Tentamen
Linjär algebra och geometri, TMA660

131022 kl. 08.30–12.30

Examinator: Iulia Pop, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Timo Hirscher, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: inga, ej heller räknedosa

Betygsgränserna är följande: betyg 3 (24 poäng), betyg 4 (36 poäng), betyg 5 (48 poäng). För att få maximalt poäng krävs kompletta detaljerade lösningar. Lösningar läggs ut på kursens webbsida senast första vardagen efter tentamen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

---

1. (i) Linjen l är skärningen mellan planen $2x + 2y + z = 5$ och $2x - y - 2z + 1 = 0$. Bestäm avståndet från punkten $(3, 3, 2)$ till l. (4p)

(ii) Punkterna $(1, 3, 4)$ och $(3, -1, 8)$ är spegelbilder av varandra i ett visst plan. Bestäm en ekvation för detta plan. (4p)

2. Bestäm en positivt orienterad ortonormerad bas $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$ sådan att $\hat{e}_1$ är paralell med vektorn $(1, 1, -1)$ och $\hat{e}_2$ är paralell med planet $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Ange koordinaterna för $(1, 2, 3)$ i den nya basen $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$. (8p)

3. Bestäm rang, nolldimension, baser till kolonnrummet, respektive nollrummet till matrisen (8p)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & -2 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. (i) För vilka värden på a är vektorerna $(0, a, 1, 0)$, $(a, 0, a, 1)$, $(1, a, 0, a)$ och $(0, 1, a, 0)$ linjärt beroende? (3p)

(ii) Lös matrisekvationen $AXB = C$ där (3p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Låt $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildningen som ges av spegling i planet $x + 2y - z = 0$. Låt $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildningen som definieras av $G(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \times \mathbf{a}$, där $\mathbf{a} = (1, -1, 1)$. Bestäm avbildningsmatrisen (m.a.p. kanoniska basen) för den sammansatta avbildningen $F \circ G$. Beräkna också värdemängden till $F \circ G$. (8p)

6. (i) Låt A vara en $n \times n$ matris och $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Antag att $A^4\mathbf{v} = \mathbf{0}$ och $A^3\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Bevisa att vektorerna $\mathbf{v}$, $A\mathbf{v}$, $A^2\mathbf{v}$ och $A^3\mathbf{v}$ är linjärt oberoende. (4p)

(ii) Antag att A är en 3×3 matris och $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ satisfierar $A^4\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Visa att även $A^3\mathbf{v} = \mathbf{0}$. (2p)

7. Bevisa att vektorprodukten i $\mathbb{R}^3$ satisfierar $(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \times \mathbf{v} = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{v} + \mathbf{u}_2 \times \mathbf{v}$ och $(\lambda\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$, för alla $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (inklusive bevis av hjälpsatsen). (8p)

8. Låt A vara en $n \times n$ matris. Visa följande påståenden:

(i) Om A har en vänsterinvers, då har ekvationen $AX = 0$ bara trivial lösning. (2p)

(ii) Om ekvationen $AX = Y$ är lösbar för varje Y, då har A en högerinvers. (2p)

(iii) Om A har en vänsterinvers eller högerinvers, då är A inverterbar. (2p)

(iv) A är inverterbar om och endast om A:s kolonnvektorer utgör en bas. (2p)

Lycka till!
Iulia Pop

Lösningar till Linjär algebra och geometri
TMA 660, 2013-10-22

1. (i) $l: \begin{cases} 2x+2y+z=5 \\ 2x-y-2z=-1 \end{cases}$. Sätt $z=t \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y=5-t \\ 2x-y=-1+2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2-t \\ x=\frac{1+t}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t \\ y=2-t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow$ linjen går genom $P_0\left(\frac{1}{2},2,0\right)$ och har riktning $\bar{v}=\left(\frac{1}{2},-1,1\right)$.

