

Innehåll:

- Linjära ekvationssystem
 - Geometri
 - Vektorer
 - Linjer och plan
 - Matrimer
 - Relation till linjära ekvationssystem
 - Linjära avbildningar
 - Determinanter
 - Egenvärden och -vektorer
 - Vektorrum \mathbb{R}^n
 - Komplexa tal
-

Linjära ekvationssystem: (kap. 1)Plan:

- Definition
 - Lösa linjära ekvationssystem
-

Def. En (reell) linjär ekvation är på formen $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$ där a_1, \dots, a_n, b är (reella) tal.

Ex.	Ekvation	Linjär?	# Varibler	Lösningsmängd
	$y = kx + m$	Ja	2st (x, y)	
	$x = -2$	Ja	1st (x)	
	$xy = 1$	Nej	2st (x, y)	
	$x_1 + x_2 + x_3 = 1$	Nej	3st (x_1, x_2, x_3)	
	$x + y + z = 7$	Ja	3st (x, y, z)	

Obs. Lösningsmängden till linjära ekvationssystem är "platt" (ej lerökt). (Ex. punkt, linje, plan, rum etc.)

Def. Ett linjärt ekvationssystem är en samling linjära ekvationer (i samma variabler).

$$\text{Ex. } \begin{cases} 2y - 8z = 8 \\ x - 2y + z = 0 \\ -4x + 5y + 9z = -9 \end{cases} (*)$$

Lösa linjära ekvationssystem - Gaußelimination:

Ex. Lös (*):

Steg 1: Eliminera x ur alla ekvationer utom en.

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 2y + z = 0 \quad (\text{I}) \\ 2y - 8z = 8 \quad (\text{II}) \\ -4x + 5y + 9z = -9 \quad (\text{III}) \end{array} \right. \quad \downarrow 4$$

För att eliminera x , tag 4(I), lägg till (III).

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 2y + z = 0 \quad (\text{I}') \\ 2y - 8z = 8 \quad (\text{II}') \\ -3y + 13z = -9 \quad (\text{III}') \end{array} \right.$$

Steg 2: Eliminera y ur alla ekvationer utom två.

Förenkla (II') genom att multiplicera med $\frac{1}{2}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 2y + z = 0 \quad (\text{I}'') \\ y - 4z = 4 \quad (\text{II}'') \\ -3y + 13z = -9 \quad (\text{III}'') \end{array} \right.$$

Tag 3(III''), lägg till (III'').

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 2y + z = 0 \quad (\text{I''''}) \\ y - 4z = 4 \quad (\text{II''''}) \\ z = 3 \quad (\text{III''''}) \end{array} \right.$$

$$(\text{III''''}) \Rightarrow z = 3$$

$$(\text{II''''}) \Rightarrow y - 4 \cdot 3 = 4 \Leftrightarrow y = 16$$

$$(\text{I''''}) \Rightarrow x - 2 \cdot 16 + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 29$$

$$\begin{cases} x = 29 \\ y = 16 \\ z = 3 \end{cases}$$

Def. Operationerna: (elementära radoperationer)

- 1) Byt ordning på elevationerna.
- 2) Multiplisera en elevation med ett tal ($\neq 0$).
- 3) Addition av tal · elevation till annan elevation.

Sats: (sats 1 s. 9)

Om det linjära elevationssystemet (*) fås genom att utföra elementära radoperationer på ett annat elevationsssystem (**), har (*) och (**) samma lösningar.

Def. (*) och (**) är elevivalenta.

Def. Givet ett linjärt elevationsssystem (*), sätt en ring runt den första termen i varje rad.

- (*) är "trappformat" om varje ring är till höger om ringarna i föregående elevation.
- Elementen med ringar kallas pivot-element.

Ex. A)
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_2 + 11x_3 = 0 \end{cases}$$
 (byt)
(ej trappformat)

B)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4 \\ 5x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$
 (kolonner)
(trappformat)

Formalisering:

- Lösning saknas om det finns en rad $VL=0$ och $HL \neq 0$.
- OBS: Varje kolonn motsvarar en variabel.
- Varje kolonn som saknar pivot-element motsvarar en fri variabel (kan väljas fritt, likt parametrar).
- För varje elevation med start nerifrån uttryckas pivotvariablerna i de fria variablerna.

(elementära radoperationer)

Allmänt: (*) Allmänt elev.syst. $\xrightarrow{\quad}$ (**) Trappformat elev.syst.

Ett linjärt ekv.syst. har inga, en eller oändligt många lösningar.

Föreläsning 1:

- Lösa linjärt elevationssystem - Gausselimination
- Definition linjärt elevationssystem
- Radoperationer \rightarrow trappformat elevationssystem
- Noll, en eller oändligt många lösningar
- Geometrisk lösning (punkt, linje, plan, rum etc.)

Vektorer: (kap. 2)

Plan:

- Definition vektorer
- Räkneregler

En vektor är en geometriskt styrka med storlek och riktning.
Ex. hastighet, acceleration, kraft.

Jämför med skalarer, som endast har storlek.
Ex. längd, volym, fart.

Def. En sträcka AB är ett linjesegment mellan två punkter A och B (i rummet/planet/linjen etc.).

Def. En riktad sträcka \overrightarrow{AB} är en sträcka AB med en riktning (A kommer före B) (A startpunkt, B slutpunkt).

Obs. En riktad sträcka bestäms av:

- Startpunkt
- riktning
- Längd

Def. En vektor \mathbf{u} är en mängd av riktade sträckor, där \overrightarrow{AB} och \overrightarrow{CD} tillhör samma vektor \mathbf{u} om \overrightarrow{AB} kan fås genom parallellförflyttning av \overrightarrow{CD} .

(en vektor är en riktad sträcka utan startpunkt)

(en vektor består alltså av alla riktade sträckor med samma längd och riktning)

$\overrightarrow{AB} \in \mathbf{u}$ sägs vara en representant för \mathbf{u} .

Anm. Ofta är det praktiskt att låta representanter \vec{AB} beteckna u .
(Man kan skriva $u = \vec{AB}$)

Ex. Vektorn som representeras av \vec{AA} kallas för nollvektorn (\emptyset).
(har ej riktning)

Egenskaper/begrepp:

- Längden av en vektor u definieras som längden av $\vec{AB} \in u$.
- Om $|u| > 0$ definieras dess riktning som riktningen av $\vec{AB} \in u$.

Obs. Väldefinierat, eftersom alla representanter för u har samma längd och riktning.

Def. u och v är parallella om $\vec{AB} \in u$ är parallell med $\vec{CD} \in v$.

Ex.  (parallella vektorer)

Obs. Nollvektorn är den enda vektorn med längd 0 ($|\emptyset|=0$) och är parallell med alla vektorer.

Räkneoperationer: (kap. 2.2)

Addition av vektorer:

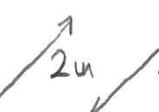
$\vec{AB} \in u$, $\vec{BC} \in v$ (u 's slutpunkt = v 's startpunkt)
 $\Rightarrow u + v$ representeras av \vec{AC} .

Ex. $u + \emptyset = \vec{AB} + \vec{BB} = \vec{AB} = u$

Multiplikation med skalärer:

Låt $\lambda \in \mathbb{R}$ (λ skalär), då är λu den vektor som har längd $|\lambda| |u|$.

Om $|\lambda| u > 0$ har λu samma riktning som u om $\lambda > 0$.
motsatt riktning mot u om $\lambda < 0$.

Ex. $1u$  ($\emptyset = 0u$)

Ex. $u+u$, $|u| + |u| = 2|u|$ (samma riktning som u)

Ex. Om $u = \vec{AB}$, är $-1u = \vec{BA}$

Ex. $u + (-1)u = \vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$

Räkneregler: (sats 1 s.23)

Addition:

$$(1) u + v = v + u \quad (\text{kommutativitet})$$

$$(2) u + (v + w) = (u + v) + w \quad (\text{associativitet})$$

$$(3) u + \vec{0} = u \quad (\text{Obs. kan skriva } u + v + w \text{ utan betydighet})$$

Multiplication med skalärer:

$$(4) \lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$$

$$(5) 1u = u$$

$$(6) 0u = \vec{0}$$

$$(7) \lambda\vec{0} = \vec{0}$$

Addition och multiplikation med skalärer:

$$(8) u + (-1)u = \vec{0}$$

$$(9) (\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$$

$$(10) \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$$

Bewis:



(1) $u + v$ och $v + u$ är båda diagonalen i parallelogrammet.

$$(2) \text{ Välj } \vec{AB} = u, \vec{BC} = v, \vec{CD} = w. \text{ Då är } \begin{aligned} \vec{AB} + (\vec{BC} + \vec{CD}) &= \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD} \\ (\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{CD} &= \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD} \end{aligned}$$

Sats/def: Givet vektor u finns det en unika vektor v så att $u + v = \vec{0}$. Denna vektor kallas additiv invers (skrivs $-u$).

Bewis:

$$\text{Existens: } \vec{0} \stackrel{?}{=} u + (-1)u \stackrel{(1)}{=} (-1)u + u$$

$(-1)u$ uppfyller alltså ekvationen.

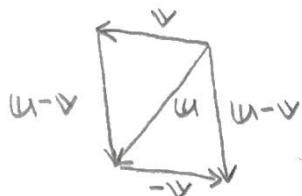
Entydighet: Antag att v och v' uppfyller ekvationen.

$$\text{Då } \begin{array}{l} v = v + 0 \\ 0 + v' = v' + 0 \end{array} \stackrel{(3)}{=} v + (v' + w) \stackrel{(1)}{=} v + (w + v') \stackrel{(2)}{=} (v + w) + v' = v'$$

Alltså v entydigt bestämt. \square

Obs. Följer $-w = (-1)w$

Notation: $w + (-v)$ betecknas med $w-v$.



Repetition:

- Vektor: en mängd riktade sträckor
- Räkuneregler
- Additiv invers

Plan:

- Linjärkombination
- Linjärt beroende/oberoende
- Bas, spänna upp

Vektorer:Notation:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &= \{\text{vektorer i planet}\} \\ \mathbb{R}^3 &= \{\text{vektorer i rummet}\}\end{aligned}$$

Linjärkombination:

Def. $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ sägs vara en linjärkombination av $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$ om
 $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ så att $\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_p \mathbf{v}_p$.

Ex. \mathbf{v}_1 ↗ \mathbf{v}_2 ↘ \mathbf{v}_3 ↑

1) Är \mathbf{v}_1 en linj.komb. av \mathbf{v}_2 och \mathbf{v}_3 ?

$$(-1)\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 = -\mathbf{v}_2 + 0 = \mathbf{v}_1 \quad \underline{\text{Ja}}$$

2) Är \mathbf{v}_3 en linj.komb. av \mathbf{v}_1 och \mathbf{v}_2 ?

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 (-\mathbf{v}_1) = (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{v}_1 \quad \underline{\text{Nej}}$$

3) Är 0 en linj.komb. av \mathbf{v}_1 och \mathbf{v}_2 ?

$$0 = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 \quad \underline{\text{Ja}}$$

Ex. Ange en bas för

- Linjen \mathbb{R} : $\mathbf{v} \neq 0$ (1 basvektor)

- Planet \mathbb{R}^2 : $v_1, v_2 \neq 0$ (ej parallella) (2 basvektorer)
- Rummet \mathbb{R}^3 : $v_1, v_2, v_3 \neq 0$ (ej i samma plan) (3 basvektorer)

Bassatsen: (Sats 4 s.35, Satz 3 s.103)

- A) - Fler än n vektorer i \mathbb{R}^n är linjärt beroende.
 - Det behövs n vektorer för att spänna upp \mathbb{R}^n .
 - Varje bas i \mathbb{R}^n har exakt n vektorer.
- B) Antag att $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Då är v_1, \dots, v_n linjärt oberoende om
 v_1, \dots, v_n spänner upp $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow v_1, \dots, v_n$ är bas för \mathbb{R}^n .

