MATEMATIK | **Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2016-08-15 kl. 8.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt:
Telefon:

TMA660 Linjär algebra och geometri F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.
Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. (a) Beräkna determinanterna $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$ och $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 6 & 0 \end{vmatrix}$.

(b) Låt $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 8 & 6 & 0 \end{bmatrix}$. Bestäm en bas för kolonnrummet till A, rangen av A och nolldimensionen av A. (6 p)

2. (a) Låt T vara tetraedern med hörn $P_1 = (0,0,0)$, $P_2 = (1,0,0)$, $P_3 = (2,3,0)$ och $P_4 = (4,5,6)$. Bestäm volymen av T.

Tips: Använd att volymen av en kon (speciellt en tetraeder) med basarea B och höjd h är $\frac{1}{3} \cdot B \cdot h$.

(b) Låt $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ och låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning vars avbildningsmatris är A (det vill säga $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$). Beskriv bilden $f(T)$ av T under f. Bestäm speciellt vad bilderna av hörnen är, det vill säga bestäm $f(P_j)$ för $j = 1,2,3,4$. Vad är volymen av $f(T)$?

(c) Låt $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning vars avbildningsmatris är A^{10}. Beskriv bilden $g(T)$ av T under g; bestäm speciellt $g(P_j)$ för $j = 1,2,3,4$. Vad är volymen av $g(T)$? (8 p)

3. Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Visa att $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2$ om och endast om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är ortogonala. (5 p)

4. Betrakta följande datapunkter: $(x_1, y_1) = (1,1), (x_2, y_2) = (2,2), (x_3, y_3) = (3,4)$.

(a) Hitta en linje $\ell(x) = a_0 + a_1 x$ som är anpassad efter datan i minsta kvadratbemärkelse.

(b) Hitta en andragradskurva $c(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ som är anpassad efter datan i minsta kvadratbemärkelse.

(c) Beräkna felen $\sqrt{\sum_{i=1}^{3} |y_i - \ell(x_i)|^2}$ och $\sqrt{\sum_{i=1}^{3} |y_i - c(x_i)|^2}$. Slutsats? (8 p)

5. En $(n \times n)$-matris A sägs vara *nilpotent* om det finns något $\ell \in \mathbb{N}$ så att $A^\ell = \mathbf{0}$.

(a) Låt A vara en $(n \times n)$-matris. Antag att A är nilpotent. Visa att A inte är inverterbar.

(b) Gäller omvändningen? Det vill säga om A är en icke-inverterbar $(n \times n)$-matris, följer det då att A är nilpotent? Motivera ditt svar. Om svaret är nej räcker det att ange motexempel. (6 p)

6. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 p. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0. (6 p)

(a) Låt A vara en $(m \times n)$-matris och låt B vara en $(n \times m)$-matris. Då är AB inverterbar om och endast om BA är inverterbar.

(b) Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara ortogonal projektion på linjen $t(1,3), t \in \mathbb{R}$. Då är f är en isometri.

(c) Antag att A är en 5×5-matris av rang 4. Då gäller att alla underdeterminanter till A av ordning 4 är nollskilda.

(d) Låt A och B vara matriser sådana att matrisprodukten AB är väldefinierad. Antag att $AB = \mathbf{0}$. Då gäller att $A = \mathbf{0}$ eller $B = \mathbf{0}$.

(e) Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara spegling i linjen $t(2,-5), t \in \mathbb{R}$. Då är $f \circ f \circ f = f$.

(f) Antag att $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ är linjärt oberoende. Då är $2\mathbf{u}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ och $\mathbf{u} + 2\mathbf{v} + 3\mathbf{w}$ linjärt oberoende.

7. Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vara vektorer i rummet ($\mathbb{R}^3$).

(a) Definiera vektorprodukten $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

(b) Visa att vektorprodukten är antikommutativ, d v s att $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$.

(c) Visa att

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|. \tag{1}$$

När råder likhet i (1)?

