MATEMATIK | **Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2015-10-26 kl. 14.00 - 18.00
Tentamen | Telefonvakt: Elizabeth Wulcan
Telefon: 0703-088304

TMA660 Linjär algebra och geometri F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.
Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 p (max 50 p).
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. (a) Låt $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \\ 8 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Beräkna $\det(A)$ och $\det(B)$.

(b) Låt $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Hur många lösningar har matrisekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ respektive $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$? (6 p)

2. Låt T vara tetraedern med hörn $P_1 = (1,1,1)$, $P_2 = (1,0,0)$, $P_3 = (2,3,0)$ och $P_4 = (4,5,6)$.

(a) Bestäm volymen av T.

Minns: Volymen av en kon (speciellt en tetraeder) med basarea B och höjd h är $\frac{1}{3} \cdot B \cdot h$.

(b) Betrakta triangeln τ med hörn i P_1, P_2, P_3 som tetraederns bas. Vad är då motsvarande höjd?

(c) Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara spegling i planet $\{x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$. Vad är volymen av $f(T)$? Vad är $f(T)$'s höjd (med avseende på basen $f(\tau)$)?

(d) Låt $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara skalning med en faktor 2. Vad är volymen av $g(T)$? Vad är $g(T)$'s höjd (med avseende på basen $g(\tau)$)? (8 p)

3. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm mängden av matriser X som *kommuterar* med A, det vill säga lös matrisekvationen

$$XA = AX.$$

Kommentar: Mängden av sådana matriser kallas *centralisatorn* till A.

(b) Bestäm mängden av matriser X som *antikommuterar* med A, det vill säga lös matrisekvationen

$$XA = -AX.$$

(c) Finns det någon matris förutom nollmatrisen $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ som både kommuterar och antikommuterar med A? Motivera ditt svar. Om svaret är ja räcker det att ange ett exempel.

(d) Finns det någon matris som varken kommuterar eller antikommuterar med A? Motivera ditt svar. Om svaret är ja räcker det att ange ett exempel. (8 p)

4. Betrakta avbildningen

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{u} &\mapsto \mathbf{u} \times (1, 2, 3). \end{aligned}$$

(a) Visa att f är linjär.

(b) Låt A vara f's avbildningsmatris. Bestäm A's nollrum, kolonnrum, nolldimension och rang. (6 p)

5. Antag att $p(z)$ är ett polynom av grad 9 med reella koefficienter. Antag att $p(1 + i) = 0$ samt att p har åtminstone ett rent imaginärt nollställe (det vill säga på formen $ai, a \in \mathbb{R}$). Hur många reella nollställen kan p ha som mest? Hur många reella nollställen kan p ha som minst? (4 p)

6. Minns att en $(n \times n)$-matris A med matriselement a_{ij} är *uppåt triangulär* om $a_{ij} = 0$ för $i > j$, det vill säga om A är på formen $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

Antag att A är en uppåt triangulär och inverterbar $(n \times n)$-matris. Visa att A^{-1} är uppåt triangulär. (6 p)

Tips: Om du inte vet hur du skall göra detta i allmänhet kan det vara en bra idé att börja med att visa påståendet för små matriser. Ett bevis för att påståendet gäller för $n = 2$ ger 2 poäng. Ett bevis för att påståendet gäller för $n = 2$ och $n = 3$ ger 3 poäng.

7. Visa att ekvationen

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_s \mathbf{v}_s = \mathbf{0}$$

har endast den triviala lösningen $\lambda_1 = \cdots = \lambda_s = 0$ om och endast om ingen av vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s$ är en linjärkombination av de andra. (6 p)

8. (a) Låt $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ vara en vektor i $\mathbb{R}^n$. Givet $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, låt

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}, \quad \mathbf{u}^\perp = \mathbf{u} - \mathbf{u}'.$$

Visa att $\mathbf{u}^\perp$ är ortogonal mot $\mathbf{v}$.

(b) Använd detta för att visa att varje vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ har en entydig uppdelning

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}^\perp,$$

där $\mathbf{u}'$ är parallell med $\mathbf{v}$ och $\mathbf{u}^\perp$ är ortogonal mot $\mathbf{v}$. (6 p)

Lycka till!

