

TMA660 Linjär algebra och geometri F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.

Betygsgränser: 3: 24 p, 4: 36 p, 5: 48.

Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

1. (a) Beräkna determinanterna $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ och $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. (2 p)

(b) Låt $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 0, 3, 3)$, $\mathbf{v}_3 = (4, 2, 4, 0)$, $\mathbf{v}_4 = (1, 0, 1, 0)$ och $\mathbf{v}_5 = (0, 0, 1, 0)$. Avgör om (6 p)

- $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ och \mathbf{v}_3 spänner upp \mathbb{R}^4
- $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ och \mathbf{v}_3 är linjärt oberoende
- $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ och \mathbf{v}_4 spänner upp \mathbb{R}^4
- $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ och \mathbf{v}_4 är linjärt oberoende
- $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ och \mathbf{v}_5 spänner upp \mathbb{R}^4
- $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ och \mathbf{v}_5 är linjärt oberoende.

2. Låt T vara triangeln med hörn i punkterna $(1, 1)$, $(2, 2)$ och $(3, -3)$. (8 p)

(a) Beräkna arean av T .

(b) Låt $f_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara avbildningen $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, där $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Vad är arean av $f_A(T)$?

(c) Låt $f_B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara spegling i linjen $t(1, 1), t \in \mathbb{R}$, och låt B vara f_B 's avbildningsmatris (med avseende på standardbasen). Bestäm $|B|$. Vad är arean av $f_B(T)$?

(d) Låt $f_C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara medurs rotation med $\pi/4$ radianer och låt C vara f_C 's avbildningsmatris (med avseende på standardbasen). Bestäm $|C|$. Vad är arean av $f_C(T)$?

(e) Låt $f_D : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara skalning med en faktor 3, och låt D vara f_D 's avbildningsmatris (med avseende på standardbasen). Bestäm $|D|$. Vad är arean av $f_D(T)$?

3. (a) Bestäm inversen till $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. (2 p)

(b) Bestäm inversen till $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. (2 p)

(c) Bestäm inversen till $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. (2 p)

(d) Bestäm inversen till $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. (2 p)

4. Låt $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara ortogonal projektion på planet $x + y + z = 0$. Låt A vara f 's avbildningsmatris (med avseende på standardbasen). Bestäm A 's kolonnrum, nollrum, rang och nulldimension. (8 p)

5. Låt $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ vara avbildningen $(x, y) \mapsto x + yi$, låt $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vara avbildningen $z \mapsto (3+i)z$ och låt $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara avbildningen $F = g^{-1} \circ f \circ g$. Bestäm avbildningsmatrisen för F . (6 p)

6. Låt $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (2, 0)$, $Q = (4, 3)$. Bestäm ekvationerna för de linjer ℓ som går genom Q och uppfyller att avståndet från ℓ till P_1 är lika med avståndet från ℓ till P_2 . (8 p)

7. Formulera och bevisa den distributiva lagen för vektorprodukt (inklusive lemmat). (6 p)

8. (a) Låt A vara en $m \times n$ -matris, där $m \geq n$. Visa att en lösning till normalekvationen

$$A^T \mathbf{Ax} = A^T \mathbf{b} \tag{1}$$

minimerar $|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}|$. (6 p)

(b) Finns det alltid en entydig lösning till (1)? Motivera ditt svar. Om svaret är nej, räcker det med motexempel. (2 p)

Lycka till!
Elizabeth

1a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ eftersom rad 1 och rad 3 är lika.

$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -1(0+6+12-6-0-0) = -12$
 utveckla längs kolumn 4
 tex samma

- b) Basatsen: • 3 vektorer kan ej spänna upp \mathbb{R}^4
 $\Rightarrow v_1, v_2, v_3$ spänner ej upp \mathbb{R}^4
 • 5 vektorer i \mathbb{R}^4 är linjärt beroende
 $\Rightarrow v_1, v_2, \dots, v_5$ ej linjärt oberoende

$|A| = 0 \Rightarrow v_1, \dots, v_4$ ej bas för \mathbb{R}^4 $\iff v_1, \dots, v_4$ spänner ej upp \mathbb{R}^4 $\iff v_1, \dots, v_4$ ej linj. oberoende
 Basatsen