(d) Visa, förslagsvis genom att ge ett motexempel, att vektorprodukten inte är associativ, d v s att

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} \neq \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

i allmänhet. (6 p)

8. (a) Visa att för alla komplexa tal z och w gäller $e^{(z+w)} = e^z \cdot e^w$. (5 p)

Lycka till!

Elizabeth

1a)

$$\det.1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -1 & 5 \\ 5 & -3 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -4 & 5 & 5 \\ -4 & -1 & 5 \\ -3 & 8 & 5 \end{vmatrix} =$$

(-2) $(+1)$

utv. längs rad 2

(-1)

$$-1 \begin{vmatrix} -4 & 5 & 5 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)\cdot 1\cdot(-6)\cdot 5 = \underline{\underline{-30}}$$

Sarrus

$$\det.2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \underline{\underline{0}}$$ eftersom rad 1 & 3 lika.

b) Låt $A = \begin{bmatrix} | & | & | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ | & | & | & | & | \end{bmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} \det.1 \neq 0 \Rightarrow a_1, a_3, a_3, a_5 \text{ linjärt oberoende} \\ \det.2 = 0 \Rightarrow a_1, a_2, a_4, a_5 \text{ linjärt beroende} \end{array}\right\} \Longrightarrow$

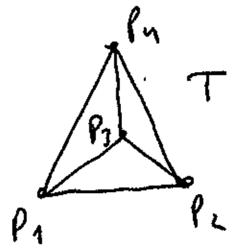
$\{a_1, a_2, a_3, a_5\}$ bas för Kolonn$(A) = $ span$(a_1, \dots, a_5)$,

dvs $\underline{\{(3,1,3,5), (2,2,2,7), (5,0,-1,8), (2,-1,2,0)\}}$ bas för Kolonn(A)

$\underline{\text{rang}(A)} = \dim(\text{Kolonn } A) = \underline{\underline{4}}$

$\underline{\text{nolldim}(A)} = \#\text{ kolonner} - \text{rang}(A) = 5 - 4 = \underline{\underline{1}}$

2a)



Volymen av T är absolutbeloppet av

$$\frac{1}{6}\left| \overrightarrow{P_1P_2} \ \overrightarrow{P_1P_3} \ \overrightarrow{P_1P_4} \right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\, 18 = 3$$

Slutsats: Volymen av T är $\underline{\underline{3}}$.

b) Obs $f(P_j) = A\,\overrightarrow{OP_j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_3 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \Rightarrow f(P_1) = (0,0,0)$

$f(P_2) = (0,1,0)$ $\quad f(P_3) = (0,2,3)$ $\quad f(P_4) = (-6,4,5)$

f linjär $\Rightarrow$ linjer & plan avbildas på linjer resp. plan

$\Rightarrow$ tetraeder avbildas på tetraeder.

Slutsats: T avbildas på en tetraeder med hörn i $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,2,3)$ och $(-6,4,5)$.

$$\text{Vol}(f(T)) = \big||A|\big|\ \text{Vol}(T) = \left|\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}\right| \cdot 3 = |-1|\cdot 3 = 3$$

Slutsats: Volymen av $f(T)$ är $\underline{3}$.

2c) Obs $f: \mathbb{e}_1 \mapsto \mathbb{e}_2 \mapsto \mathbb{e}_3 \mapsto -\mathbb{e}_1 \mapsto -\mathbb{e}_2 \mapsto -\mathbb{e}_3 \mapsto \mathbb{e}_1$

Speciellt ser vi att $f^6 = id \Rightarrow g = f^{10} = f^4$

och att $f^4: \mathbb{e}_1 \mapsto -\mathbb{e}_2$ Alltså är matrisen för

$\mathbb{e}_2 \mapsto -\mathbb{e}_3$ $\quad f^4 \quad \begin{bmatrix} | & | & | \\ -\mathbb{e}_2 & -\mathbb{e}_3 & \mathbb{e}_1 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$\mathbb{e}_3 \mapsto \mathbb{e}_1$