Övning: Vilka av följande vektorer kan användas som bas?



Repetition:

- v_0, \dots, v_p spärmer upp $\text{span}(v_1, \dots, v_p) = \{u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p\} = \{\text{linj. komb. av } v_1, \dots, v_p\}$
- v_1, \dots, v_p är linjärt oberoende om $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$
- v_1, \dots, v_p bas för \mathbb{R}^n oms:
 - de spärmer upp \mathbb{R}^n
 - de är linjärt oberoende

- Sats: $\exists! u$

Beweis $\exists u$, u entydigt bestämd

- Sats: $A \Leftrightarrow B$

Beweis: \Rightarrow Antag A... alltså B, \Leftarrow Antag B... Alltså A

Plan:

- koordinater
- koordinatsystem

Notation: Ofta betecknas basvektorer med e_1, \dots, e_n .

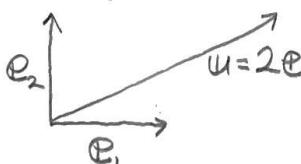
Sats: (Lemma 1 s.27, Sats 2 s.29, Sats 3 s.30)

Antag e_1, \dots, e_n bas för \mathbb{R}^n och $u \in \mathbb{R}^n$.

Då finns entydigt bestämda tal $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$ så att $u = u_1 e_1 + \dots + u_n e_n$.

Def. u_1, \dots, u_n kallas koordinater m.a.p. e_1, \dots, e_n .

Notation: När basen e_1, \dots, e_n är fixerad kan man beskriva u genom att ange dess koordinater $u = (u_1, \dots, u_n)$.

Ex.  $u = 2e_1 + e_2$ kan skrivas $u = (2, 1)$

Räkneoperationer i koordinater:

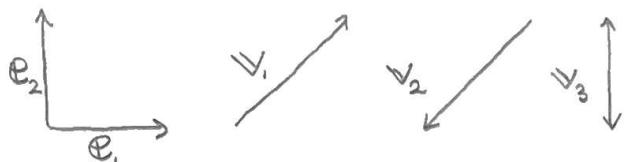
Om $u = (u_1, \dots, u_n)$ och $v = (v_1, \dots, v_n)$ är koordinater m.a.p. bas e_1, \dots, e_n , är $u+v = (u_1e_1, \dots, u_ne_n) + (v_1e_1, \dots, v_ne_n) = (u_1+v_1)e_1 + \dots + (u_n+v_n)e_n$.

Alltså $\boxed{u+v=(u_1+v_1, \dots, u_n+v_n)}$ (def. addition)

På samma sätt om $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u = \lambda(u_1e_1, \dots, u_ne_n) = \lambda u_1e_1, \dots, \lambda u_ne_n$.

Alltså $\boxed{\lambda u = (\lambda u_1, \dots, \lambda u_n)}$ (def. multiplikation med skalar)

Ex.



Vektor	Koord. bas $\{e_1, e_2\}$	Koord. bas $\{v_1, v_3\}$
v_1	$1e_1 + 1e_2 = (1, 1)$	$1v_1 + 0v_3 = (1, 0)$
v_2	$-v_1 = (-1, -1)$	$-1v_1 + 0v_3 = (-1, 0)$
v_3	$0e_1 + 1e_2 = (0, 1)$	$0v_1 + 1v_3 = (0, 1)$
$3v_1 - 2v_3$	$3(1, 1) - 2(0, 1) = (3, 1)$	$3v_1 + 2v_3 = (3, -2)$

Bevis av sats:

Existens av u_1, \dots, u_n :

e_1, \dots, e_n bas för $\mathbb{R}^n \Rightarrow e_1, \dots, e_n$ spänner upp $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R}^n$ linj. komb. av e_1, \dots, e_n
 $\Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R}^n$ är på formen u_1e_1, \dots, u_ne_n , $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$.

Entydighet av u_1, \dots, u_n :

Antag $u = u_1e_1, \dots, u_ne_n$ (1) och $u = u'_1e_1, \dots, u'_ne_n$ (2).
 Tag (1)-(2):

$$u - u = (u_1e_1 + \dots + u_ne_n) - (u'_1e_1 + \dots + u'_ne_n) = (u_1 - u'_1)e_1 + \dots + (u_n - u'_n)e_n$$

$$\boxed{0 = (u_1 - u'_1)e_1 + \dots + (u_n - u'_n)e_n} \quad (*)$$

e_1, \dots, e_n bas $\Rightarrow e_1, \dots, e_n$ linj. oberoende \Rightarrow koeff. i (*), dvs. $u_1 - u'_1 = 0, \dots, u_n - u'_n = 0 \Leftrightarrow u'_1 = u_1, \dots, u'_n = u_n$.

Alltså u_1, \dots, u_n entydigt bestämda. \square

Koordinatsystem: (kcap. 3.1)

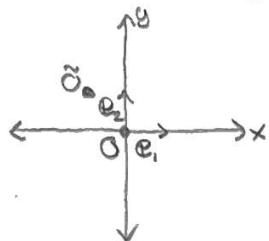
Beskriver punkter i linjen, planet, rummet etc.

Def. Ett koordinatsystem för rummet består av:

- 1) En särskild punkt O (kallas origo). Varje punkt P motsvarar då exakt en vektor \vec{OP} (kallas ortsvektor för P).
- 2) En bas e_1, e_2, e_3 för $\mathbb{R}^3 = \{\text{vektorer i rummet}\}$. Då finns, enligt tidigare bevisad sats, entydigt bestämd representation $\vec{OP} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$. (x_1, x_2, x_3) kallas för koordinater till P i koordinatsystemet O, e_1, e_2, e_3 .

Anm. Koordinatsystem för planet, linjen definieras analogt.

Antag att P har koordinaten $(1, 3)$ i koordinatsystemet O, e_1, e_2 och Q har koordinaten $(-1, 1)$. Vad är koordinaten av P i koordinatsystemet $\tilde{O}, \tilde{e}_1, \tilde{e}_2$?



Obs. Koordinaterna i $\tilde{O}, \tilde{e}_1, \tilde{e}_2$ är koordinaterna för vektorn $\vec{OP} = \vec{OO} + \vec{OP} = -\vec{OO} + \vec{OP}$
 $= (-1, 1) + (1, 3) = (1, -1) + (1, 3) = (2, 2)$

Svar: $(2, 2)$

Notation: När ett koordinatsystem O, e_1, e_2, e_3 är fixerat kan man skriva $P = (x_1, x_2, x_3)$ där x_1, x_2, x_3 är koordinater för P .

Obs.
 $\vec{OQ} = \vec{OP} + \vec{PQ}$ kan ses som "Q = P + \vec{PQ} ".

Mer formellt: Vektorn \vec{PQ} verkar på punkten P .

Repetition:

- Koordinater: $u = u_1 e_1 + \dots + u_n e_n$
- Koordinatsystem
 - Origo ($\overrightarrow{OP} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3, P = (x_1, x_2, x_3)$)
 - $e_1, e_2, e_3 (\mathbb{R}^3)$

~~~~~

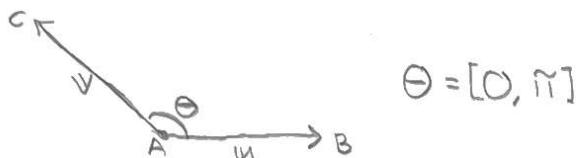
### Plan:

- Skalarprodukt
  - Definition
  - Räkneregler
  - Orthogonal projektion
  - ON-baser

### Skalarprodukt:

$|u|$  def.  $|\vec{AB}|$ ,  $\vec{AB} \in u$ .

Def. vinkel  $\theta$  mellan  $\vec{AB} \in u$ ,  $\vec{AC} \in v$ , där  $\theta$  är den minsta positiva vinkeln.



Def. Skalarprodukten av  $u, v$  noteras  $u \cdot v$  definieras som

$$u \cdot v = \begin{cases} 0 & \text{om } u = 0 \text{ eller } v = 0 \\ |u||v|\cos\theta & \text{där } \theta \text{ är vinkeln mellan } u \text{ och } v. \end{cases}$$

Obs.  $u \cdot v \in \mathbb{R}$

$$\text{Ex. } u \cdot u = |u|^2 \Rightarrow u = \sqrt{u \cdot u}$$

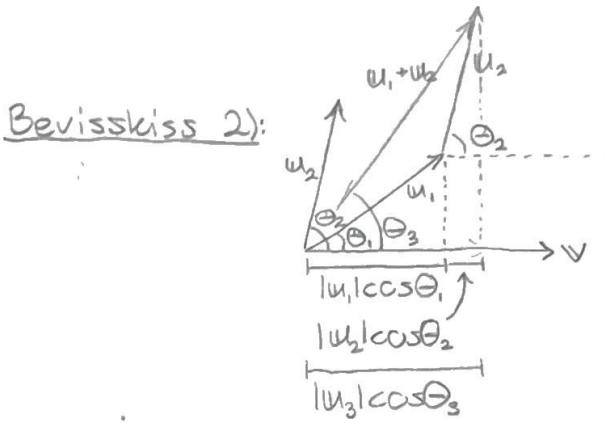
Ex.  $u \cdot v, u, v \in \mathbb{R} \Rightarrow$  "skalarprodukt är vanlig multiplikation"

### Räkneregler: (Sats 2, s. 66)

- 1)  $u \cdot v = v \cdot u$  (kommutativitet)
- 2)  $(u_1 + u_2) \cdot v = u_1 \cdot v + u_2 \cdot v$
- 3)  $(\lambda u) \cdot v = \lambda(u \cdot v)$

$$\text{Obs. } 1) + 2) \Rightarrow u(v_1 + v_2) = uv_1 + uv_2$$

$$1) + 3) \Rightarrow u(\lambda v) = \lambda(uv) \quad (\text{följer från def. och räkneregler för reella tal})$$



$$\begin{aligned}
 (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{v} &= |\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2| |\mathbf{v}| \cos \theta_3 = \\
 &= |\mathbf{u}_1| |\mathbf{v}| \cos \theta_1 + |\mathbf{u}_2| |\mathbf{v}| \cos \theta_2 = \boxed{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}}
 \end{aligned}$$

Def. Om  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$  sägs  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$  vara ortogonal.

Obs.  $\mathbf{0} \perp \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v}$ .  
(ortogonal mot)

(parallel med)

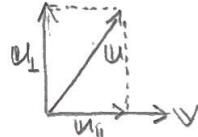
Lemma 1: Antag  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$  och  $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$

Lemma 2: Om  $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{v}$  och  $\mathbf{u}_2 \perp \mathbf{v} \Rightarrow (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \perp \mathbf{v}$

Sats: Antag att  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  uppfyller  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ . Då gäller att varje  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  har en unik uppdelning  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp}$  där

(Notation:  $\mathbf{u}' = \mathbf{u}_{\parallel}$ ,  $\mathbf{u}'' = \mathbf{u}_{\perp}$ )

- $\mathbf{u}_{\parallel}$  är parallell med  $\mathbf{v}$
- $\mathbf{u}_{\perp}$  är ortogonal mot  $\mathbf{v}$ .



Ex.

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \geq 0$  om  $\theta \in [0, \pi/2]$
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$  om  $\theta \in \pi/2$
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \leq 0$  om  $\theta \in [\pi/2, \pi]$

Ide: Hitta  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp}$

$$\mathbf{u}_{\parallel}: |\mathbf{u}_{\parallel}| = |\mathbf{u}| \cos \theta \Rightarrow \mathbf{u}_{\parallel} = |\mathbf{u}_{\parallel}| \cos \theta \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \frac{|\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v}$$

Bevis: Existens av  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp}$

$$- Låt \mathbf{u}_{\parallel} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} \text{ och } \mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel}$$

Visa att  $\mathbf{u}_{\parallel}$  och  $\mathbf{u}_{\perp}$  uppfyller förutsättningarna.

$$u_{\parallel} \parallel v \text{ och } u_{\parallel} = \frac{u \cdot v}{|v|^2} v = k v \quad \checkmark$$

$$u_{\perp} \cdot v = (u - u_{\parallel}) \cdot v = u \cdot v - u_{\parallel} \cdot v = u \cdot v - \left( \frac{u \cdot v}{|v|^2} v \right) \cdot v = u \cdot v - \frac{u \cdot v}{|v|^2} v^2 = u \cdot v - u \cdot v = 0 \quad \checkmark$$

Uppdelningen existerar.

Entydighet:

Antag  $u = u_{\parallel} + u_{\perp}$  och  $u = \tilde{u}_{\parallel} + \tilde{u}_{\perp}$ .

Subtrahera (1)-(2):

$$\textcircled{1} = u_{\parallel} + u_{\perp} - (\tilde{u}_{\parallel} + \tilde{u}_{\perp}) \Leftrightarrow \tilde{u}_{\parallel} - u_{\parallel} = u_{\perp} - \tilde{u}_{\perp} \xrightarrow{\text{(Lemma 2)}} \{\tilde{u}_{\parallel} - u_{\parallel} \parallel v, u_{\perp} - \tilde{u}_{\perp} \perp v\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{u}_{\parallel} - u_{\parallel} = \textcircled{1} \Leftrightarrow \tilde{u}_{\parallel} = u_{\parallel} \\ u_{\perp} - \tilde{u}_{\perp} = \textcircled{1} \Leftrightarrow \tilde{u}_{\perp} = u_{\perp} \end{cases}$$

$u_{\parallel}$  och  $u_{\perp}$  är unika.

Obs.  $u_{\parallel} = \frac{u \cdot v}{|v|^2} v$  är den parallella komponenten av  $u$  längs  $v$ .

Kallas projektionsformeln.

ON-baseri (kap. 4.2)

Def.  $e_1, \dots, e_n$  är en ortonormerad bas om  $e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1 & \text{om } i=j \\ 0 & \text{om } i \neq j \end{cases} = \delta_{ij}$

Sats: (Sats 3, s. 70)

Om  $u$  och  $v$  har koordinater  $u_1, \dots, u_n$  och  $v_1, \dots, v_n$  i en ON-bas  $e_1, \dots, e_n$  så  $u \cdot v = \sum_{i=1}^n u_i v_i$ .

Ex.  $u = (1, 4), v = (-2, 3)$

$$u \cdot v = 1 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 = 10$$

Ex.  $u \cdot u = \sum_{i=1}^n u_i^2, u = (3, 4)$

$$|u| = \sqrt{|u \cdot u|} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Bevis n=2:

$$u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u \cdot v = (u_1 e_1 + u_2 e_2) \cdot (v_1 e_1 + v_2 e_2) =$$

$$= u_1 v_1 e_1 \cdot e_1 + u_1 v_2 e_1 \cdot e_2 + u_2 v_1 e_2 \cdot e_1 + u_2 v_2 e_2 \cdot e_2 =$$

$$= u_1 v_1 + u_2 v_2 \quad \square$$

### Repetition:

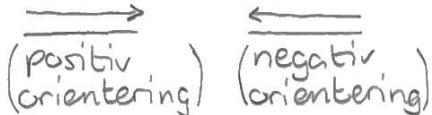
- Skalarprodukt:  $u, v \in \mathbb{R}^n \rightarrow u \cdot v = |u||v|\cos\theta$
- Orthogonala  $u \perp v$  om  $u \cdot v = 0$
- $u_{\parallel} = \frac{u \cdot v}{|v|^2} v \Rightarrow u_{\parallel} \cdot v = u \cdot v$
- Orthonormalerad bas:  $e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1 & \text{om } i=j \\ 0 & \text{om } i \neq j \end{cases}$

### Plan:

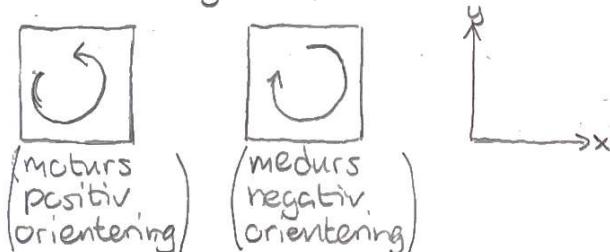
- Vektorprodukt och skalartrippelprodukt
- Orientering
- Definition
- Räkneregler

### Vektor- och skalartrippelprodukt:

#### Orientering:

Ex. 

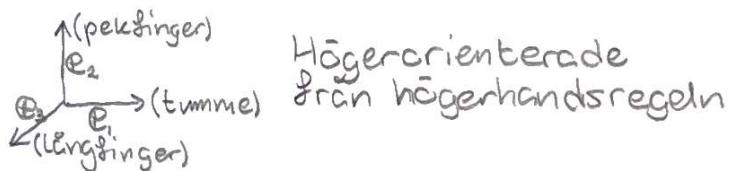
Ex. Orientering av plan:



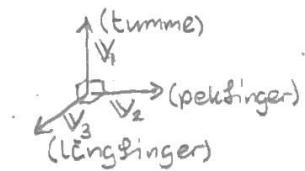
Ex. Rummet  $\mathbb{R}^3$  kan också orienteras på två olika sätt.

Def.  $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$  (linjärt oberoende) är

- positivt orienterade om



- negativt orienterade om



Vänsterorienterade  
från vänsterhandsregeln.

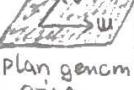
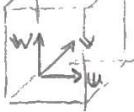
Ex.  Positivt orienterade

Obs. Ordningen är viktig. Om  $v_1, v_2, v_3$  är positivt orienterade, är

- $v_1, -v_2, v_3$  negativt orienterade
- $v_1, v_3, v_2$  negativt orienterade
- $v_2, v_3, v_1$  positivt orienterade.

Obs.

- Byt tecken på en vektor  $\Rightarrow$  byter orientering
- Byt plats på två närliggande vektorer  $\Rightarrow$  byter orientering
- Roterar position ( $v_1, v_2, v_3 \rightarrow v_2, v_3, v_1$ )  $\Rightarrow$  behåller orientering

| Linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^3$ | span                                                                                                    | orientering                                                                         | volym                                                                               | kan representeras med                                                                                  |
|---------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $u$                                         |                      |  | $ u $                                                                               | En vektor                                                                                              |
| $u, v$                                      | <br>Plan genom origo |  | $ uv \sin\theta$                                                                    | En vektor $w$ vald så att $w \perp \pi$ ( $\pi = \text{planet}$ ), $lw = uv \sin\theta$ och är positiv |
| $u, v, w$                                   |                      | positivt/<br>negativt<br>orienterad                                                 |  | Volym $V$ om positivt orienterade<br>Volym $-V$ om negativt orienterade                                |

Obs. Om  $u, v \in \mathbb{R}^3$  linjärt oberoende finns en entydig vektor  $w \in \mathbb{R}^3$  som uppfyller att

- $w \perp u, v$
- $u, v, w$  är positivt orienterade
- $w$  har längd  $|w|=|uv|\sin\theta$

$w$  kallas vektorprodukten av  $u$  och  $v$  och skrivs  $w = u \times v$ .

Om  $u, v$  är linjärt beroende definieras  $u \times v = 0$ .

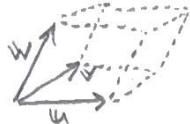
Ex. Antag att  $e_1, e_2, e_3$  är en högerorienterad ON-bas (HON-bas).  
 Då är:

- $(e_1 \times e_2) \perp (e_1 \text{ och } e_2) \Rightarrow (e_1 \times e_2) \parallel e_3$
- $e_1, e_2, (e_1 \times e_2)$  är positivt orienterade  $\Rightarrow (e_1 \times e_2)$  har samma riktning som  $e_3$ .
- $|e_1 \times e_2| = |e_1||e_2|\sin(\pi/2) = 1 \Rightarrow |e_1 \times e_2| = |e_3| \Rightarrow e_1 \times e_2 = e_3$ .

Följer:  $\begin{cases} e_1 \times e_3 = -e_2 \\ e_2 \times e_3 = e_1 \end{cases}$

Def./Sats: (Sats 2, s. 86) (Def. 3, s. 85)

Låt  $V$  vara volymen av parallelepipeden som spänns upp av  $u, v, w \in \mathbb{R}^3$



Då är

- $(u \times v) \cdot w = +V$  om  $u, v, w$  positivt orienterade
- $(u \times v) \cdot w = -V$  om  $u, v, w$  negativt orienterade

$(u \times v) \cdot w$  kallas skalär trippelprodukt.

Föld 1:  $(u \times v) \cdot w = 0$  om  $u, v, w$  är linjärt beroende.

Föld 2:  $(u \times v) \cdot w = (v \times w) \cdot u$  ty de spänner upp samma volym och har samma orientering.

Bevis: Antag att  $u, v, w$  positivt orienterade

$$\begin{aligned} \text{Volym} &= \text{basarea} \cdot \text{höjd} \\ &= \|u \times v\| \|w\| \cos \theta \\ &= (u \times v) \cdot w \end{aligned}$$



Övning: Gör liknande bild för  $u, v, w$  negativt orienterade.

Räkneregler: (Sats 4, s. 87)

- 1)  $v \times u = -u \times v$ . (anti-kommutativitet)
- 2)  $(u_1 + u_2) \times v = u_1 \times v + u_2 \times v$  (distributivitet)
- 3)  $(\lambda u) \times v = \lambda(u \times v)$

$$1) \text{ och } 2) \Rightarrow u \times (v_1 + v_2) = u \times v_1 + u \times v_2$$

$$1) \text{ och } 3) \Rightarrow u \times (\lambda v) = \lambda(u \times v)$$

Övning: Verifiera ovanstående.

Vektorprodukten är inte associativ  $((u \times v) \times w \neq u \times (v \times w))$ .

Ex. Låt  $e_1, e_2, e_3$  vara HON-bas:

$$\begin{cases} (e_1 \times e_2) \times e_2 = e_3 \times e_2 = -e_1 \\ e_1 \times (e_2 \times e_2) = 0 \end{cases}$$

Lemma 2: (sid. 87)

Låt  $u, v \in \mathbb{R}^n$ . Då är  $u \cdot w = v \cdot w \quad \forall w \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow u = v$ .

Repetition:

- Vektorprodukt  $u, v \in \mathbb{R}^3 \mapsto u \times v \in \mathbb{R}^3$
- $u \times v \perp u$  och  $v$
- $u, v, u \times v$  är positivt orienterade (högerhandsregeln)
- $|u \times v| = |u||v|\sin\theta = \text{arean av parallelogram}$
- Skalär trippelprodukt  $u, v, w \in \mathbb{R}^3 \mapsto (u \times v) \cdot w \in \mathbb{R}$
- $(u \times v) \cdot w = \text{volym av parallelepiped}$

~~~~~

Plan:

- $u \times v$ i HÖN-bas
- geometri med linjer och plan

$u \times v$ i HÖN-bas:

Sats: (Sats 5, s.89)

Om $u, v \in \mathbb{R}^3$ med koordinater $u = (u_1, u_2, u_3)$ resp. $v = (v_1, v_2, v_3)$ i HÖN-basen e_1, e_2, e_3 så är $u \times v = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$.