Elizabeth

TMA 660 Linjär algebra och geometri 26/10 15 lösn. 1

1 a) $|A| = \begin{vmatrix}4&3&2&1\\5&0&3&2\\4&3&2&1\\8&-1&4&3\end{vmatrix} = \underline{\underline{0}}$ eftersom rad 1 & rad 3 lika

$|B| = \begin{vmatrix}4&3&2&1\\5&4&3&2\\4&-3&2&1\\8&5&4&3\end{vmatrix} = \boxed{-1}\ \boxed{-1}\ \boxed{-3} = \begin{vmatrix}4&3&2&1\\-3&-2&-1&0\\0&-6&0&0\\-4&-4&-2&0\end{vmatrix} \underset{\uparrow}{=}$ utveckla längs kolonn 4

$1\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}-3&-2&-1\\0&-6&0\\-4&-4&-2\end{vmatrix} = (-1)(-1)^3\begin{vmatrix}3&2&1\\0&6&0\\4&4&2\end{vmatrix} = 6(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3&1\\4&2\end{vmatrix} =$

mult alla rader m -1 ; utv. längs rad 2

$6(6-4) = 6\cdot 2 = \underline{\underline{12}}$

b) Låt v_1, v_2, v_3, v_4 vara A's kolonner, dvs $A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix}$

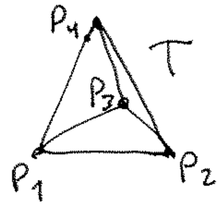
Obs att $B = \begin{bmatrix} v_1 & b & v_3 & v_4 \end{bmatrix}$

$|B| \neq 0 \Rightarrow v_1, b, v_3, v_4$ linj ober $\Rightarrow v_1, v_2, v_3$ linj ober
$\Rightarrow B$ inverterbar $\Leftrightarrow b \notin \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3)$

$|A| = 0 \Rightarrow v_1, v_2, v_3, v_4$ linj ber. Eftersom v_1, v_2, v_3 linj ober så är där $\operatorname{Kolonn}(A) = \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3) \not\ni b$

Alltså saknar $Ax = b$ lösning.

$Bx = b$ har en lösning, nämligen $x = B^{-1}b$.

2a) 

Volymen av T är absolutbeloppet av

$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} \overrightarrow{P_2P_1} & \overrightarrow{P_2P_3} & \overrightarrow{P_2P_4} \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix}0&1&3\\1&3&5\\1&0&6\end{vmatrix} \underset{\uparrow}{=} \frac{5-6-9}{6} = \frac{-10}{6}$

Sarrus

Slutsats Volymen av T är $\underline{\underline{\frac{5}{3}}}$

b) Metod 1: Använd $\operatorname{Vol}(T) = \frac{1}{3}\cdot B \cdot h^{(*)}$. Minns $B = \left|\frac{1}{2}\overrightarrow{P_2P_1}\times\overrightarrow{P_2P_3}\right|$

Sarrus: $\overrightarrow{P_2P_1}\times\overrightarrow{P_2P_3} = \begin{vmatrix}e_1&e_2&e_3\\0&1&1\\1&3&0\end{vmatrix} = (-3, 1, -1) \Rightarrow B = \frac{1}{2}\sqrt{9+1+1} = \frac{1}{2}\sqrt{11}$

(*) ger nu: $\frac{5}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{11} \cdot h \Leftrightarrow h = \frac{10}{\sqrt{11}}$

Metod 2 Använd att h är avståndet mellan P_4 och planet Π som spänns av $\overrightarrow{P_2P_1}$ och $\overrightarrow{P_2P_3}$

Låt n vara en normalvektor till Π. Då:

$$\text{avstånd}(P_4, \Pi) = |\text{orto proj av } \overrightarrow{P_2P_4} \text{ på } n| \underset{\text{proj. formeln}}{=} \left| \frac{\overrightarrow{P_2P_4} \cdot n}{|n|^2} n \right| =$$

$$\frac{|\overrightarrow{P_2P_4} \cdot n|}{|n|} = \left[\begin{array}{l} \text{en normal till } \Pi \\ \text{ges av } \overrightarrow{P_2P_1} \times \overrightarrow{P_2P_3} = (-3,1,-1) \end{array} \right] =$$

$$\frac{|(3,5,6) \cdot (-3,1,-1)|}{\sqrt{11}} = \frac{|-9+5-6|}{\sqrt{11}} = \frac{10}{\sqrt{11}}$$

Slutsats höjden är $\frac{10}{\sqrt{11}}$

c) Spegling – bevarar volym $\Rightarrow$ volym$(f(T))$ = volym$(T) = \frac{5}{3}$