Alltså

$$A^{10} = \text{matrisen av } g = \text{matrisen av } f^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g(P_j) = A^{10}\,\overrightarrow{OP_j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_3 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$g(P_1) = (0,0,0)$, $g(P_2) = (0,-1,0)$, $g(P_3) = (0,-2,-3)$, $g(P_4) = (6,-4,-5)$

$\mathrm{Vol}(g(T)) = \left||A^{10}|\right| \mathrm{Vol}(T) = |(-1)^{10}| \cdot 3 = 3$

<u>Slutsats</u> $g(T)$ är en tetraeder med hörn i $(0,0,0), (0,-1,0)$, $(0,-2,-3)$ och $(6,-4,-5)$. Volymen av $g(T)$ är 3.

---

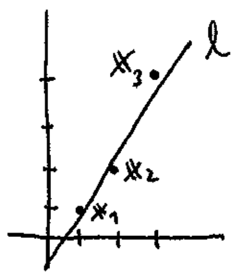
3) $$|\mathbb{u}+\mathbb{v}|^2 = (\mathbb{u}+\mathbb{v})\cdot(\mathbb{u}+\mathbb{v}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{distributivitet} \\ \text{+ kommutativitet}}}{=} \mathbb{u}\cdot\mathbb{u} + 2\,\mathbb{u}\cdot\mathbb{v} + \mathbb{v}\cdot\mathbb{v} = |\mathbb{u}|^2 + |\mathbb{v}|^2 + 2\,\mathbb{u}\cdot\mathbb{v}$$

Alltså $|\mathbb{u}+\mathbb{v}|^2 - |\mathbb{u}|^2 - |\mathbb{v}|^2 = 2\,\mathbb{u}\cdot\mathbb{v} = 0$ omm $\mathbb{u}\cdot\mathbb{v} = 0$, vilket per definition betyder att $\mathbb{u}$ & $\mathbb{v}$ är ortogonala

---

4a) Antag att det finns en linje $\ell(x) = a_0 + a_1 x$ som innehåller punkterna $\mathbb{x}_j = (x_j, y_j)$ $\mathbb{x}_1 = (1,1)$, $\mathbb{x}_2 = (2,2)$, $\mathbb{x}_3 = (3,4)$.

$$\text{Då} \left.\begin{aligned} \mathbb{x}_1 \in \ell &\Rightarrow 1 = a_0 + 1\cdot a_1 \\ \mathbb{x}_2 \in \ell &\Rightarrow 2 = a_0 + 2a_1 \\ \mathbb{x}_3 \in \ell &\Rightarrow 4 = a_0 + 3a_1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}_{=:A} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}}_{=:\mathbb{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}}_{=:\mathbb{b}}$$



Att hitta en linje som är anpassad efter $\mathbb{x}_j$ i minsta kvadratsmening innebär att lösa ekvationssystemet $A^TA\,\mathbb{a} = A^T\mathbb{b}$ (*).

Räkning ger $A^TA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$, $A^T\mathbb{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 17 \end{bmatrix}$. Obs A^TA inv.bar med invers $(A^TA)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$. Det följer att (*) har entyd. lösn $\mathbb{a} = (A^TA)^{-1}A^T\mathbb{b} = \ldots = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 3/2 \end{bmatrix}$, vilket motsvarar linjen $\ell(x) = -\frac{2}{3} + \frac{3}{2}x$

<u>Slutsats</u> $l(x) = -\frac{2}{3} + \frac{3}{2}x$ är anpassad efter X_j i minsta kvadrat-bemärkelse.

b) Antag att det finns en andragradskurva $C(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ som innehåller X_j.

