då gäller för varje $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ att $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbart.

5. Minns att H är en högerinvers till A om $AH = I$.

Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ och $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Avgör om A har en högerinvers.

(b) Avgör om AB har en högerinvers.

(c) Avgör om ABC har en högerinvers. (6 p)

6. Låt T vara en tetraeder i rummet med hörn i punkterna P_1, P_2, P_3 och P_4. Låt M vara T's tyngdpunkt och låt S vara tetraedern med hörn i P_1, P_2, P_3 och M. Antag att volymen av T är 1. Beräkna volymen av S.

Tips: Minns att M uppfyller

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}\big(\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} + \overrightarrow{OP_4}\big),$$

där O är en godtycklig punkt i rummet. (6 p)

7. (a) Definiera den komplexa exponentialfunktionen.

(b) Visa att $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$. (6 p)

8. Antag att $\tilde{\mathbf{x}}$ är en lösning till ekvationen

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}.$$

Visa att då gäller för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ att

$$|A\mathbf{x} - \mathbf{b}| \geq |A\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}|.$$

(6 p)

Lycka till!

Elizabeth

TMA 660 Linjär algebra och geometri 23/10 17, lösningar

1) $|A| = \begin{vmatrix} a^2 & 1 & 1 \\ a^2 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2+a^2+a^2-a^3-a^2-a = -a(a^2-2a+1) = -a(a-1)^2$

Om $a \neq 0,1$ så $|A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ inverterbar $\Leftrightarrow$ Kolonn$(A) = \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow$ Noll$(A) = \{0\}$

(huvudsatsen) $\Leftrightarrow$ rang$(A)=3 \Leftrightarrow$ nolldim$(A)=0$

$a=0$: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Klart att $(1,1,1)$, $(1,0,1)$ linj ober (ej parallella)

$\therefore$ Kolonn A = span$((1,1,1),(1,0,1))$, rang $A = 2$

$\xRightarrow{\text{dimsatsen}}$ nolldim$(A) = 3 - $rang$(A) = 3-2 = 1$

Alltså dim(Noll(A)) = 1 och alltså räcker hitta en nollskild vektor i Noll(A). Obs: $A\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = 0$ Alltså Noll(A) = span$((1,0,0))$

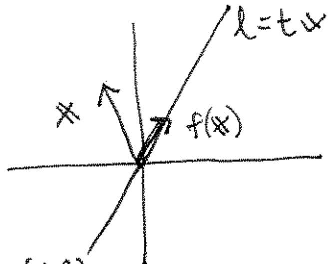
$a=1$: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Obs alla kolonner i A samma. Alltså Kolonn A = span$((1,1,1))$ och rang$(A)=1$

Noll$(A) = \{$lösn till $A\mathbf{x}=0\} = \{\mathbf{x}$ så att $x_1+x_2+x_3=0\}$,

dvs Noll(A) är planet $\{x_1+x_2+x_3=0\}$ nolldim$(A)=2$

2a) f orto proj på $l: t\mathbf{v}$, där $\mathbf{v}=(1,2)$

Minns avb. matris $A = [f(\mathbf{e}_1)\ f(\mathbf{e}_2)]$



Minns orto proj ges av $\mathbf{x} \mapsto \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$

Alltså $f(\mathbf{e}_1) = \frac{(1,0)\cdot(1,2)}{1^2+2^2}(1,2) = \frac{1}{5}(1,2)$ $f(\mathbf{e}_2) = \frac{(0,1)\cdot(1,2)}{5}(1,2) = \frac{2}{5}(1,2)$

och $A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

b) f orto proj uppfyller $f\circ f\circ\ldots\circ f = f$. Alltså $A^r = A$ för alla r, spec $r=2,3$.

c) Proj ej inverterbar. Alltså A ej inverterbar. Inses t ex genom att proj ej injektiv. Bilden av $\mathbb{R}^2$ är linjen l.

d) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ omm $\mathbf{x} \in l$.

---

3) Minns: två plan parallella omm deras normalvektorer är parallella.

Nu: $\Pi_1 = P + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ där $\mathbf{u}=(4,5,6)$, $\mathbf{v}=(7,8,9)$

$\Pi_2 = \{x-2y+z=2\}$, normalvektor $\mathbf{n}=(1,-2,1)$

Π_1 & Π_2 parallella omm $\mathbf{n}$ ortogonal mot $\mathbf{u}$ & $\mathbf{v}$.

Kolla: $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u} = (1,-2,1)\cdot(4,5,6) = 4-10+6=0$ $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v} = (1,-2,1)\cdot(7,8,9) = 7-16+9=0$

Alltså $\mathbf{n}\perp\mathbf{u}$ & $\mathbf{n}\perp\mathbf{v}$. Alltså Π_1 & Π_2 parallella.