– bevarar längd $\Rightarrow$ höjd$(f(T))$ = höjd$(T) = \frac{10}{\sqrt{11}}$

d) Skalning med 2

– volym skalas med $2^3 = 8 \Rightarrow$ volym$(g(T)) = 8 \cdot \frac{5}{3} = \frac{40}{3}$

– längd skalas med 2 $\Rightarrow$ höjd$(g(T)) = 2 \cdot \frac{10}{\sqrt{11}} = \frac{20}{\sqrt{11}}$

---

3 a) Ansätt $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow VL = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2a-b \\ c & 2c-d \end{bmatrix}$

$HL = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ -c & -d \end{bmatrix}$

$$HL = VL \Leftrightarrow (*) \begin{cases} a = a + 2c & (I) \\ 2a - b = b + 2d & (II) \\ c = -c & (III) \\ 2c - d = -d & (IV) \end{cases}$$

(III) $\Rightarrow c = 0$ Sätt in i (*)

$$\begin{cases} a = a & (I') \\ 2a - 2b - 2d = 0 & (II') \\ -d = -d & (IV') \end{cases}$$

Obs (I') & (IV') är rätt uppfyllda. Alltså (*) $\Leftrightarrow a - b - d = 0$

Sätt $d = t$, $b = s \Rightarrow a = s + t$

Slutsats: de matriser som kommuterar med A är

$$\left\{ X = \begin{bmatrix} s+t & s \\ 0 & t \end{bmatrix} \quad s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

3b) Med samma ansats får vi nu

$$\begin{bmatrix} a & 2a-b \\ c & 2c-d \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ -c & -d \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -a-2c \\ 2a-b = -b-2d \\ c = c \\ 2c-d = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=0 \\ a+d=0 \\ c-d=0 \end{cases}$$

Sätt $d=t$ $b=s$ $\Rightarrow$ $c=t$ $a=-t$

De matriser som antikommuterar med A är

$$\left\{ X = \begin{bmatrix} -t & s \\ t & t \end{bmatrix} \quad s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

c) Antag att X kommuterar och antikomm m A.

Då är $\begin{cases} AX = XA & (I) \\ AX = -XA & (II) \end{cases}$ ①

$\Leftrightarrow$ $2AX = 0$ mult m A^{-1} (Obs $|A| = -1$ så A inverbar)

$\Rightarrow$ $X = 0$

Slutsats Den enda matris som både kommuterar och antikommuterar med A är $X = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) Ja, tag tex $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Då $AX = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $XA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

---

4 a) $f(\lambda u + \lambda' u') = (\lambda u + \lambda' u') \times (1,2,3) = \begin{bmatrix} \text{X-prod distributiv} \\ (\lambda u) \times v = \lambda (u \times v) \end{bmatrix}$

$= \lambda(u \times (1,2,3)) + \lambda'(u' \times (1,2,3)) = \lambda f(u) + \lambda' f(u')$.

Alltså är f linjär.

b) $\underline{\text{Noll}(A)} = \{u, f(u) = 0\} = \{u \times (1,2,3) = 0\} =$

$\{u$ parallell med $(1,2,3)\}$ = $\underline{\text{linjen } t(1,2,3), t \in \mathbb{R}}$

$\underline{\text{nolldim}}(A) = \dim(\text{Noll}(A)) = \underline{1}$

$\underline{\text{rang}(A)} = 3 - \text{nolldim}(A) = \underline{2}$ (dimensionssatsen)

Obs: $u \times (1,2,3)$ vinkelrät mot (u och) $(1,2,3)$.

Alltså är Kolonn(A) = $f(\mathbb{R}^3) \subseteq$ planet Π med normalvektor $(1,2,3)$ som går genom O, dvs $\underline{\Pi = \{x+2y+3z=0\}}$.

Vi vet också att dim(Kolonn(A)) = 2. Alltså $\underline{\text{Kolonn}(A)} = \Pi$

TMA 660 26/10 15

4b) Alternativt: Antag $u \in \Pi$. Obs att $f\left(\frac{u \times (1,2,3)}{|(1,2,3)|^2}\right) = u$

Alltså Kolonn $(A) \supseteq \Pi$. Alltså Kolonn $(A) = \Pi$.