Minnesregel (SARRUS REGEL):

$$u \times v = \begin{array}{ccc|cc} e_1 & e_2 & e_3 & e_1 & e_2 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_2 & u_1 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_3 & v_1 \end{array} + \text{unika (tre höger- resp. vänsterdiagonaler)}$$

$$\begin{aligned} &= + e_1 u_2 v_3 + e_2 u_3 v_1 + e_3 u_1 v_2 - e_3 u_2 v_1 - e_1 u_3 v_2 - e_2 u_1 v_3 = \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2) e_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) e_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) e_3 = \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) \end{aligned}$$

Bevis:

$$\begin{aligned} u \times v &= \left(\sum_{i=1}^3 u_i e_i \right) \times \left(\sum_{j=1}^3 v_j e_j \right) = u_1 e_1 \times \left(\sum_{j=1}^3 v_j e_j \right) + \underbrace{u_2 e_2 \left(\sum_{j=1}^3 v_j e_j \right)}_{n} + u_3 e_3 \left(\sum_{j=1}^3 v_j e_j \right) = \\ &= u_1 v_1 e_1 \times e_1 + u_1 v_2 e_1 \times e_2 + u_1 v_3 e_1 \times e_3 + n = \quad (\text{skriv ut termerna själv}) \\ &= 0 + u_1 v_2 e_3 - u_1 v_3 e_2 + n = \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) \end{aligned}$$

Linjer och plan: (kap. 3.2, 3.3, 4.3, 5.5)

I planet: En linje kan bestämmas på flera sätt.

- Två punkter P, Q
- $P \in l, v \neq 0, v \parallel l$
- $P \in l, m \neq 0, m \perp l$

Fixera ett koordinatsystem $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \Rightarrow$ ekvationer $\begin{cases} 1) \text{parametrisk form} \\ 2) \text{affin form} \end{cases}$

Parametrisk form:

l består av punkter på formen $p + tv, t \in \mathbb{R}$.

$$(x_1, x_2) = (P_1, P_2) + t(v_1, v_2) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = P_1 + tv_1 \\ x_2 = P_2 + tv_2 \end{cases}$$

v riktningssvектор, $(p + tv, t \in \mathbb{R})$ parametrisering av l

Obs. Varken P eller v är unika.

Ex. Ange en parametrisering för linjen genom $P=(1, 0), Q=(7, -2)$.

Välj P som baspunkt:

$$v = \overrightarrow{PQ} = (7, -2) - (1, 0) = (6, -2)$$

$$l = P + tv = (1, 0) + t(6, -2) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + 6t \\ x_2 = -2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Välj Q som baspunkt:

$$l = Q + tv = (7, -2) + t(6, -2) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 + 6t \\ x_2 = -2 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Affin form:

l beskrivs som lösningarna till en ekvation $l = \{x_1, x_2 : a_1x_1 + a_2x_2 = b\}$

Vektorn $a = (a_1, a_2) \perp l$, kallas normalvektorn till l .

Övning: Visa att $a \perp l$

(Tips: Bilda vektor mellan två punkter på l och ta skalärprodukten med a och se att det är 0)

Ex. $l = \{y = 2x - 2\}$

a) Bestäm normalvektor till l .

$$y = 2x - 2 \Leftrightarrow y - 2x = -2 \Rightarrow n = (-2, 1) \text{ (normalvektor till } l)$$

b) Bestäm parametrisering av l .

Introducera en parameter, sätt $x = t$, $t \in \mathbb{R}$.

$$y = 2t - 2 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t - 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

c) Bestäm riktninguvektorer för l .

$$\text{Riktninguvektorn } v = (1, 2)$$

$$\text{Kontroll: } n \cdot v = (-2, 1) \cdot (1, 2) = -2 + 2 = 0$$

I rummet: En linje kan bestämmas av:

- P, Q punkter $\in \mathbb{R}^3$
- $P, v \parallel l$ ($v \neq 0$)

Givet koordinatsystem O, E_1, E_2, E_3 kan l beskrivas på parametrisk form. (endast)

Plan:

Ett plan Π bestäms av:

- Tre icke-kolinjära punkter (ligger ej på samma linje)
- $P \in \Pi, u, v \parallel \Pi$
- $P \in \Pi, n \perp \Pi, n \neq 0$

Givet ett koordinatsystem O, E_1, E_2, E_3 kan ett plan beskrivas på parametrisk eller affin form.

Parametrisk form:

$P \in \Pi, v, u$ linjärt oberoende.

$$P + t v + s u, \quad P = (P_1, P_2, P_3), \quad v = (v_1, v_2, v_3), \quad u = (u_1, u_2, u_3)$$

$$\begin{cases} x_1 = P_1 + t v_1 + s u_1 \\ x_2 = P_2 + t v_2 + s u_2 \\ x_3 = P_3 + t v_3 + s u_3 \end{cases}$$

(menti.com: kod 5565 1905 - utvärdering på framtiden)

Plan i rummet:

Parameterform:

Givet punkt P och $u, v \in \mathbb{R}^3$ (u, v linj. obero.) $\Rightarrow \Pi: p + tu + sv, s, t \in \mathbb{R} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \begin{cases} x_1 = p_1 + tu_1 + sv_1 \\ x_2 = p_2 + tu_2 + sv_2 \\ x_3 = p_3 + tu_3 + sv_3 \end{cases}$

Affin form:

$$\Pi = \{(x_1, x_2, x_3) : a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b\}$$

Likt för linjen $c_1x_1 + c_2x_2 = b$, som har normalvektorn $n_{\Pi} = (c_1, c_2)$, har planet normalvektorn $n_{\Pi} = (a_1, a_2, a_3)$.

Ex. Skriv om planet $\Pi: (1, 8, 3) + s(1, 2, 3) + t(4, 5, 6)$ på affin form.

Om $v \perp \Pi$ är den affina formen koordinaterna till v , givet $P = (1, 8, 3)$, $u = (1, 2, 3)$, $v = (4, 5, 6)$.

$$u \times v = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_1(12 - 15) + \mathbf{e}_2(12 - 6) + \mathbf{e}_3(5 - 8) = (-3, 6, -3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Affin form: } -3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = b \Rightarrow x_1 - 2x_2 + x_3 = b' \quad (= -\frac{b}{3})$$

Substituera in P :

$$4 - 16 + 3 = -12 \Rightarrow b' = -12$$

Vad för är $(1, -2, 1) \perp \Pi$?

Ta fram Π genom skalärprodukt. Låt $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3$

$$0 = (1, -2, 1)(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 2x_2 + x_3$$

Repetition:

- $u \times v$ i HON-bas
- Geometri
- Linjer
 - Parameterform $(p + tv, t \in \mathbb{R})$
 - Affin form $(a_1x_1 + a_2x_2 = b)$ (i två dimensioner)

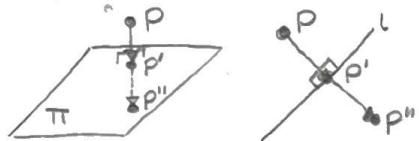
Plan:

- Geometri
 - Orthogonal projektion
 - Spegling
 - Avstånd
-

Geometri:

Orthogonal projektion:

Givet ett plan Π (eller linje l) samt en punkt P , $\exists! P' \in \Pi : \overrightarrow{PP'} \perp \Pi$.
 P' kallas den orthogonala projektionen av P på Π (eller l).
 P'' kallas för speglingen av P i Π (eller l).



(orthogonala projektioner är en vektor och punkt)

Hitta p' :

Metod 1: Tag $Q \in \Pi$ eller l godtyckligt. Då är \overrightarrow{PQ} den orthogonala projektionen av \overrightarrow{PQ} på normalvektorn n
 $\Rightarrow P' = P + \overrightarrow{PQ}$



Metod 2: Givet en parametrering av Π ,
 $\Pi : Q + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ och $P = (P_1, P_2, P_3)$,
 $\overrightarrow{PP'} \perp \Pi \Rightarrow \overrightarrow{PP'} \perp \mathbf{u}$ och $\mathbf{v} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PP'} \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \overrightarrow{PP'} \cdot \mathbf{v} = 0 \end{cases}$$

Ger elevation för en linje. Skärningen mellan linjen och planet är P' .

Metod 3: Givet $\Pi = \{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b\}$, låt $l = p + t\mathbf{n}$. Eftersom $\mathbf{n} \perp \Pi$ och går genom $P \Rightarrow$ skärningen mellan l och Π ger P' .

Moral: Det finns många metoder. Det viktiga är den bakomliggande geometri.

Ex. $\Pi = \{x+2y+3z=4\}$, $P = (2, 2, 4)$. Bestäm orthogonala projektion P' av P i Π och speglingen av P i Π .

Metod 3: $m = (1, 2, 3)$, bilda $l = P + t(1, 2, 3)$

$Q \in l$ är på formen $Q = (2, 2, 4) + t(1, 2, 3) = (2+t, 2+2t, 4+3t)$

Stoppa in Q i ursprunglig ekvation för planet π .

$$4 = 1(2+t) + 2(2+2t) + 3(4+3t) = 2+4+12+t+4t+9t =$$

$$= 18+14t \Leftrightarrow 14t = -14 \Leftrightarrow t = -1$$

Stoppa in $t = -1$ i Q .

$$Q = (2-1, 2-2, 4-3) = (1, 0, 1) = P'$$

Övning: Spegling av P i π .

Avstånd:

Avståndet mellan punkterna P och Q definieras som $|\vec{PQ}|$.

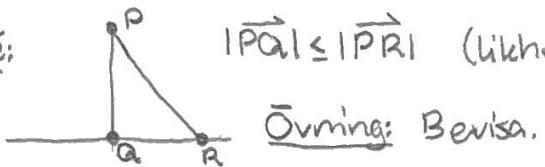
Ex. $P = (1, 1, 1)$, $Q = (1, 2, 3)$

$$\vec{PQ} = (0, 1, 2) \Rightarrow |\vec{PQ}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Avståndet mellan punkten P /linjen l_1 /planet π_1 , och punkten Q /linjen l_2 /planet π_2 definieras som det minsta avståndet mellan $P/l_1/\pi_1$ och $Q/l_2/\pi_2$.

Påstående: Minsta avstånd erhålls om $\vec{PQ} \perp l_1\pi_1$ och $l_2\pi_2$.

Bevisidé: $|\vec{PQ}| \leq |\vec{PR}|$ (likhet om $R = Q$)



Övning: Bevisa.

(tu)

(R+5V)

Ex. Beräkna avståndet mellan $l_1 = t(1, 0, 0)$ och $l_2 = (5, 4, 3) + s(0, 1, 1)$

1) Hitta $\mathbf{n} \perp l_1, l_2$

2) Välj $P_0 \in l_1$, $Q_0 \in l_2$ godtyckligt $\Rightarrow \vec{PQ} = \text{ort. proj. av } \vec{P_0Q_0} \text{ på } \mathbf{n}$.