4a) SANT $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \mathbf{u}, \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}$ linj ober ~~och~~ alltså bas

b) SANT spegling bevarar längd.

4c) FALSKT nolldim (koeff.matrisen) $\geq$ #kolumner − #rader $= 4-3 = 1$

d) FALSKT t ex $p(z) = z^2+1$ har reella koeff, men saknar reell nollställe

e) SANT $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times(\mathbf{w}\times\mathbf{x}) \underset{\text{antikomm.}}{=} (-\mathbf{v}\times\mathbf{u})\times(-\mathbf{x}\times\mathbf{w}) = (\mathbf{v}\times\mathbf{u})\times(\mathbf{x}\times\mathbf{w})$

f) FALSKT $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ lösb $\forall \mathbf{b} \Leftrightarrow$ kolumn $A = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow |A|\neq 0$

5a) Obs A har underdet $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot 5 - 4\cdot 5 = -10 \neq 0$ (Lma 3, s 132 Sparr)

Alltså rang $A = 3 \Leftrightarrow$ kolumn $A = \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ lösb $\forall \mathbf{b}\in\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ A har högerinvers

b) $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ B inverterbar. Låt H vara en högerinvers till A. Då $I = AH = ABB^{-1}H$. Alltså har AB en högerinvers, nämligen $B^{-1}H$.

c) Obs: C har bara en linj. oberoende rad, nämligen $(1,1,1,1)$.
Obs Raden i ABC är linj. komb. av raden i C, dvs av $(1,1,1,1)$
$\Rightarrow$ Alla kolumner i ABC lika $\Rightarrow$ dessa kan ej spänna hela
$\mathbb{R}^3 =$ kolumn (I) $\therefore$ kan ej finnas H så att $ABCH = I$
(kolumner i ABCH linj. komb av kolumner i ABC).
Slutsats: ABC saknar högerinvers.

---

6) Obs $\mathrm{Vol}(T) = \left|\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{P_4P_1}\ \overrightarrow{P_4P_2}\ \overrightarrow{P_4P_3}\right|\right|$ $\quad \mathrm{Vol}(S) = \left|\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{MP_1}\ \overrightarrow{MP_2}\ \overrightarrow{MP_3}\right|\right|$

Låt $\mathbf{v}_j = \overrightarrow{P_4P_j}$ $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_4M}$ Då $\overrightarrow{MP_j} = \overrightarrow{P_4P_j} - \overrightarrow{P_4M} = \mathbf{v}_j - \mathbf{u}$ och

$$\left|\overrightarrow{MP_1}\ \overrightarrow{MP_2}\ \overrightarrow{MP_3}\right| = \left|\mathbf{v}_1-\mathbf{u}\ \ \mathbf{v}_2-\mathbf{u}\ \ \mathbf{v}_3-\mathbf{u}\right| = |\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3| - |\mathbf{u}\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3| - |\mathbf{v}_1\ \mathbf{u}\ \mathbf{v}_3| - |\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{u}|$$

det linjär i kolumner, $|\mathbf{v}\ \mathbf{u}\ \mathbf{u}| = 0$

Relatera $\mathbf{u}$ till $\mathbf{v}_j$:
Minns $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}+\overrightarrow{OP_4})$

Sätt $O = P_4$ Då $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_4M} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{P_4P_1}+\overrightarrow{P_4P_2}+\overrightarrow{P_4P_3}+\mathbf{0}) = \frac{1}{4}(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3)$

Nu $|\mathbf{u}\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3| = \left|\frac{1}{4}(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3)\ \ \mathbf{v}_2\ \ \mathbf{v}_3\right| = \frac{1}{4}|\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3|$

På samma sätt $|\mathbf{v}_1\ \mathbf{u}\ \mathbf{v}_3| = |\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{u}| = \frac{1}{4}|\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3|$

Alltså $\left|\overrightarrow{MP_1}\ \overrightarrow{MP_2}\ \overrightarrow{MP_3}\right| = |\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3| - 3\left(\frac{1}{4}|\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3|\right) = \frac{1}{4}|\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3| = \frac{1}{4}\left|\overrightarrow{P_4P_1}\ \overrightarrow{P_4P_2}\ \overrightarrow{P_4P_3}\right|$

och alltså $\mathrm{Vol}(S) = \frac{1}{4}\mathrm{Vol}(T) = \frac{1}{4}\cdot 1 = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$

---

7) Se Persson-Böiers s479

---

8) Se ans. på kurshemsidan