MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa
Datum: 2016-12-20 kl. 14.00 - 18.00
Telefonvakt: Raad Salman
Telefon: 031-772 5325

TMA660 Linjär algebra och geometri F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.
Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Låt P vara ett parallellogram med hörn i $(1,1)$, $(4,2)$, $(5,4)$ och $(2,3)$.

(a) Beräkna arean av P. Vad är längderna på diagonalerna i P?

(b) Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning vars matris är $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Bestäm bilden $f(P)$ av P under f. Vad är arean av $f(P)$? Vad är längderna på diagonalerna i $f(P)$?

(c) Låt $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara skalning med en faktor 3. Bestäm bilden $g(P)$ av P under g. Vad är arean av $g(P)$? Vad är längderna på diagonalerna i $g(P)$? (8 p)

2. Lös ekvationen

$$z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2 = 0.$$

Tips: Det finns minst en rent imaginär rot. (7 p)

3. Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara ortogonal projektion på planet $\Pi = \{x - y - z = 0\}$. Låt $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ vara standardbasen $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ och låt

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \end{cases}.$$

(a) Bestäm avbildningsmatrisen för f (med avseende på standardbasen $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$).

(b) Visa att $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$ är en bas för $\mathbb{R}^3$.

(c) Bestäm avbildningsmatrisen för f med avseende på basen $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$. (7 p)

Tips: Minns att avbildningsmatrisen för en linjär avbildning f med avseende på basen $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ för $\mathbb{R}^3$ är den matris A som uppfyller att

$$A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix},$$

där (ξ_1, ξ_2, ξ_3) och (η_1, η_2, η_3) är koordinaterna för $\mathbf{x}$ respektive $f(\mathbf{x})$ i basen $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$.

4. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ DX + EY = F \end{cases},$$

där $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, och där X och Y är obekanta 2×2-matriser. (6 p)

5. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0. (6 p)

(a) Vektorn $\mathbf{x} = (2, 1, 0)$ är en lösning till ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$.

(b) Vektorerna $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1)$ är positivt orienterade.

(c) Antag att A är en $(n \times n)$-matris. Då är A inverterbar om och endast om $A^T A$ är inverterbar.

(d) Matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ har nolldimension 0.

(e) Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara ortogonal projektion på planet $x - y - 3z = 0$. Det gäller att f är en isometri.

(f) Antag att $|A| = 0$. Då saknar $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösning för något $\mathbf{b}$.

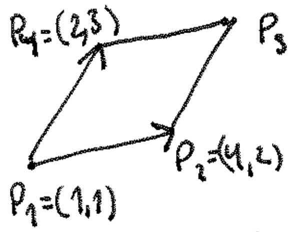
6. Låt A vara $n \times n$-matrisen med matriselementen $a_{ij} = i + j$. Beräkna $\det(A)$ för alla $n \geq 1$. (5 p)

7. Formulera och bevisa den distributiva lagen för vektorprodukt (inklusive lemmat). (6 p)

8. Antag att $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ är linjärt oberoende och att de spänner upp $\mathbb{R}^n$. Låt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Visa att det finns entydigt bestämda reella tal $x_1, \ldots, x_n$ så att $\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$. (5 p)

Lycka till!
Elizabeth

1 a) P



Obs $\overrightarrow{P_1P_2} = (4,2)-(1,1)=(3,1)$
$\overrightarrow{P_1P_4} = \dots = (1,2)$

$\underline{\text{Area}(P)} = \left| \det\begin{bmatrix} \overrightarrow{P_1P_2} & \overrightarrow{P_1P_4} \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right| = |6-1| = \underline{\underline{5}}$

Diagonaler: $\overrightarrow{P_1P_3} = (4,3)$ har längd $|\overrightarrow{P_1P_3}| = |(4,3)| = \sqrt{4^2+3^2} = \underline{\underline{5}}$
$\overrightarrow{P_2P_4} = (-2,1)$ — " — $|\overrightarrow{P_2P_4}| = |(-2,1)| = \sqrt{(-2)^2+1^2} = \underline{\underline{\sqrt{5}}}$

b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \mathbf{x} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

$f(\overrightarrow{OP_1}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $f(\overrightarrow{OP_2}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$, $f(\overrightarrow{OP_3}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}$

$f(\overrightarrow{OP_4}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$. Alltså $f(P)$ = parallellogram med hörn i $(2,1)$, $(6,2)$, $(9,4)$ och $(5,3)$.