3) Avståndet mellan l_1 och $l_2 = |\vec{PQ}| = |\text{ort. proj. av } \vec{P_0Q_0} \text{ på } \mathbf{n}| =$
 $= \left| \frac{\vec{P_0Q_0} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2} \mathbf{n} \right| = \frac{|\vec{P_0Q_0} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$

$$1) \text{ Kan vālja } \mathbf{m} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = (1, 0, 0) \times (0, 1, 1) = (0, -1, 1)$$

$$2) P_0 = (0, 0, 0) \in L_1, Q_0 = (5, 4, 3) \in L_2 \Rightarrow \overrightarrow{P_0Q_0} = (5, 4, 3)$$

$$3) d = \frac{|\overrightarrow{P_0Q_0} \cdot \mathbf{m}|}{\|\mathbf{m}\|} = \frac{|(5, 4, 3) \cdot (0, -1, 1)|}{\|(0, -1, 1)\|} = \frac{|0 - 4 + 3|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Repetition:

- Skalar- och kryssprodukter
- Orthogonal projektion
- Spegling
- Avstånd

~~~~~

Plan:

- $\mathbb{R}^n$
- Definition
- Räkneregler
- Definition bas
- Bassatsen

 $\mathbb{R}^n$ : (kap. 6)

Def.  $\mathbb{R}^n$  är mängden av alla  $a_1 = (a_1, \dots, a_n)$ , där  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ .  
 $a_1 = (a_1, \dots, a_n)$  kallas vektor.

På  $\mathbb{R}^n$  finns operationerna:

- Addition  $((a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n)) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$
- Multiplikation med skalar  $(\lambda(a_1, \dots, a_n)) = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$
- Skalarprodukt  $((a_1, \dots, a_n) \cdot (b_1, \dots, b_n)) = \sum_{i=1}^n a_i b_i$

Def.  $a_1$  och  $b_1$  är orthogonala ( $a_1 \perp b_1$ ) om  $a_1 \cdot b_1 = 0$ .

Def. Längden  $|a_1|$  av  $a_1$  definieras som  $\sqrt{a_1 \cdot a_1} = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$ .

Ex.  $0 = (0, \dots, 0)$  kallas nollvektorn.

Obs.  $a_1 + 0 = (a_1, \dots, a_n) + (0, \dots, 0) = (a_1 + 0, \dots, a_n + 0) = (a_1, \dots, a_n) = a_1$

Ex.  $a_1 = (1, 2, 3, 4)$ ,  $b_1 = (-1, 0, 1, 2) \in \mathbb{R}^4$

$$3a_1 + b_1 = 3(1, 2, 3, 4) + (-1, 0, 1, 2) = (3 \cdot 1 - 1, 3 \cdot 2 + 0, 3 \cdot 3 + 1, 3 \cdot 4 + 2) = (2, 6, 10, 14)$$

$$a_1 \cdot b_1 = (1, 2, 3, 4) \cdot (-1, 0, 1, 2) = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = -1 + 0 + 3 + 8 = 10$$

$$\|b\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 0 + 1 + 4} = \sqrt{6}$$

Ange vektor  $\perp \|b\|$ : Ex.  $\emptyset$ ,  $C = (1, 0, 1, 0) \Rightarrow C \cdot b = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 0$

Sats: (Sats 1 s. 98, Sats 4 s. 108)

Räknelagarna för vektorer i  $\mathbb{R}^n$  är samma som för geometriska.

Beweis addition + kommutativitet:

$$b+a = (b_1, \dots, b_n) + (a_1, \dots, a_n) = (b_1+a_1, \dots, b_n+a_n) = (a_1+b_1, \dots, a_n+b_n) =$$

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = a + b$$

Övning: Bevisa de andra räknelagarna.

Obs. Låt  $M_n = \{\text{geometriska vektorer i dim } n\}$ . (Ex.  $M_2 = \{\text{vektorer i planet}$

Välj en ON-bas för  $M_n$ ,  $e_1, \dots, e_n$ .  $a_1 = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  kan då identifieras med den geometriska vektorn  $a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$ .

Ex.  $a_1 = (2, -3) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow a_1 = 2e_1 - 3e_2$

Linjärkombination, att spänna upp, linjärt beroende/oberoende, bas etc. kan definieras ur räknereglerna för geometriska vektorer.

Ex. Låt  $a_{1,1} = (1, 0, 0, 0)$ ,  $a_{1,2} = (0, 1, 0, 0)$ ,  $a_{1,3} = (0, 0, 1, 0)$ ,  $a_{1,4} = (1, 1, 1, 0)$ .

Är  $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, a_{1,4}$  linjärt beroende?

- Nej, ty  $a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} = a_{1,4}$ .

$$\begin{aligned} \text{Span}(a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, a_{1,4}) &= \{(x_1, x_2, x_3, 0), x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} = \\ &= \text{Span}(a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}) \subseteq \mathbb{R}^4. \end{aligned}$$

Bassatsem: (Sats 4 s. 35, Sats 3 s. 103)

1. a) Det finns högst  $n$  linjärt oberoende vektorer i  $\mathbb{R}^n$ .

b) Det behövs  $n$  vektorer för att spänna upp  $\mathbb{R}^n$ .

c) Varje bas för  $\mathbb{R}^n$  har exakt  $n$  vektorer.

2.  $a_{1,1}, \dots, a_{1,n} \in \mathbb{R}^n$  bas för  $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow a_{1,1}, \dots, a_{1,n}$  linj. Ober.  $\Leftrightarrow a_{1,1}, \dots, a_{1,n}$  spänner upp  $\mathbb{R}^n$

### Bevis:

Antag  $a_{11} = (a_{11}, \dots, a_{1n}), a_{12} = (a_{21}, \dots, a_{2n}), \dots, a_{1p} = (a_{p1}, \dots, a_{pn}) \in \mathbb{R}^n$  och beträkta vektorelevationen  $x_1 a_{11} + \dots + x_p a_{1p} = \mathbf{l}b$ ,  $\mathbf{l}b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ .

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{p1}x_p = b_1 \\ a_{12}x_1 + \dots + a_{p2}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{1n}x_1 + \dots + a_{pn}x_p = b_n \end{cases}$$

Elevationssystemet har  $n$  elevationer och  $p$  variabler.

Transformera ekv.syst. till ett trappformat ekv.syst. genom elementära radoperationer.

1.a) Antag  $a_{11}, \dots, a_{1p}$  linjärt oberoende. Vill visa  $p \leq n$ .

$a_{11}, \dots, a_{1p}$  linj. ober.  $\Leftrightarrow x_1 a_{11} + \dots + x_p a_{1p} = \mathbf{0}$  har endast lösning  $x_1 = \dots = x_p = 0$

$\Leftrightarrow$  pivotelement i varje kolom  $\Leftrightarrow p$  pivotelement (ty  $p$  kolonner)

$\Rightarrow p \leq n$   $\square$

1.b) Antag  $a_{11}, \dots, a_{1p}$  spänner upp  $\mathbb{R}^n$ . Vill visa  $p \geq n$ .

$a_{11}, \dots, a_{1p}$  spänner upp  $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow$  alla  $\mathbf{l}b \in \mathbb{R}^n$  linj.komb. av  $a_{11}, \dots, a_{1p}$

$\Leftrightarrow$  Elevationssystemet lösbart  $\forall \mathbf{l}b \Leftrightarrow$  Trappformade ekv.syst. lösbart

$\forall \mathbf{HL} \Leftrightarrow$  pivotelement i varje rad  $\Leftrightarrow n$  pivotelement (ty  $n$  rader)

$\Rightarrow p \geq n$   $\square$

2. Antag  $p = n$ .

(beris 1.b)) (utifrån  
'antagande')

$a_{11}, \dots, a_{1p}$  spänner upp  $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow n$  pivotelement  $\Leftrightarrow p$  pivotelement

$\Leftrightarrow a_{11}, \dots, a_{1p}$  linj. ober.

Slutsats:  $a_{11}, \dots, a_{1n}$  spänner upp  $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow a_{11}, \dots, a_{1n}$  linj. ober.  
 $\Leftrightarrow a_{11}, \dots, a_{1n}$  bas för  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

Repetition:

- $\mathbb{R}^n = \{(a_1, \dots, a_n), a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$
- Räkneregler
- Bassatsen



Plan:

- Matriser
- Definition
- Räkneregler
- Transponat

Matriser: (kap. 7)

Def. En (reell) matris är ett rektangulärt schema av (reella) tal  $a_{ij}$ .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A är av typ  $m \times n$  där m=antal rader och n=antal kolumner.

$a_{ij}$  kallas matriselement.

Ex.  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -11 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

( $3 \times 1$ )      ( $2 \times 3$ )      ( $1 \times 1$ )

Räkneoperationer:

Om  $A = (a_{ij})$  och  $B = (b_{ij})$  är av samma typ, så är

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\lambda A = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

Om  $A$  är av typ  $m \times n$  med raden  $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$  och  $B$  är av typ  $n \times p$  med kolonner  $b_j = (b_{1j}, \dots, b_{nj})$ , så är

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & - \\ -\alpha_2 & - \\ \vdots & \vdots \\ -\alpha_m & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 b_1 & \dots & \alpha_1 b_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_m b_1 & \dots & \alpha_m b_p \end{bmatrix}$$

Element  $(AB)_{ij} = \alpha_i b_j = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$ .  $AB$  typ  $m \times p$ .

Ex.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\bullet A + C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+0 & 3+0 \\ 0+0 & -1+0 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

$C$  kallas nollmatrisen (av typ  $2 \times 3$ ) och betecknas  $\mathbb{O}$ .

Obs.  $A + \mathbb{O} = A$

$$\bullet B + E = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 2+1 \\ 1+1 & 3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriser av typ  $n \times n$  kallas kvadratiska.

$$\bullet 3A = 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bullet AD = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 & 3 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 & (-1) \cdot 1 & 0 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

enhetsmatris

En matris av typ  $n \times n$  med  $a_{ii} = 1$ ,  $a_{ij} = 0$  (då  $i \neq j$ ) kallas enhetsmatris och betecknas  $I$ .

Obs.  $AI = A$

$$\bullet BE = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

vektor                                    skalarprodukt

$$\bullet EB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Obs. Matrismultiplikation är ej kommutativ.

## Räkneregler: (Sats 1 s. 120-121)

Antag att matriserna är av typer så att operationerna är väldefinierade.

Addition:

- 1)  $A + B = B + A$  (kommutativitet)
- 2)  $(A + B) + C = A + (B + C)$  (associativitet)
- 3)  $A + \mathbb{D} = A$

Multiplikation med skalar:

- 4)  $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
- 5)  $1 \cdot A = A$
- 6)  $0 \cdot A = \mathbb{D}$
- 7)  $\lambda\mathbb{D} = \mathbb{D}$

Addition och multiplikation med skalar:

- 8)  $A + (-1)A = \mathbb{D}$
- 9)  $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- 10)  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

Multiplikation:

- 11)  $(AB)C = A(BC)$  (associativitet)
- 12)  $I A = A, A I = A$
- 13)  $\mathbb{D}A = \mathbb{D}, A\mathbb{D} = \mathbb{D}$

Addition och multiplikation:

- 14)  $(A + B)C = AC + BC$
- 15)  $A(B + C) = AB + AC$

Obs.  $AB \neq BA$

Beweis 11):

Om produkten ska vara definierad måste  $A, B, C$  vara av typ  $m \times p, p \times q, q \times n$  för några tal  $m, p, q, n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned}
 ((AB)C)_{ij} &= (\text{rad } i \text{ i } AB) \cdot (\text{kolom } j \text{ i } C) = \sum_{k=1}^q (AB)_{ik} \cdot C_{kj} = \sum_{k=1}^q \left( \sum_{l=1}^p a_{il} b_{lk} \right) \cdot C_{kj} = \\
 &\quad (\text{element } ik \text{ i } AB = (\text{rad } i \text{ i } A) \cdot (\text{kolom } k \text{ i } B)) \\
 &= \sum_{l=1}^p a_{il} \left( \sum_{k=1}^q b_{lk} \cdot c_{kj} \right) = \sum_{l=1}^p a_{il} (BC)_{lj} = (A(BC))_{ij}
 \end{aligned}$$

Alltså  $(AB)C = A(BC)$ , ty  $((AB)C)_{ij} = (A(BC))_{ij} \forall i, j$ .  $\square$

## Transponat: (kap. 7.3)

Def. Transponatet av en  $(m \times n)$ -matris

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & - \\ \vdots & \vdots \\ -\alpha_m & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

är  $(n \times m)$ -matrisen

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_m \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & - \\ \vdots & \vdots \\ -\alpha_n & - \end{bmatrix}$$

Om  $A^T = A$  är  $A$  symmetrisk.

Ex.  $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, A^T = [2 \ 3 \ 7]$

Ex.  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ex. I symmetrisk:

$$I^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Ex.  $\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$  (symmetrisk)

Sats: (Sats 2 s. 124)

1)  $(A^T)^T = A$

2)  $(A + B)^T = A^T + B^T$

3)  $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

4)  $(AB)^T = B^T A^T$

Övning: Visa att  $A^T A$  är symmetrisk.  $(A^T A)^T \stackrel{(4)}{=} A^T (A^T)^T \stackrel{(1)}{=} A^T A$  □

Repetition:

- Matriser
  - Räkneoperationer
  - Räkneregler
  - Transponat
  - Identifiera vektorer i matriser
- 

Plan:

- Matriser och linjära ekv.syst.
- 

Matriser och linjära ekvationssystem: (kap. 7.4 och 7.7)

Påstående: Följande är ekivalenta sätt att formulera ett linjärt ekv.syst:

$$\text{Ekv.systmed: } (*) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \Leftrightarrow \underbrace{x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_na_n = Ib}_{\text{Vektorekvationen: } (**)} \Leftrightarrow$$

$$a_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj}), \quad Ib = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$$

$$\Leftrightarrow \text{Matrisekvationen: } A\mathbf{x} = Ib, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad Ib = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$  Kolumnerna i A är  $a_j$ , A kallas koefficientmatris.

Förklaring:  $(*) \Leftrightarrow (***)$ :

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = Ib$$

$\Rightarrow$  Varje rad i  $A\mathbf{x} = Ib$  motsvarar en ekvation i  $(*)$ .

$(**) \Leftrightarrow (***)$ :

$$\text{Obs. } A\mathbf{x} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = x_1a_1 + \dots + x_na_n$$

## Terminologi:

Ekv. systemet  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  kallas homogen om  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$  och inhomogen om  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ .

## Homogena ekv. syst. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ :

Alltid lösbart,  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  enda lösningen till  $A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1a_1 + \dots + x_na_n = \mathbf{0}$  har endast lösningen  $x_1, \dots, x_n = \mathbf{0} \Leftrightarrow a_1, \dots, a_n$  linj. obero.

Def. Mängden av lösningar till  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  kallas  $A$ 's nollrum (kärna), betecknas  $\text{noll}(A)$ .

Obs.  $\text{noll}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Ex. Låt  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Bestäm  $\text{noll}(A)$ .

$$[A | \mathbf{0}] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[-1]{} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\text{(II)}]{\text{(I)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\text{(III)}]{\text{(II)}} [I | \mathbf{0}]$$

Sätt  $x_2 = s$ ,  $x_4 = t$ .

$$\text{(II)}: -x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 0$$

$$\text{(I)}: x_1 + s + 0 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -s$$

$$\Rightarrow \text{noll}(A) = \{\mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4\}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x} = \begin{cases} x_1 = -s \\ x_2 = s \\ x_3 = 0 \\ x_4 = t \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R} \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right. \text{st}\in \mathbb{R}$$

Allmänt:  $\text{noll}(A) = \text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ ,  $t_1\mathbf{v}_1 + \dots + t_k\mathbf{v}_k$  lös. till  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Amm.  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  linj. obero.

Ex.  $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

$$\text{noll } B = \left\{ \mathbf{0} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \right\} = \mathbb{R}^3 \quad (\text{ty likhet gäller } \forall x \in \mathbb{R})$$

$$\text{Null } C = \{x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

$$\text{Null } D = \{x, Ix = 0\} = \{0\} \quad (\text{ty } Ix = x) \subseteq \mathbb{R}^2$$

Def. En delmängd av  $\mathbb{R}^n$  på formen  $\text{span}(v_1, \dots, v_k)$  kallas underrum (delrum)

Dimensionen av ett underrum = antal element i en bas = maximale antal linj. obero. vektorer.