$\overrightarrow{P_0P}=(3,3,2)-\left(\frac{1}{2},2,0\right)=\left(\frac{5}{2},1,2\right)$

$\mathrm{proj}_{\bar{v}}\overrightarrow{P_0P}=\frac{\overrightarrow{P_0P}\cdot\bar{v}}{\|\bar{v}\|^2}\bar{v}=\frac{\frac{5}{4}-1+2}{\frac{1}{4}+1+1}\bar{v}=\bar{v}$

$\overrightarrow{P_0P}-\mathrm{proj}_{\bar{v}}\overrightarrow{P_0P}=\left(\frac{5}{2},1,2\right)-\left(\frac{1}{2},-1,1\right)=(2,2,1) \Rightarrow \text{avst}(P,l)=|(2,2,1)|$
$=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=\boxed{3}$.

(ii) $P_1(1,3,4)$, $P_2(3,-1,8) \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2}=(2,-4,4)$.
Planet har normalriktning parallell med $\overrightarrow{P_1P_2}$. Välj $\bar{n}=(1,-2,2)$.
Dessutom går planet genom mittpunkten av P_1P_2: $M\left(\frac{1+3}{2},\frac{3-1}{2},\frac{4+8}{2}\right)$
alltså $M(2,1,6)$. Ekvationen för planet är
$1(x-2)-2(y-1)+2(z-6)=0 \iff \boxed{x-2y+2z=12}$.

2. $|(1,1,-1)|=\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\hat{e}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)}$
Normalen till planet är $\bar{n}=(1,1,1)$. Eftersom den sökta vektorn $\hat{e}_2$ är ortogonal på både $\hat{e}_1$ och $\bar{n}$, följer att den är parallell med $\bar{n}\times\bar{e}_1$

$\bar{n}\times\bar{e}_1=\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-2\bar{e}_1+2\bar{e}_2=-2(1,-1,0)$. Välj $\hat{e}_2=\frac{1}{|(1,-1,0)|}(1,-1,0)$

alltså $\boxed{\hat{e}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)}$. Den tredje vektorn $\hat{e}_3=\hat{e}_1\times\hat{e}_2=\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}$

$\Rightarrow \hat{e}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(-\bar{e}_1-\bar{e}_2-2\bar{e}_3) \iff \boxed{\hat{e}_3=-\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)}$.

Koordinaterna för $(1,2,3)$ i basen $\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3$ ges av:

$\hat{x}_1=(1,2,3)\cdot\hat{e}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,2,3)\cdot(1,1,-1)=\frac{1}{\sqrt{3}}(1+2-3)=0$

$\hat{x}_2=(1,2,3)\cdot\hat{e}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,2,3)\cdot(1,-1,0)=\frac{1-2}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\hat{x}_3=(1,2,3)\cdot\hat{e}_3=-\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,3)\cdot(1,1,2)=\frac{-(1+2+6)}{\sqrt{6}}=\frac{-9}{\sqrt{6}}$

③. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & -2 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 & -3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Pivotelement $2 \Rightarrow \text{rang } A = 2$.

$\text{Kol}(A)$ har bas $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\text{nolldim } A + \text{rang } A = 5 \Rightarrow \text{nolldim } A = 3$

Nollrummet : $AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$ Sätt $\begin{cases} x_3 = t \\ x_4 = s \\ x_5 = u \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2t - 2s - 2u \\ x_2 = t - s - 3u \end{cases} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t-2s-2u \\ t-s-3u \\ t \\ s \\ u \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

spänner upp (och linjärt oberoende)

Bas till nollrummet är $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

④ (i) $\begin{vmatrix} 0 & a & 1 & 0 \\ a & 0 & a & 1 \\ 1 & a & 0 & a \\ 0 & 1 & a & 0 \end{vmatrix} = -a \cdot \begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & a \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a^2(a^2-1) - (a^2-1) =$

$= (a^2-1)^2$

Vektorerna är linjärt beroende omm determinanten är 0. Vi får $a^2 = 1 \Rightarrow \boxed{a = \pm 1}$.

(ii) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) -1 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) -1 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) -1 \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) -1 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$, där högra delen är A^{-1}.