$\underline{\underline{\text{Area}(f(P))}} = \left| \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right| \cdot \text{Area}(P) = 1 \cdot 5 = \underline{\underline{5}}$

Diagonaler: $f(\overrightarrow{P_1P_3}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$, längd $|f(\overrightarrow{P_1P_3})| = \sqrt{7^2+3^2} = \underline{\underline{\sqrt{58}}}$
$f(\overrightarrow{P_2P_4}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, längd $|f(\overrightarrow{P_2P_4})| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$

c) $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} \mapsto 3\mathbf{x}$ (skalning med 3)
$g(\overrightarrow{OP_1}) = 3(1,1) = (3,3)$, $g(\overrightarrow{OP_2}) = 3(4,2) = (12,6)$, $g(\overrightarrow{OP_3}) = 3(5,4) = (15,12)$
$g(\overrightarrow{OP_4}) = 3(2,3) = (6,9)$. Alltså $g(P)$ = parallellogram med hörn i $(3,3)$, $(12,6)$, $(15,12)$, $(6,9)$

Skalning med 3 $\Longrightarrow$ längder skalas med en faktor 3, speciellt har diag. längd $3 \cdot 5 = \underline{\underline{15}}$ resp $\underline{\underline{3\sqrt{5}}}$
$\Longrightarrow$ Area skalas med $3^2 = 9$, speciellt har $g(P)$ area $9 \cdot \text{area}(P) = 9 \cdot 5 = \underline{\underline{45}}$

---

2) Låt $p(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2 = 0$
Givet: $p(z)$ har minst ett rent imaginärt nollställe.
Ansätt $z = ai$ ($a \in \mathbb{R}$). Då:
$p(z) = (ai)^4 - 2(ai)^3 + 3(ai)^2 - 2(ai) + 2 = a^4 + 2a^3 i - 3a^2 - 2ai + 2$
$\text{Re}\, p(z) = a^4 - 3a^2 + 2 \quad \text{Im}\, p(z) = 2a^3 - 2a = 2a(a^2-1) = 2a(a-1)(a+1)$
Om $p(z) = 0$ så måste $\text{Re}\, p(z) = 0$ och $\text{Im}\, p(z) = 0$.

$$\text{Im}\, p(z) = 0 \iff \begin{cases} a = 0 & \Longrightarrow \text{Re}\, p(z) = 2 \neq 0 \\ a = 1 \text{ eller} & \Longrightarrow \text{Re}\, p(z) = 0 \\ a = -1 & \Longrightarrow \text{Re}\, p(z) = 0 \end{cases}$$

2) Alltså finns två lösn. till $\operatorname{Re} p(z) = \operatorname{Im} p(z) = 0$, (då $z = ai$),
forts. nämligen $a = \pm i$, dvs $z = \pm i$.

Alltså har $p(z)$ en faktor $(z-i)(z+i) = z^2+1$

Polynomdivision:

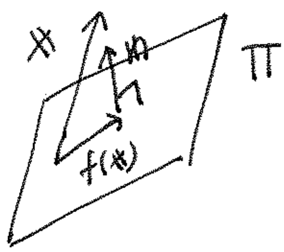
$$
\begin{array}{rl}
 z^2 - 2z + 2 & \\
\hline
z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2 & \big|\; z^2+1 \\
-(z^4 + z^2) & \\
\hline
-2z^3 + 2z^2 - 2z + 2 & \\
-(-2z^3 - 2z) & \\
\hline
2z^2 \quad + 2 & \\
-(2z^2 + 2) & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Alltså $p(z) = (z^2+1)(z^2-2z+2)$

Lös $z^2 - 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 = -1 \Leftrightarrow (z-1) = \pm i \Leftrightarrow z = 1 \pm i$

Slutsats Ekvationen $p(z)$ har lösn. $z = \pm i$ och $z = 1 \pm i$

---

3 a) 

Minns: en normal till $\{ax+by+cz=d\}$ ges av $\mathbf{n} = (a,b,c)$. I vårt fall kan vi alltså välja $\mathbf{n} = (1,-1,-1)$.