$|B| \neq 0 \Rightarrow v_1, v_2, v_3, v_5$ bas för \mathbb{R}^4
 $\iff v_1, v_2, v_3$ linjärt oberoende
 $\iff v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ spänner upp \mathbb{R}^4

2) a) $P_1 = (1,1)$, $P_2 = (2,2)$, $P_3 = (3,-3)$
 Arean av T är absolutbeloppet av $\frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{P_1P_2} & \vec{P_1P_3} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-4-2) = -3$

Slutsats: Arean av T är 3.

b) Arean av $f_A(T) = |\det A| \cdot \text{arean}(T) = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot 3 = 10 \cdot 3 = 30$
 Slutsats: Arean av $f_A(T)$ är 30

c) $\left. \begin{array}{l} \text{Spegling} - \text{bevarar area} \\ \text{byter orientering} \end{array} \right\} \Rightarrow |B| = \underline{\underline{-1}}$
 Arean av $f_B(T) = \text{arean}(T) = \underline{\underline{3}}$

d) Rotation - bevarar area och orientering $\Rightarrow |C| = \underline{\underline{1}}$
 Arean av $f_C(T) = \text{arean}(T) = \underline{\underline{3}}$

e) Skalning med 3, skalar arean med $3^2 = 9$
 $\Rightarrow |D| = \underline{\underline{9}}$ Arean av $f_D(T) = 9 \cdot \text{arean}(T) = \underline{\underline{27}}$

$$3a) \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{så} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}}$$

b) Inversen kan tex beräknas med Gausselimination, (eller möjligtvis genom att beräkna adjunkten).

Gausselim:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array} \right]$$

$$\underline{\text{Slutsats}} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$c) \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1 \end{array} \right] \cdot \frac{-2}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \cdot \frac{-1}{3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2/3 & -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{array} \right]$$

$$\underline{\text{Slutsats}}: \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

d) Från räkningarna ovan kan vi gissa att

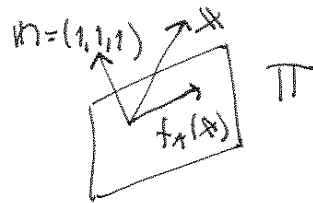
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Kontrollera detta genom att multiplicera ihop dem.

Vi hade förstås kunnat gissa oss till inversen i c) oavsett, om inte någon Gausselim, så kanske efter några förs.

Kommentar: Låt $\mathbb{1}$ vara $n \times n$ -matrisen med alla element = 1.

$$\text{Så} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \mathbb{1} - I, \quad \text{och att} \quad (\mathbb{1} - I)(\mathbb{1} - (n-1)I) = \mathbb{1} \cdot \mathbb{1} - n\mathbb{1} \cdot I + (n-1) \cdot I \cdot I \\ = n\mathbb{1} - n\mathbb{1} + (n-1)I = (n-1)I. \quad \text{Alltså} \quad (\mathbb{1} - I)^{-1} = \frac{1}{n-1}(\mathbb{1} - (n-1)I)$$



4) $f_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ortogonal proj π
 $x \mapsto Ax$ $\pi: x+y+z=0$

Obs: en normalvektor till π är $n = (1,1,1)$

Minns: $\text{Noll}(A) = \{ x \text{ s\u00e5 att } Ax = 0 \}$

Alla $\text{Noll}(A) = \{ x \text{ ortogonal mot } \pi \} = \{ x = t(1,1,1), t \in \mathbb{R} \}$

Obs $f_A(\mathbb{R}^3) = \pi$ Minns $\text{Kolonn}(A) = f_A(\mathbb{R}^3)$ Alla $\text{K\u00e4rn}(A) = \pi$

Slutsats: $\text{Kolonn}(A) = \text{planet } x+y+z=0$

$\text{rang}(A) = \dim(\text{Kolonn}(A)) = 2$

$\text{Noll}(A) = \text{m\u00e4njen } t(1,1,1) \ t \in \mathbb{R}$

$\text{rankdim} = \dim(\text{Noll}(A)) = 1$

5) Givet $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x,y) \mapsto x+yi$ $z \mapsto (3+i)z$ $x \mapsto g^{-1} \circ f \circ g(x)$