$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot \text{adj}(B) = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

Lösningen är $X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}}$

(5) Normalriktning till planet : $\bar{n} = (1,2,-1)$

$$F(\bar{u}) = \bar{u} - 2\,\mathrm{proj}_{\bar{n}}\bar{u} = \bar{u} - 2\,\frac{\bar{u}\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|^2}\,\bar{n}$$

$$F(x,y,z) = (x,y,z) - \frac{2(x,y,z)\cdot(1,2,-1)}{6}(1,2,-1) = (x,y,z) - \frac{1}{3}(x+2y-z)(1,2,-1)$$

$$F(x,y,z) = \left(x - \tfrac{1}{3}(x+2y-z),\ y - \tfrac{2}{3}(x+2y-z),\ z + \tfrac{1}{3}(x+2y-z)\right)$$

$$= \frac{1}{3}(2x-2y+z,\ -2x-y+2z,\ x+2y+2z)$$

F har avbildningsmatrisen $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$G(\bar{u}) = \bar{u} \times \bar{a} \Rightarrow G(x,y,z) = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ x & y & z \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (y+z)\bar{e}_1 + (z-x)\bar{e}_2 - (x+y)\bar{e}_3 = (y+z,\ z-x,\ -x-y)$$

G har avbildningsmatrisen $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Då har $F \circ G$ avbildningsmatrisen $AB = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{AB = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & -3 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}}$. Värdemängden till $F \circ G$ är $\mathrm{kol}(AB)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & -3 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{kol}(AB) = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}\right\} =$$

planet som har normalriktning

$$\bar{n}_0 = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & -1 & -4 \\ 1 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 15\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2 - 3\bar{e}_3 = 3\cdot(5,-1,-1).$$

Värdemängden är alltså planet $\boxed{5x - y - z = 0}$.

(6) i) Antag att $\lambda_1\bar{v} + \lambda_2 A\bar{v} + \lambda_3 A^2\bar{v} + \lambda_4 A^3\bar{v} = \bar{0}$, där $\lambda_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,4}$.
Multiplicera ekvationen med A^3. Vi får:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1 A^3\bar{v} + \lambda_2 A^4\bar{v} + \lambda_3 A^5\bar{v} + \lambda_4 A^6\bar{v} = \bar{0}. \\ &\text{Eftersom } A^4\bar{v} = \bar{0} \Rightarrow A^5\bar{v} = A\bar{0} = \bar{0},\ A^6\bar{v} = A\bar{0} = \bar{0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_1 A^3\bar{v} = \bar{0}.$$

Men $A^3\bar{v} \neq \bar{0} \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 0}$ Då blir $\lambda_2 A\bar{v} + \lambda_3 A^2\bar{v} + \lambda_4 A^3\bar{v} = \bar{0}$.

Multiplicera med $A^2 \Rightarrow \lambda_2 A^3\bar{v} + \lambda_3 \underbrace{A^4\bar{v}}_{=\bar{0}} + \lambda_4 \underbrace{A^5\bar{v}}_{=\bar{0}} = \bar{0} \Rightarrow \lambda_2 A^3\bar{v} = \bar{0}$

$\Rightarrow \boxed{\lambda_2 = 0} \Rightarrow \lambda_3 A^2\bar{v} + \lambda_4 A^3\bar{v} = \bar{0}$. Multiplikation med A ger

$\lambda_3 A^3\bar{v} + \lambda_4 \underbrace{A^4\bar{v}}_{=\bar{0}} = \bar{0} \Rightarrow \lambda_3 A^3\bar{v} = \bar{0} \Rightarrow \boxed{\lambda_3 = 0} \Rightarrow \lambda_4 A^3\bar{v} = \bar{0} \Rightarrow \boxed{\lambda_4 = 0}$

ii) Antag att $A^3\bar{v} \neq \bar{0}$. Då är $\bar{v}, A\bar{v}, A^2\bar{v}, A^3\bar{v}$ linjärt oberoende enligt (i). Vi har 4 vektorer i $\mathbb{R}^3$ som är linjärt oberoende, omöjligt!

(7), (8) Teorifrågor, kolla boken s. 87 (Sats 4) och s. 132–133 (Lemma 3, 4, Sats 5).