TMA660
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Linjär algebra och geometri F

Datum: 2007-08-20, kl. 8.30 - 12.30.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Magnus Goffeng, tel. 0762-721860, besöker salen ca 9.30 och 11.30.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

==

1. Bestäm alla värden på parametern λ för vilka det linjära ekvationssystemet nedan har oändligt många lösningar samt finn dessa

$$\begin{cases} 4x_1 + \lambda x_2 - (\lambda+4)\,x_3 &= -4 \\ (\lambda-2)\,x_1 + 2x_2 - x_3 &= 7 \\ 3x_1 + \lambda x_2 - (\lambda+3)\,x_3 &= -3 \end{cases} . \quad (8p)$$

2. Tetraedern $ABCD$ har hörn med koordinater $A\,(1,2,3)$, $B\,(-1,0,1)$, $C\,(0,0,2)$, $D\,(2,0,7)$.

(a) Beräkna tetraederns volym. (2p)

(b) Beräkna arean av triangeln ABC. (2p)

(c) Beräkna längden av den kortaste av tetraederns fyra höjder. (4p)

3. Lös ekvationen

$$2z^3 + (1-4i)z^2 + (1+12i)z - (1+5i) = 0,$$

givet att den har en reell rot. (8p)

4.(a) Lös ekvationen $z^7 - 1 = 0$. (5p)

(b) Lös ekvationen $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$. (4p)

5. En symmetrisk $n \times n$ matris kallas positiv om olikheten $Ax \cdot x > 0$ gäller för alla $x \in \mathbb{R}^n$ som är skilda från nollvektorn. Visa att en positiv matris har positiva diagonalelement. (5p) Visa att en symmetrisk $n \times n$ matris med positiva diagonalelement inte behöver vara positiv. (2p)

6. Låt $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vara en linjär avbildning. Visa att det finns en entydigt bestämd vektor $y \in \mathbb{R}^n$ sådan att $l(x) = x \cdot y$ för alla $x \in \mathbb{R}^n$. (8p)

7. Formulera och bevisa Cauchy-Schwarz olikhet. (6p)

8. Formulera och bevisa satsen om eventuella rationella rötter till en algebraisk ekvation med heltalskoefficienter. (6p)

/JM

TMA660 Linjär algebra och geometri F

Lösningar 20/8 -07

1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & \lambda & -(\lambda+4) & -4 \\ \lambda-2 & 2 & -1 & 7 \\ 3 & \lambda & -(\lambda+3) & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ + \\ |\cdot(-1) \end{array}$$

$$\overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ \lambda-2 & 2 & -1 & 7 \\ 3 & \lambda & -(\lambda+3) & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot(-3) \quad |\cdot(-(\lambda-2)) \\ + \\ + \end{array}$$

$$\overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & \lambda-3 & \lambda+5 \\ 0 & \lambda & -\lambda & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot(-\lambda) \\ |\cdot 2 \quad + \end{array}$$

$$\overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & \lambda-3 & \lambda+5 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+\lambda & -\lambda^2-5\lambda \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ |\cdot(-1) \end{array}$$

sista raden: $0 \quad 0 \quad \lambda(\lambda-1) \mid \lambda(\lambda+5)$

$\Rightarrow$ oändligt många lösningar för $\lambda=0$

ingen lösning för $\lambda=1$

entydig lösning för $\lambda\neq 0;1$

(alternativt: $\det(\text{systemet})=0$)

$$\lambda = 0: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_3 = t \qquad x_2 = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}t$$

$$x_1 = -1 + t \qquad , \quad t \in \mathbb{R}$$

2.

$$\vec{DA} = (-1, 2, -4)$$
$$\vec{DB} = (-3, 0, -6)$$
$$\vec{DC} = (-2, 0, -5)$$

(a) $V = \frac{1}{6} \left| (\vec{DA} \times \vec{DB}) \cdot \vec{DC} \right| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & -6 \\ -2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \right| =$

$$= \frac{1}{\cancel{6}_3} \cancel{2} \left| (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{3}(15-12) = 1$$

(b) $A_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right| =$

$$= \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ +2 & +2 & +2 \\ +1 & +2 & +1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| (-2, 0, 2) \right| =$$

$$= \left| (-1, 0, 1) \right| = \sqrt{2}$$

(c) Analogt: $A_{BCD} = \frac{3}{2}$,

$A_{ACD} = \frac{5}{2}\sqrt{5}$, $A_{ABD} = 3\sqrt{6}$

Den kortaste höjden är den mot sidan med störst area, d.v.s mot $\triangle ABD$

$$h_{min} = h_C = 3V / A_{ABD} = 1/\sqrt{6} = \sqrt{6}/6$$

3) Sätt in $z = a$, $a \in \mathbb{R}$ (3)