Dimensionen av null A kallas noldimensionen av A, skrivs  $\text{noldim}(A)$ .

Ex.  $\text{noldim } A = 2, \text{ noldim } B = 3, \text{ noldim } C = 2, \text{ noldim } D = 0$

Sats: (del av sats 9 s.149)

Antag att A är av typ  $m \times n$ , T trappformat  $m \times n$ , T ekivalent med A.

Då  $\text{noldim } A = n -$  antalet pivot-element i T.

Inhomogena ekationsystem:  $(Ax = b)$

Obs.  $Ax = b \Leftrightarrow x_1a_1 + \dots + x_na_n = b \Leftrightarrow b \in \text{span}(a_1, \dots, a_n)$  ( $b$  linj. komb. av  $a_1, \dots, a_n$ )

Def.  $\text{span}(a_1, \dots, a_n)$  kallas A's kolonnrum, skrivs  $\text{kolonn}(A)$ .

Dimensionen av  $\text{kolonn}(A)$  skrivs  $\dim(\text{kolonn}(A))$  och kallas rangen av A, skrivs  $\text{rang}(A)$ .

Obs. Kolonn A  $\subseteq \mathbb{R}^m$  ( $a_j \in \mathbb{R}^m$ ).

$$\text{Ex. } A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \emptyset, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Kolonn A =  $\text{span}(a_1, a_3)$  (ty  $a_2, a_4$  linj. komb. av  $a_1, a_3$ )

Kolonn T =  $\text{span}(a_1, a_3)$  (-||-)

Kolonn B =  $\{\emptyset\}$

Kolonn D =  $\mathbb{R}^2$

Rang A=2

Rang T=2

Rang B=0

Rang D=2

Proposition:

Antag T trappformad. Därutöver utgör pivotkolonmerna en bas för kolomt.

Rang T = antalet pivotelement.

Repetition:

- Ekv. syst.  $\Leftrightarrow$  vektorekv.  $\Leftrightarrow$  matrisekv. ( $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ )
  - Homogena ekv.syst. ( $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ )
    - Alltid lösbart ( $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ )
    - $N(A) = \{A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$
  - Inhomogena ekv.syst. ( $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ )
    - Lösbart då  $\mathbf{b} \in \text{kolonn } A$
    - $T$  trappformat  $\Leftrightarrow$  bas för kolonn  $T = \{\text{pivotkolonner}\}$ 
      - Prop.  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $T \Leftrightarrow A$ .  $t_{11}, \dots, t_{kk}$  bas för kolonn  $T \Leftrightarrow a_{11}, \dots, a_{kk}$  bas för kolonn  $A$ .
      - Spec.  $\text{rang } A = \text{rang } T = \text{antalet pivetelement i } T$
- 

Plan:

- Läsa  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 
  - Inverser, höger- och vänsterinverser

Lösn. till  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ :

Ex. Lösa  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  där  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

$$[A | \mathbf{b}] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right] \begin{matrix} (\text{I}) \\ (\text{II}) \\ (\text{III}) \end{matrix}$$

Sätt  $x_1 = t$ ,  $x_4 = s$ .

$$\begin{aligned} (\text{II}): -x_3 &= 1 \Leftrightarrow x_3 = -1 \\ (\text{I}): x_1 + s - 1 &= 1 \Leftrightarrow x_1 = 2 - s \end{aligned}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2-s \\ s \\ -1 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Sats: (Sats 8 s. 141)

Låt  $\mathbf{x}_p$  vara en lösning till  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Då är  $\mathbf{x}$  en lösning till  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  om  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$ , där  $A\mathbf{x}_h = \mathbf{0}$ .  $\mathbf{x}_p$  kallas partikulärlösning.

Obs. Partikulärlösning är ej unik.

## Invers matris: (kap. 7.5)

Obs Elevationen  $ax+b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , har lösningen  $x = \frac{b}{a}$  om  $a \neq 0$ .

För att lösa  $Ax=b$  vill man dela med  $A$ . Möjligt ibland.

Def.  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

- $V$  är en vänsterinvers om  $VA=I$ .
- $H$  är en högerinvers om  $AH=I$ .

$A$  är inverterbar om  $\exists B : AB=I, BA=I$ .  $B$  är en multiplikativ invers till  $A$ . Den entydigt bestämda inversen till  $A$  kallas  $A^{-1}$ .

## Lemma: (Lemma 2 s.12a)

- Om  $VA=I$  och  $AH=I$ , så är  $V=H$  och  $A$  inverterbar.
- Om  $A$  är inverterbar, så är inversen entydigt bestämd.

Bevis: (i) Antag  $VA=I, AH=I$

$$V=VI=V(AH)=(VA)H=IH=H$$

Alltså,  $V=H$  och  $A$  är då inverterbar.

(ii) Antag att  $B$  och  $B'$  är inverser till  $A$ . Speciellt  $BA=I$  och  $AB'=I$ .

$$(i) \Rightarrow B=B'. \quad \square$$

Ex. Vilka matriser har invers (vänster-/högerinvers)? Ange.

$$A=[a], \quad B=I, \quad C=\emptyset, \quad D=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$A=[a]$  inverterbar (om  $a \neq 0$ )

$B=I$  inverterbar ( $II=I$ )

$C=\emptyset$  ej inverterbar (ty  $\emptyset B \neq I \cdot \forall B$ )

$$D=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Lös } D\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -c & -d \\ a & b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alltså,  $a=0, b=1, c=-1, d=0$ .  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  högerinvers till  $D$ .

$$E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obs. Om  $E$  har vänsterinvers  $V$ , har  $V$  typ  $1 \times 3$ .  
 Om  $E$  har högerinvers  $H$ , har  $H$  typ  $1 \times 3$ .

Allmänt: Om  $A$   $m \times n$ , har  $V, H$  typ  $n \times m$ .

$$\left( \begin{bmatrix} V \\ E \end{bmatrix} = [1] \quad \begin{bmatrix} H \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

Vänsterinvers ex.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  ty  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [1]$

Argument 1:

$E$  saknar högerinvers ty  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \forall a, b, c$

Argument 2: Antag att  $E$  har högerinvers  $H$ . Då är  $E$  inverterbar och inversen entydigt bestämd, vilket leder till motsägelse.

Obs.  $V$  och  $H$  är ej unika i allmänhet.

Sats: (Sats 4 s. 130)

Om  $A, B$  är inverterbara, är  $A^{-1}, A^T, AB$  inverterbara med inverser:

- (i)  $(A^{-1})^{-1} = A$
- (ii)  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- (iii)  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Beweis (iii):

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I \quad \square$$

Övning: Bevisa (i) och (ii).

Prop. (Lemma 3 s. 132)

$A$  har vänsterinvers  $\Leftrightarrow A*x=0$  har endast lösning  $x=0$ .

Bevis:  $\Rightarrow$  Antag  $VA = I$ . Då  $Ax = 0 \Rightarrow VAx = V0 \Rightarrow x = 0$ .

$\Leftarrow$  Idé:  $Ax = 0$  trivial lösning  $x = 0 \Leftrightarrow a_1, \dots, a_n$  linj. obero.

Då kan man hitta  $b_1 : b_1 \cdot a_1 = 1, b_1 \perp a_2, \dots, a_n$

$$\text{Låt } V = \begin{bmatrix} -b_1 & - \\ \vdots & \\ -b_n & - \end{bmatrix}, \text{ då } VA = \begin{bmatrix} -b_1 & - \\ \vdots & \\ -b_n & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ a_1 & \cdots & a_n \\ 1 & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \square$$

Repetition:

- Lösningar till  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .
  - Invers ( $A^{-1}A = I$ ,  $AA^{-1} = I$ )
    - Vänsterinvers ( $VA = I$ )
    - Högerinvers ( $AH = I$ )
  - Prop:  $A$  har  $V \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  har endast lösning  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .
  - Variant:  $A$  har  $V \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  har högst en lösning.
- 

Plan:

- (Höger)invers och ekvationssystem
  - Beräkna  $A^{-1}$
- 

(Höger)invers och ekvationssystem:

Prop: (Lemma 3 s.132)

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $A$  har högerinvers  $\Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  har lösning  $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ .

$$\text{Obs. Om } B = \begin{bmatrix} | & | \\ | & | \\ \vdots & \vdots \\ | & | \\ -\alpha_1 - & \\ \vdots & \\ -\alpha_m - & \end{bmatrix} \text{ så } AB = \begin{bmatrix} | & | \\ | & | \\ \vdots & \vdots \\ | & | \\ A|\mathbf{b}_1 & \cdots A|\mathbf{b}_p & | \\ \vdots & & \vdots \\ A|\mathbf{b}_1 & \cdots A|\mathbf{b}_p & | \end{bmatrix}$$

Bevis:

$$A|\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 - & \\ \vdots & \\ -\alpha_m - & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | \\ | & | \\ \vdots & \vdots \\ | & | \\ \mathbf{b}_1 & \\ \vdots & \\ \mathbf{b}_p & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \mathbf{b}_1 & \\ \vdots & \\ \alpha_m \mathbf{b}_p & \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -\alpha_1 - & \\ \vdots & \\ -\alpha_m - & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | \\ | & | \\ \vdots & \vdots \\ | & | \\ A|\mathbf{b}_1 & \cdots A|\mathbf{b}_p & | \\ \vdots & & \vdots \\ A|\mathbf{b}_1 & \cdots A|\mathbf{b}_p & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 A|\mathbf{b}_1 & \cdots \alpha_p A|\mathbf{b}_p & | \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_m A|\mathbf{b}_1 & \cdots \alpha_m A|\mathbf{b}_p & | \end{bmatrix}$$

$$\text{Obs. } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ | & | \\ \vdots & \vdots \\ | & | \\ \mathbf{e}_1 & \cdots \mathbf{e}_m \end{bmatrix} \text{ (standard basen)}$$

Uppfyller att om  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{bmatrix}$  så  $\mathbf{b} = b_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + b_m \mathbf{e}_m$ .

Bevis prop.

$\Rightarrow$ : Antag att  $H = \begin{bmatrix} | & | \\ | & | \\ \vdots & \vdots \\ | & | \\ h_1 & \cdots h_m \end{bmatrix}$  uppfyller  $AH = I$ . Då

$$\begin{bmatrix} | & | \\ | & | \\ \vdots & \vdots \\ | & | \\ Ah_1 & \cdots Ah_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ | & | \\ \vdots & \vdots \\ | & | \\ \mathbf{e}_1 & \cdots \mathbf{e}_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow Ah_j = \mathbf{e}_j, j=1, \dots, m$$

Givet  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ , låt  $\mathbf{x} = b_1\mathbf{l}\mathbf{h}_1 + \dots + b_m\mathbf{l}\mathbf{h}_m$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Då

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}(b_1\mathbf{l}\mathbf{h}_1 + \dots + b_m\mathbf{l}\mathbf{h}_m) = b_1\mathbf{A}\mathbf{l}\mathbf{h}_1 + \dots + b_m\mathbf{A}\mathbf{l}\mathbf{h}_m = b_1\mathbf{e}_1 + \dots + b_m\mathbf{e}_m = \mathbf{b}$$

Alltså,  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  har lösning  $\mathbf{A}\mathbf{l}\mathbf{b}$ .

$\Leftarrow$ : Antag att  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  är lösbart  $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ .

Låt  $\mathbf{l}\mathbf{h}_j$  vara en lösning till  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , och låt  $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mathbf{l}\mathbf{h}_1 & \dots & \mathbf{l}\mathbf{h}_m \end{bmatrix}$ . Då

$$\mathbf{AH} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mathbf{A}\mathbf{l}\mathbf{h}_1 & \dots & \mathbf{A}\mathbf{l}\mathbf{h}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mathbf{e}_1 & \dots & \mathbf{e}_m \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

Alltså,  $\mathbf{A}$  har högerinvers.  $\square$

Sammanfattning (del av huvudsats):

Antag att  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix}$   $m \times n$ ,  $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^m$ .

$\mathbf{A}$  har vänsterinvers  $\Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  har endast lösning  $\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  har högst en lösning

$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  linjärt oberoende  $\stackrel{\text{(bassatsen)}}{\Rightarrow} n \leq m$   $\left( \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \right)$

$\mathbf{A}$  har högerinvers  $\Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  lösbart  $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \Leftrightarrow \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  spänner upp  $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{Kolomma} \mathbf{A} = \mathbb{R}^m \Leftrightarrow \text{Rang } \mathbf{A} = m$   $\left( \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \right)$   
 $\Rightarrow n \geq m$   $\stackrel{\text{(bassatsen)}}{\Rightarrow}$

Antag  $m = n$ .

Bassatsen ger  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  linjärt oberoende  $\Leftrightarrow \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  spänner upp  $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow$

$\mathbf{A}$  har vänsterinvers  $\quad \quad \quad \mathbf{A}$  har högerinvers

$\Leftrightarrow \mathbf{A}$  har både vänster- och högerinvers  $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathbf{A}$  inverterbar med  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{V} = \mathbf{H}$ .

Prop: A inverterbar  $\Leftrightarrow m=n$

Bewis: A inverterbar  $\Leftrightarrow A \text{ har } V \text{ och } H \Leftrightarrow \begin{cases} n \leq m \\ n \geq m \end{cases} \Leftrightarrow n=m \quad \square$

Prop: (Lemma 4 S.133)

Antag  $m=n$ .

1) A har H  $\Leftrightarrow A \text{ inverterbar med } A^{-1}=H$ .

2) A har V  $\Leftrightarrow A \text{ inverterbar med } A^{-1}=V$ .

Prop: (del av huvudsats)

A  $n \times n$ . Följande är ekvivalenta påståenden

- A inverterbar.
- $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$  lösbar  $\forall \mathbf{b}$
- $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$  har entydig lösning  $\forall \mathbf{b}$
- $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$  har högst en lösning  $\forall \mathbf{b}$
- $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$  har endast lösning  $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ .

Beräkna  $A^{-1}$ :

Antag A  $n \times n$ . Betrakta ekvationssystemet  $A\mathbf{x}=\mathbf{y}$  ( $\mathbf{y}$  givet vektor i  $\mathbb{R}^n$ )

- Lösning saknas  $\Leftrightarrow A$  saknar invers
- Annars lösning  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}$

Ex. Är  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  inverterbar? Beräkna isäfull  $A^{-1}$ .

$$A\mathbf{x}=\mathbf{y}=I\mathbf{y}$$

$$\xrightarrow{-3} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = y_1 \\ 3x_1 + 4x_2 = y_2 \end{array} \right. \rightarrow [A|I] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = y_1 \\ -2x_2 = -3y_1 + y_2 \end{array} \right. \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = -2y_1 + y_2 \\ x_2 = \frac{3}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 \end{array} \right. \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right]$$

Slutsats:  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{y}$ . Alltså, A inverterbar,  $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ .

Allmänt: Skriv  $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$  som

$$\begin{array}{c} [A|I] = \left[ \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{(elementära rcdoperationer möjligt om A inverterbar)}} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & c_{11} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{array} \right] = [I|A^{-1}] \\ (\mathbf{Ax} = \mathbf{y}) \quad (\text{vcedf. } x_j) \quad (\text{vcedf. } y_j) \quad (\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}) \end{array}$$

Ex. Är  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$  inverterbar? Bestäm i så fall  $A^{-1}$ .

$$[A|I] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-2} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

Endast lösbart för  $\mathbf{y}$  som uppfyller  $y_2 = 2y_1$ .

Alltså,  $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$  ej lösbart  $\forall \mathbf{y} \Leftrightarrow A$  ej inverterbar.

## Repetition:

- Vänster- och högerinvers och ekvationssystem
- Beräkna  $A^{-1}$ .