Då
$$\left.\begin{array}{l} X_1 \in C \Rightarrow 1 = a_0 + a_1 + a_2 \\ X_2 \in C \Rightarrow 2 = a_0 + 2a_1 + 4a_2 \\ X_3 \in C \Rightarrow 4 = a_0 + 3a_1 + 9a_2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}}_{=:A} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}}_{=:\mathbb{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}}_{=:\mathbb{b}} \quad (**)$$

Testa att lösa (*):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 4 \end{array}\right] (-1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 8 & 3 \end{array}\right] (-2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \cdot 1/2 \; (-3/2) \; (-1/2) \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right] (-1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right]$$

Alltså är $\mathbb{a} = (1, -1/2, 1/2)$ en lösn till (**) och därmed också en minsta kvadrat lösn.

<u>Slutsats:</u> X_j ligger på kurvan $l(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$.
(speciellt är denna anpassad till X_j i minsta kvadrat-bemärkelse.)

c) $$\sum_{j=1}^{3} |y_j - l(x_j)|^2 = \begin{bmatrix} l(x_1) = -\frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{5}{6} \\ l(x_2) = -\frac{2}{3} + \frac{3}{2}\cdot 2 = 2\frac{1}{3} \\ l(x_3) = -\frac{2}{3} + \frac{3}{2}\cdot 3 = 4\frac{1}{6} \end{bmatrix} =$$

$$\left|1 - \frac{5}{6}\right|^2 + \left|2 - 2\frac{1}{3}\right|^2 + \left|4 - 4\frac{1}{6}\right|^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 =$$

$$\frac{1}{36} + \frac{1}{9} + \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$$

<u>Slutsats</u> Felet är $\sqrt{\sum |y_j - l(x_j)|^2} = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

X_j ligger på C. Alltså är felet $\sqrt{\sum |y_j - C(x_j)|^2} = 0$.

5a) Antag $A^l = \mathbb{O}$ för ngt l.

Då $0 = \det(A^l) \underset{\uparrow}{=} (\det A)^l \Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow A$ ej inverterbar.

det multiplikativ <u>Alltså</u> $A^l = \mathbb{O} \Rightarrow A$ ej inverbar. $\square$

b) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. <u>Då $\det(A) = 0$</u>, men $A^l = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^l = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A$
(dvs A ej inverbar)
för alla l (f_A är projektion på en linje), dvs A ej nilpotent.

<u>Alltså</u> A ej inverbar medför <u>inte</u> att A nilpotent.

TMA660 15/8 16 lösn

6) a) FALSKT Tag t ex $A=(1,0)$ $B=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Då $AB=[1]$ invbar, $BA=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ ej invbar

b) FALSKT. T ex Vektorn $(-3,1)$ med längd $\sqrt{10}$ avbildas på 0-vektorn.

c) FALSKT. Tag t ex $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$ Då är underdet där man stryker rad 1 och kolonn 1 $\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\end{vmatrix}=0$.

d) FALSKT. Tag t ex $A=[1\ 1]$ $B=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ Då är $AB=[0]$.

e) SANT. Obs att spegling är sin egen invers. Alltså $f\circ f\circ f = id\circ f = f$.

f) SANT, ty $\begin{bmatrix}2&1&4\\0&-1&2\\0&0&3\end{bmatrix}$ är inverterbar.

7a) se t ex Def 2 s 85, Span

b) se t ex Sats 4 s 87, Span

c) $|u\times v| = |u||v|\sin\theta$ ← minsta vinkel mellan u & v

$\leq |u||v|\cdot 1 = |u||v|$

Likhet gäller då $\sin\theta = 1 \Leftrightarrow u, v$ ortogonala

d) ~~[illegible]~~ Obs $(e_1\times e_2)\times e_2 = e_3\times e_2 = -e_1$ men

$e_1\times(e_2\times e_2) = e_1\times 0 = 0$

Alltså $(u\times v)\times w \neq u\times(v\times w)$ i allmänhet.

---

8 Se t ex Sats 7 s 479 Persson-Böiers