$Re = 0$: $2a^3 + a^2 + a - 1 = 0$

$Im = 0$: $-4a^2 + 12a - 5 = 0$

$4a^2 - 12a + 5 = 0$ $\quad a_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{4} =$

$= \frac{6 \pm 4}{4}$ $\quad \Big| \; a_1 = \frac{5}{2}, \; a_2 = \frac{1}{2}$

a_1: $2 \cdot \frac{125}{8} + \frac{25}{4} + \frac{5}{2} - 1 \neq 0$

a_2: $2 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{z_1 = \frac{1}{2}}$ är reell rot till ekvationen

Polynomdivision ger

$2z^3 + (1-4i)z^2 + (1+12i)z - (1+5i) =$

$= 2\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z^2 + (1-2i)z + (1+5i)\right) = 0$

Återstår att lösa andragradsekvationen

$z^2 + (1-2i)z + (1+5i) = 0$

Kvadratkomplettering:

$\left(z + \frac{1-2i}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-2i}{2}\right)^2 + 1 + 5i =$

$= \left(z + \frac{1-2i}{2}\right)^2 - \frac{1-4i-4}{4} + 1 + 5i =$

$= \left(z + \frac{1-2i}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} + i + 1 + 5i = 0$

$$\left(z+\frac{1-2i}{2}\right)^2 = -\frac{7}{4}-6i$$

Sätt $w = z+\frac{1-2i}{2} = u+iv$

$$u^2-v^2 = -\frac{7}{4}$$
$$2uv = -6 \Rightarrow u \text{ o } v \text{ har olika tecken}$$

$$|w|^2 = u^2+v^2 = \sqrt{\frac{49}{16}+36} =$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{49+576} = \frac{1}{4}\sqrt{625} = \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow 2u^2 = \frac{18}{4} \qquad u^2 = \frac{9}{4}$$
$$2v^2 = \frac{32}{4} \qquad v^2 = 4$$

$\Rightarrow$ de två möjligheterna är

$$w_1 = \frac{3}{2}-2i \quad \text{o} \quad w_2 = -\frac{3}{2}+2i,$$

vilket ger

$$\boxed{z_2 = 1-i, \quad z_3 = -2+3i}$$

---

4. (a) $z^7 = 1 = \cos 0 + i \sin 0$

$$z_k = \sqrt[7]{1}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{7} + i\sin\frac{0+2k\pi}{7}\right) =$$
$$= \cos\frac{2k\pi}{7} + i\sin\frac{2k\pi}{7} = e^{i\frac{2k\pi}{7}}, \quad k=0,\dots,6$$

(b) geometrisk summa: för $z \neq 1$ (ej rot)

$$z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1 = \frac{z^7-1}{z-1}$$

$\Rightarrow$ rötterna är samma som i (a), (5)
utom $z_0 = 1$

$$\Rightarrow \quad z_k = e^{i\frac{2\pi k}{7}}, \quad k = 1, \ldots, 6$$

---

6. $\underline{l}$ linjär avbildning $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$\Rightarrow \underline{l}$ ges (givet standardbasen) av en $1 \times n$ matris, vars kolonner är l(basvektorerna), d.v.s.

$$L = \left(l(e_1) \;\; l(e_2) \;\; \ldots \;\; l(e_n) \right)$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$ har vi $l(x) = Lx$
(tolkat som kolonnvektor)

$$Lx = l(e_1)x_1 + \ldots + l(e_n)x_n =$$

$$= \left(l(e_1), \ldots, l(e_n) \right) \cdot x = x \cdot \left(l(e_1), \ldots, l(e_n) \right)$$

$$\Rightarrow \exists\, y = \left(l(e_1), \ldots, l(e_n) \right) \; ; \; l(x) = x \cdot y \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Antag att y, z : $l(x) = x \cdot y = x \cdot z \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \quad x \cdot (y - z) = 0 \quad \forall \; x \in \mathbb{R}^n$$

Tag $x = y - z$; $(y - z) \cdot (y - z) = 0$

$$\Rightarrow \quad |y - z|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y - z = 0$$

$$\Rightarrow \quad y = z$$

$\Rightarrow$ vektorn $\underline{y}$ är entydigt bestämd alternativt : $e_1 \ldots e_n$ standardbasen i $\mathbb{R}^n$

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$$

l linjär $\Rightarrow$ $l(x) = x_1 l(e_1) + \ldots + x_n l(e_n)$

$$= x \cdot (l(e_1), \ldots, l(e_n)) \quad \text{o.s.v.}$$

5.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$Ae_k = A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$$

$Ae_k \cdot e_k = a_{kk} > 0$ enligt villkoret A positiv

Betrakta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$ symmetrisk, positiva diagonal-element

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \not> 0$$

$\Rightarrow$ A ej positiv