~~~~~

Plan:

- Minsta kvadratmetoden
- Linjära avbildningar

Minsta kvadratmetoden:

Approximativ lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, t.ex. överbestämda (fler ekvationer än variabler).

Ex. Hitta linje $L = \{y = a + bx\}$ som går genom punkterna $(0,1), (1,0), (1,2), (2,3)$

Att $\exists L$ som innehåller punkterna innebär att ekv. systemet

$$\begin{cases} a+b \cdot 0 = 1 \\ a+b \cdot 1 = 0 \\ a+b \cdot 1 = 2 \\ a+b \cdot 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$(A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b})$$

Obs. Klart från ekvation att lösning saknas.

Minsta kvadratmetoden går ut på att hitta \mathbf{x} som minimerar "felet" $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ (uttrycket ska vara så nära 0 som möjligt).

Obs. $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $A\mathbf{x} \in \text{kolonn } A \subseteq \mathbb{R}^m$

I ex. $m=4$, kolonn $A = \text{span}((1,1,1,1), (0,1,1,2))$ (2D plan i \mathbb{R}^4)

Idé: $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ minimerad om $A\mathbf{x} - \mathbf{b} \perp \text{kolonn } A = \text{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (A\mathbf{x} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}_j = 0, \quad j=1, \dots, n, \text{ d.v.s.}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1, (A\mathbf{x} - \mathbf{b}) \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n, (A\mathbf{x} - \mathbf{b}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{a}_1 - \\ \vdots \\ -\mathbf{a}_n - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ A\mathbf{x} - \mathbf{b} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T (A\mathbf{x} - \mathbf{b}) \Leftrightarrow \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

(normalekvationen)

(minsta värdet på $|A\bar{x} - b|$ då \bar{x} varierar över \mathbb{R}^n)
Prop: Om \bar{x} uppfyller $A^T A \bar{x} = A^T b$, så är $|A\bar{x} - b| = \min_{x \in \mathbb{R}^n} |A\bar{x} - b|$. ($|A\bar{x} - b| \leq |A\bar{x} - b| \forall x \in \mathbb{R}^n$)

Bevis:

$$\bar{x} \in \mathbb{R}^n, \text{ därför } |A\bar{x} - b|^2 = |(A\bar{x} - A\bar{x}) + (A\bar{x} - b)|^2 = |A(\bar{x} - \bar{x})|^2 + 2(A(\bar{x} - \bar{x}))(A\bar{x} - b) + |A\bar{x} - b|^2 =$$

Minns:

$$a \in \mathbb{R}^n \text{ identifieras med } \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \text{ och } a \in \mathbb{R} \text{ med } [a]. \text{ Då } a \cdot b = a^T b = [a_1 \cdots a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Alltså, $A(\bar{x} - \bar{x}) \cdot (A\bar{x} - b) = (A(\bar{x} - \bar{x}))^T (A\bar{x} - b) = \{(AB)^T = B^T A^T\} = (\bar{x} - \bar{x})^T \underbrace{A^T}_{\geq 0} (A\bar{x} - b) = 0$

(0 ty $A^T A \bar{x} = A^T b$)

$$= |A(\bar{x} - \bar{x})|^2 + |A\bar{x} - b|^2 \geq |A\bar{x} - b|^2$$

Slutsats: $|A\bar{x} - b|^2 \geq |A\bar{x} - b|^2$ (med likhet när $A\bar{x} = A\bar{x}$). \square

Ex. Hitta minsta kvadratlösning till

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$(A \cdot \bar{x} = b)$

$$A^T A \bar{x} = A^T b$$

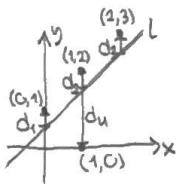
$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Kan kolla att $A^T A$ är inverterbar;
 $(A^T A)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{Alltså, } \bar{x} = (A^T A)^{-1} A^T b = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Slutsats: Linjen $l = \{y = a + bx\}$ som är anpassad efter punkterna i minsta kvadrat-bemärkelse är $L = \{y = 1/2 + x\}$



I vilken bemärkelse är L anpassad till punkterna?

