

MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola

Tentamen i Linjär algebra och geometri, TMA660, 20/10/2009, 14.00-18.00

Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Urban Larsson, 0703-088304.

Besökstider: ca 15.00 och 17.00

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 30 poäng på del 1.

Del 1

1. (a) Vilka av följande matriser är trappstegsmatriser? Vilka är reducerade trappstegsmatriser (1p)

$$\begin{array}{lll} \text{i)} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{ii)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} & \text{iii)} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ \text{iv)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} & \text{v)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{vi)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \text{vii)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} & \text{viii)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} & \text{ix)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- (b) Betrakta matriserna i a) som utvidgade matriser för ekvationssystem. För trappstegsmatriserna ange antal av lösningar utan att göra beräkningar. Ge kort motivation för dina svar. (4p)
- (c) För ekvationssystem i b) som har mera än en lösning, ange lösningar på vektorparametrisk form. (3p)

2. (a) Beräkna determinant (2p)

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

- (b) Beräkna determinant (2p)

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

- (c) Beräkna produkt (2p)

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 2 & 13 & 6 & -24 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

- (d) Beräkna determinant (2p)

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 2 & 13 & 6 & -24 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

3. (a) Hitta en ekvation för ett plan π som innehåller linjerna (4p)

$$\ell_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = -\frac{z}{2} \text{ och } \ell_2 : \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = -\frac{z}{2}.$$

- (b) I vilken punkt skär Y -axeln planet π som du har hittat i uppgift (a). (4p)

4. Polynomet $p(x) = 2x^3 + (3+2i)x^2 + (1+3i)x + i$ har minst en reel och minst en rent imaginär rot. Hitta rötterna av polynomet. (8p)

5. (a) Hitta med hjälp av minsta kvadratmetoden bästa approximativ lösning till systemet: (6p)

$$\begin{cases} x - y & = 10 \\ x + y + 3z & = 11 \\ x - y + 2z & = 10 \\ x + 2z & = 8 \\ x + y + 3z & = 11 \end{cases}$$

- (b) Ändras lösningen om man tar bort 2:a eller 5'te ekvation (som är identiska)? Varför? (2p)

Del 2

6. A är en 10×5 matris. B är en 5×10 matris. Vilka värden kan möjligen $\det(A \cdot B)$ anta? Motivera ditt svar. (10p)

7. Betrakta matrisen $A = (a_{kj})_{k,j=1}^{n,n}$, sådan att $a_{kj} = b_{\min(k,j)}$, d.v.s.

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & b_1 & b_1 & \dots & b_1 \\ b_1 & b_2 & b_2 & \dots & b_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

(a) Hitta $\det(A)$. Motivera ditt svar. (4p)

(b) Hitta A^{-1} . Motivera ditt svar. (4p)

(c) Beräkna $\det(A)$ om $n = 6$ och $b_m = e^{i\frac{m}{3}\pi}$, $m = 1, \dots, 6$. (4p)

8. $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ är vektorer i \mathbb{R}^3 . Ingen av dem är noll-vektor

(a) Visa att $\vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v})$ är en linjär kombination av \vec{u} och \vec{v} . (2p)

(b) Anta att \vec{u} är inte en multipel av \vec{v} . Betrakta en bas $\mathfrak{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$. Hitta uttryck för koordinaterna av $\vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v})$ i basen \mathfrak{B} med hjälp av $\|\vec{u}\|, \|\vec{v}\|, \|\vec{w}\|, (\vec{u}, \vec{v}), (\vec{v}, \vec{w}), (\vec{w}, \vec{u})$. Motivera ditt svar. (10p)

(c) Visa att $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) + \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{0}$. (2p)

(d) Visa att $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{w} = \vec{w} \times \vec{u}$ om och endast om $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$. (4p)

Information om när tentan är färdiggrättad och tid för visning av tentan kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL!

Maria

Multiplicationstabeln

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266
15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225	240	255	270	285
16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240	256	272	288	304
17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	204	221	238	255	272	289	306	323
18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234	252	270	288	306	324	342
19	38	57	76	95	114	133	152	171	190	209	228	247	266	285	304	323	342	361

Facit till Del 1. 20/10/2010

1. a) trappsteg: i) iii) vi) vii) viii) ~~ix)~~
 reducerade trappsteg: inga

- b) i) ∞
 iii) ∞
 vi) 0
 vii) 0
 viii) 1

c) i) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t$

iii) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20.5 \\ 10 \\ -5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t$

2. a) -3

b) 6

c) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

d) -18

3) a) $2x - 2y - z = 6$

b) $(0, -3, 0)$

4) $x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = -i$

5) a) $x = 10, y = 1/2, z = 0$

b) Ja,