---

5) Minns: p reella koefficienter $\Rightarrow$ Om $p(\alpha)=0$ så $p(\bar{\alpha})=0$

$\Rightarrow$ p har ett jämnt antal icke-reella nollställen

$\Rightarrow$ p har åtminstone ett reellt nollställe

tolkn. av uppg. $a \neq 0$ $\Rightarrow$ $p(1+i)=0$ medför $p(1-i)=0$

$p(ai)=0$ medför $p(-ai)=0$, givet att $a \neq 0$

$\Rightarrow$ p har som mest 5 reella nollställen

tolkn. $a=0$ tillåtet (villkoret ai nollställe tillför inget) $\Rightarrow$ p har som mest 7 reella nollställen

---

6) Antag $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ Några förslag på lösning:

Förslag 1: Minns $A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} D_{11} & -D_{21} & \cdots \\ -D_{12} & & \\ \vdots & & \end{bmatrix}$

Antag $i<j$. Då $D_{ij} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \ddots & \lambda_{i-1} & \\ 0 & & 0 & \\ & & & \ddots 0 \end{vmatrix} = 0$ Alltså är elementet nedanför diagonalen i A^{-1} 0.

Förslag 2: Antag att $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots \\ b_{21} & & \\ \vdots & & \end{bmatrix}$ uppfyller $BA = I$

Obs: VL: $BA = \begin{bmatrix} \lambda_1 b_{11} & \cdots \\ \lambda_1 b_{21} & \cdots \\ \vdots & \ddots \\ \lambda_1 b_{n1} & \end{bmatrix}$ Eftersom $\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n \neq 0$ så är $\lambda_1 \neq 0$. Alltså medför $BA = I$ att $b_{21} = \cdots = b_{n1} = 0$

Alltså är B på formen $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots \\ 0 & b_{22} & \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & b_{n2} & \end{bmatrix}$

Nu $BA = \begin{bmatrix} \lambda_1 b_{11} & * & \\ 0 & \lambda_2 b_{22} & \\ \vdots & \lambda_2 b_{32} & \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & \lambda_2 b_{n2} & \end{bmatrix}$ Nu medför $BA = I$ att $b_{32} = \cdots = b_{n2} = 0$

Upprepa ovan för resterande kolonner $\Rightarrow$ alla element nedanför diag $= 0$

TMA 660 26/10 15 (5)

6) Förslag 3: Kan beräkna A^{-1} med elementära radop. av typen • Lägg $\lambda \cdot$ rad j till rad k där $j > k$. Detta motsvarar multiplikation med elementär matris

$E = \begin{bmatrix} 1 & & \lambda \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$, samt typen • Mult rad k med λ, vilket motsvarar mult med matris $E' = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots \; 1 \end{bmatrix}$.

Alltså $A^{-1} = E_1 \cdots E_s$ där $E_1, \ldots, E_s$ är av typ E eller E' som är uppåt triangulära. Det är lätt att se att produkten av uppåt triangulära matriser är uppåt triangulär. Alltså är A^{-1} uppåt triangulär.

---

7) Se Sparr kap 6.2 (Def 3 & Sats 2)

---

8) a) $u^{\perp} \cdot v = (u - u') \cdot v \underset{\substack{\uparrow \\ \text{skalärprod} \\ \text{distr.}}}{=} u \cdot v - \frac{u \cdot v}{|v|^2} \underbrace{v \cdot v}_{|v|^2} = u \cdot v - u \cdot v = 0$ Alltså $u \perp v$ □

b) Klart u' parallell med v (ty skalär $\cdot v$).
Alltså finns en uppdelning $u = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{parallell} \\ \text{m } v}}{u'} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vinkelrät} \\ \text{mot } v}}{u^{\perp}}$

Visa att den är entydig: Antag $u = \tilde{u}' + \tilde{u}^{\perp}$ annan uppdelning.
Då $u' + u^{\perp} = \tilde{u}' + \tilde{u}^{\perp} \Leftrightarrow \underbrace{u' - \tilde{u}'}_{\substack{\text{parallell} \\ \text{med } v}} = \underbrace{\tilde{u}^{\perp} - u^{\perp}}_{\substack{\text{ortogonal} \\ \text{mot } v}}$

Den enda vektor som är både parallell med och vinkelrät mot v är 0. Alltså $u' - \tilde{u}' = \tilde{u}^{\perp} - u^{\perp} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} u' = \tilde{u}' \\ u^{\perp} = \tilde{u}^{\perp} \end{matrix}$

Alltså är uppdelningen unik. □