Obs: $g^{-1}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $z \mapsto (\text{Re } z, \text{Im } z)$

Minns: avbildningsmatrisen till F ges av $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} F(\mathbf{e}_1) & \frac{1}{\sqrt{2}} F(\mathbf{e}_2) \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$F(\mathbf{e}_1) = F(1,0) = g^{-1}(f(g(1,0))) = g^{-1}(f(1)) = g^{-1}(3+i) = (3,1)$

$F(\mathbf{e}_2) = F(0,1) = g^{-1}(f(g(0,1))) = g^{-1}(f(i)) = g^{-1}((3+i)i) = g^{-1}(3i-1) = (-1,3)$

Slutsats: F 's avbildningsmatris \u00e4r $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

6) Givet $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (2,0)$, $Q = (4,3)$.

L\u00e4t $d(P, l)$ betyda avst\u00e4ndet mellan punkten P och linjen l .

Vi vill hitta l s\u00e5 att $d(P_1, l) = d(P_2, l)$.

L\u00e4t n vara en normalvektor till l med $|n|=1$. D\u00e4r g\u00e4ller projektionsformeln att

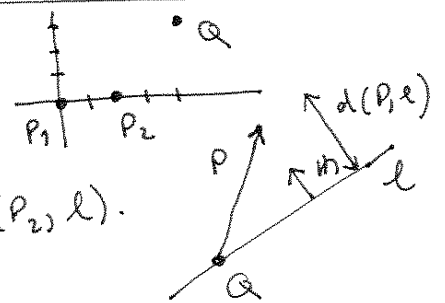
$d(P, l) = |\overrightarrow{QP} \cdot n|$ d\u00e4r Q \u00e4r en godtycklig punkt p\u00e5 l .

Linjen vi s\u00f6ker skall allts\u00e5 ha en normalvektor $n = (n_1, n_2)$ som uppf\u00f6ller

$$|\overrightarrow{P_1Q} \cdot n| = |\overrightarrow{P_2Q} \cdot n| \Leftrightarrow |(4,3) \cdot n| = |(2,3) \cdot n| \Leftrightarrow$$

$$|4n_1 + 3n_2| = |2n_1 + 3n_2| \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4n_1 + 3n_2 = 2n_1 + 3n_2 \Rightarrow n_1 = 0 \\ \text{eller} \\ 4n_1 + 3n_2 = -2n_1 - 3n_2 \Leftrightarrow 6n_1 + 6n_2 = 0 \Leftrightarrow n_1 = -n_2 \end{cases}$$



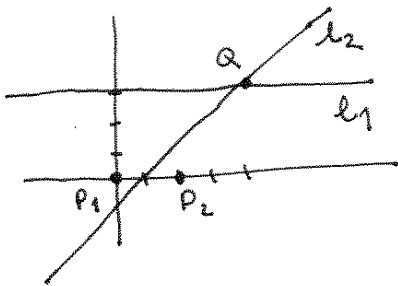
6) forts.

Det finns alltid två linjer med de önskade egenskaperna.

	$n=(n_1, n_2)$	\Rightarrow linjens ekvation $n_1x + n_2y = d$	Q ligger på linjen, bestämmer d
Fall 1	$(0, 1)$	$y = d$	$3 = d$
Fall 2	$(1, -1)$	$x - y = d$	$4 - 3 = d \Leftrightarrow d = 1$

Slutsats: Det finns två linjer som innehåller Q och uppfyller $d(P_1, l_i) = d(P_2, l_i)$,
nämligen $l_1: y = 3$

$$l_2: x - y = 1$$



7) Se Sparr kap 5.3

8a) Se Sparr kap 7.8

b) Det finns i allmänhet inte en entydig lösning till $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$ (*)

(Speciellt är det ju så att om $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbart så är varje lösning till $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$ en lösning till $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$, och $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$ har ju inte alltid en entydig lösning.)

Låt t ex $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Di är (*): $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

som har lösningen $\mathbf{x} = t(1, -1)$, $t \in \mathbb{R}$