Minns orto proj av $\mathbf{x}$ på $\mathbf{n}$ ges av $\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}$

Alltså $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} -$ orto proj av $\mathbf{x}$ på $\mathbf{n}$ $=$

$\mathbf{x} - \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n} = \left[\text{Identifiera } \mathbf{x} \text{ m } \begin{bmatrix} \mathbf{x} \end{bmatrix} \text{ och } [a] \text{ med } a\right] =$

$I\mathbf{x} - \frac{1}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}\mathbf{n}^T\mathbf{x} = \left(I - \frac{1}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}\mathbf{n}^T\right)\mathbf{x}.$

Alltså är f's avbildningsmatris $A = I - \frac{1}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}\mathbf{n}^T$

$\mathbf{n} = (1,-1,-1)$ ger $|\mathbf{n}|^2 = \mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1+1+1 = 3$ $\quad \mathbf{n}\mathbf{n}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

vilket ger $A = \frac{1}{3}(3I - \mathbf{n}\mathbf{n}^T) = \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Slutsats: Avb.matrisen är $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

b) Låt $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\uparrow \; \uparrow \; \uparrow$
$\mathbf{e}_1' \; \mathbf{e}_2' \; \mathbf{e}_3'$'s koordinater i $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$

Minns $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$ bas $\Leftrightarrow$ $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$ linj obe $\Leftrightarrow |S| \neq 0$

Kolla: $|S| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ Sarrus

$1 + 0 + 0 - 0 + 1 + 1 = 3 \neq 0$

Slutsats: $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$ bas

TMA660 20/12 16 ③

3c) Obs e_1' parallell med n. Alltså $e_1' \perp \Pi \Rightarrow f(e_1') = \mathbb{0}$

$e_2' \cdot n = 0$, dvs e_2' parallell m $\Pi \Rightarrow f(e_2') = e_2'$

$e_3' \cdot n = 0$ — " — e_3' — " — $\Rightarrow f(e_3') = e_3'$

Avb. matris m a p basen e_1', e_2', e_3' =

$\begin{bmatrix} | & | & | \\ f(e_1') & f(e_2') & f(e_3') \\ | & | & | \end{bmatrix}$ uttryckt i basen e_1', e_2', e_3' =

[Obs $\mathbb{0} = (0,0,0)$ och $e_2' = (0,1,0)$, $e_3' = (0,0,1)$ i e_1', e_2', e_3']

$\begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbb{0} & e_2' & e_3' \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Slutsats: avb. matrisen m a p e_1', e_2', e_3' är $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

---

4) $\begin{cases} AX + BY = C \\ DX + EY = F \end{cases} \overset{A=I}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} X + BY = C \\ DX + EY = F \end{cases}$ (mult m $-D$ från vänster) $\Longleftrightarrow$

$\begin{cases} X + BY = C & (I) \\ (E-DB)Y = F - DC & (II) \end{cases}$ $E - DB = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & -12 \end{bmatrix}$

$|E - DB| = -48 - 4 = -52$ så $E - DB$ inverbar med invers $(E-DB)^{-1} = \frac{1}{-52}\begin{bmatrix} -12 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$F - DC = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$

Nu ger ekv (II): $Y = (E-DB)^{-1}(F - DC) = \frac{1}{-52}\begin{bmatrix} -12 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Sätt in i ekv (I) $\Leftrightarrow X = C - BY = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Slutsats: Ekv. systemet har lösn. $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

---

5 a) SANT ty $A\mathbb{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$

b) SANT ty $\begin{vmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$

c) SANT ty $0 \neq |AA^T| = |A||A^T| = |A|^2 \Leftrightarrow 0 \neq |A|$

d) FALSKT $Nul(A) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ där } \begin{matrix} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{matrix} \right\}$

e) FALSKT ~~Värt~~ t ex $|f(n)| = |f(1,-1,-3)| = |\mathbb{0}| = 0$ men $|n| = \sqrt{11}$

f) SANT ty $|A| = \begin{vmatrix} | & & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & & | \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$ $a_1, \ldots, a_n$ spänner ej upp $\mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow \exists\, b \in \mathbb{R}^n$ $b \notin \mathrm{Span}(a_1, \ldots, a_n)$

---

6) $\underline{n=1}$: $A = [1+1] = 2$ $|A| = \underline{\underline{2}}$

$\underline{n=2}$: $A = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 \\ 2+1 & 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $|A| = 8 - 9 = \underline{\underline{-1}}$

6) $\underline{\underline{n \geq 3}}$

forts.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 & \cdots & 1+n \\ 2+1 & 2+2 & & & \\ 3+1 & & & & \\ \vdots & & & & \\ n+1 & \cdots & & & n+n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & & \\ 4 & 5 & & & \\ 5 & & & & \\ \vdots & & & & \\ n+1 & & & & 2n \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n+1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 5 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ n+1 & & & & & n+n \end{vmatrix} \text{ två lika rader } = \underline{\underline{0}}$$

Slutsats: $n=1$ $|A|=2$
2 -1
≥ 3 0

7) Se Sparr, kap 5.3

8) Se Sparr, kap 6.2