Den minimerar kvadraten på vertikala avstånd. D.v.s. minsta värdet på $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$.

Linjära avbildningar: (kap. 8)

Def. En funktion (eller avbildning) $f: X \rightarrow Y$ från definitionsmängden X till mästmängden Y , är en "regel" som till varje $x \in X$ ordnar exakt ett $y \in Y$, skrivs $f(x) = y$ eller $f: x \mapsto y$.

Def. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linjär om

- 1) $f(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}')$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n$
- 2) $f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Alt: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linjär om

$$f(\lambda \mathbf{x} + \lambda' \mathbf{x}') = \lambda f(\mathbf{x}) + \lambda' f(\mathbf{x}'), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}.$$

Anm. f linjär $\Rightarrow f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Ex. Vilka av följande avbildningar är linjära?

$$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$$

$$f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \mapsto ax^2 + bx + c$$

$$f_3: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}, \quad A \text{ m} \times n$$

f_1 ej linjär

$$f_1(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^2 x^2 = \lambda^2 f(\mathbf{x}) \neq \lambda f(\mathbf{x}) \quad (\text{om } \lambda \neq 0, 1, \text{ annars linjär})$$

f_2 ej linjär

$$f_2(\mathbf{0}) = c \neq \mathbf{0} \quad (\text{om } c \neq \mathbf{0}, \text{ annars linjär})$$

f_3 linjär

$$f_3(\lambda \mathbf{x} + \lambda' \mathbf{x}') = A(\lambda \mathbf{x} + \lambda' \mathbf{x}') = \lambda A\mathbf{x} + \lambda' A\mathbf{x}' = \lambda f_3(\mathbf{x}) + \lambda' f_3(\mathbf{x}')$$

Repetition:

- Minsta kvadratmetoden (approx, lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$)
- $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linjär om $f(\lambda\mathbf{x} + \lambda'\mathbf{x}') = \lambda f(\mathbf{x}) + \lambda' f(\mathbf{x}')$

Plan:

- f linjär $\Rightarrow f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$
- Exempel
- Egenskaper hos f

Sats: (Sats 1 s.166)

- En avbildning $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är linjär om den är på formen $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ för någon $(m \times n)$ -matris A .
- Givet en linjär avbildning $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är $A = \begin{bmatrix} | & | \\ f(e_1) & \dots & f(e_n) \end{bmatrix}$ (*)
där $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$.
- A kallas (avbildnings-)matris för f .

Bevis:

- Om $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ så är $f(\lambda\mathbf{x} + \lambda'\mathbf{x}') = A(\lambda\mathbf{x} + \lambda'\mathbf{x}') = \lambda A\mathbf{x} + \lambda' A\mathbf{x}' = \lambda f(\mathbf{x}) + \lambda' f(\mathbf{x}')$.
Alltså, f linjär.
- Antag f linjär och låt A vara given av (*). Visa att $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

Obs 1. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

Obs 2. $Ae_j = \begin{bmatrix} | & | & | \\ f(e_1) & \dots & f(e_j) & \dots & f(e_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | \\ f(e_j) \\ | \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= A(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 A e_1 + \dots + x_n A e_n = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n) = \\ &= f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = f(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Alltså, $A\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$. \square

Ex. på linj. arb:

- Skalning: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \mapsto \lambda \mathbf{x}$, $\lambda > 0$.

Avbildningsmatris: $A = \begin{bmatrix} | & | \\ f(\mathbf{e}_1) & \dots & f(\mathbf{e}_n) \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda I$ (ty $f(\mathbf{e}_i) = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$)

- Orthogonal projektion på underrum genom origo:

Ex. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} \mapsto$ orthogonal projektion av \mathbf{x} på (x_1, x_2) -planet.

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, 0)$$

Matris: $\begin{array}{l} f(\mathbf{e}_1) = f(1, 0, 0) = (1, 0, 0) = \mathbf{e}_1 \\ f(\mathbf{e}_2) = f(0, 1, 0) = (0, 1, 0) = \mathbf{e}_2 \\ f(\mathbf{e}_3) = f(0, 0, 1) = (0, 0, 0) = \mathbf{0} \end{array}$



Avbildningsmatris: $A = \begin{bmatrix} | & | \\ f(\mathbf{e}_1) & \dots & f(\mathbf{e}_n) \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ex. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2)$

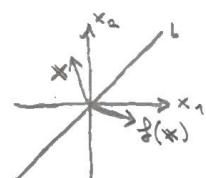
Matris: $\begin{array}{l} f(\mathbf{e}_1) = f(1, 0, 0) = (1, 0) \\ f(\mathbf{e}_2) = f(0, 1, 0) = (0, 1) \\ f(\mathbf{e}_3) = f(0, 0, 1) = (0, 0) \end{array}$

Avbildningsmatris: $A = \begin{bmatrix} | & | \\ f(\mathbf{e}_1) & \dots & f(\mathbf{e}_n) \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

- Spegling i underrum genom origo:

Ex. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} \mapsto$ speglingen av \mathbf{x} i $l: t(1, 1)$

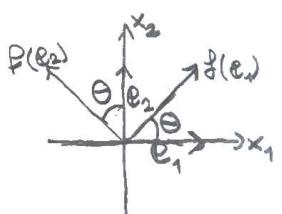
Matris: $\begin{array}{l} f(\mathbf{e}_1) = f(1, 0) = (0, 1) = \mathbf{e}_2 \\ f(\mathbf{e}_2) = f(0, 1) = (1, 0) = \mathbf{e}_1 \end{array}$



Avbildningsmatris: $A = \begin{bmatrix} | & | \\ f(\mathbf{e}_1) & f(\mathbf{e}_2) \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

- Rotation:

Ex. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} \mapsto$ \mathbf{x} roterad med Θ radianer moturs



Matris: $\begin{aligned} f(\mathbf{e}_1) &= f(1, 0) = (\cos \theta, \sin \theta) \\ f(\mathbf{e}_2) &= f(0, 1) = (-\sin \theta, \cos \theta) \end{aligned}$

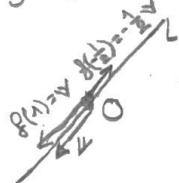
Avbildningsmatris: $A = \begin{bmatrix} | & | \\ f(\mathbf{e}_1) & f(\mathbf{e}_2) \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

- Parametrisering av underrum genom origo.

Ex. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto t\mathbf{v} = t(v_1, v_2, v_3)$ (parametriseringen av linjen genom origo med riktningens vektor \mathbf{v})

Matris: $f(\mathbf{e}_1) = f(1) = \mathbf{v}$

Avbildningsmatris: $A = \begin{bmatrix} | \\ f(1) \\ | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | \\ \mathbf{v} \\ | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$



"Översättning" Egenskaper $f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

f_A injektiv

$\forall b \in \mathbb{R}^m \exists$ högst ett $x \in \mathbb{R}^n: f_A(x) = b$

Egenskaper $A = [a_1, \dots, a_n]$

$\forall b \in \mathbb{R}^m \exists$ högst ett $x \in \mathbb{R}^n: Ax = b$

f_A surjektiv

$\forall b \in \mathbb{R}^m \exists$ minst ett $x \in \mathbb{R}^n: f_A(x) = b$

$\forall b \in \mathbb{R}^m \exists$ minst ett $x \in \mathbb{R}^n: Ax = b$

f_A bijektiv

$\forall b \in \mathbb{R}^m \exists$ exakt ett $x \in \mathbb{R}^n: f_A(x) = b$

$\forall b \in \mathbb{R}^m \exists! x \in \mathbb{R}^n: Ax = b$

Def. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ isometri om $|f(x)| = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Def. $A(n \times n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & \cdots a_n \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ortogonal om a_1, \dots, a_n ON-bas för \mathbb{R}^n

Sats: (Sats 7 s. 139)

A ortogonal $\Leftrightarrow A^T A = I \Leftrightarrow A^{-1} = A^T$.

Sats: (Sats 3 s. 174)

f_A isometri $\Leftrightarrow A$ ortogonal.

Övning: Egenskaper hos tidigare exempel.

Repetition:

- $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ Linjär omm $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, $A m \times n$ (avbildnings-)matriks
- Exempel
- Injektiv, surjektiv, bijektiv, isometri

Plan:

- Sammansättning
- Basbyte

Sammansättning:

Sats: (Sats 4, s. 180)

- Om $f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ och $f_B: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ linjära avbildningar, så är $f_A \circ f_B: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ linjär.
- Om f_A har avbildningsmatrisen A och f_B avbildningsmatrisen B , så har $f_A \circ f_B$ avbildningsmatrisen AB .

Obs. $A m \times n$, $B n \times p$, $AB m \times p$

Ex. Låt $f_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} \mapsto$ speglingen av \mathbf{x} i $L: t(1, 1)$.

$$A = \begin{bmatrix} | & | \\ f_A(e_1) & f_A(e_2) \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Låt $f_B: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} \mapsto$ \mathbf{x} roterad $\frac{\pi}{2}$ radianer.

$$B = \begin{bmatrix} | & | \\ e_2 & -e_1 \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$(f_B(e_1), f_B(e_2))$

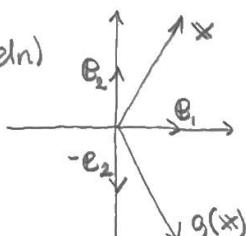
$g = f_A \circ f_B = f_{AB}$ linjär

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(g(e_1), g(e_2))

(spegling i x-axeln)

Övrigt: $h = f_B \circ f_A$



Bevis:

$$f_A \circ f_B(\mathbf{x}) = f_A(f_B(\mathbf{x})) = f_A(B\mathbf{x}) = A(B\mathbf{x}) = (AB)\mathbf{x}$$

(associativitet)

Alltså, $f_A \circ f_B$ linjär och dess avbildningsmatris är AB . \square

Sats: (Sats 5 s. 184)

Antag $f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linjär med avbildningsmatris A . Då är

- 1) f_A inverterbar (eller bijektiv) om A är inverterbar.
- 2) f_A^{-1} linjär med avbildningsmatris A^{-1} .

Bevis:

1) (Föregående föreläsning)

2) Vill visa att $f_{A^{-1}}$ invers till f_A .

$$f_{A^{-1}} \circ f_A(\mathbf{x}) = f_{A^{-1}A}(\mathbf{x}) = f_I(\mathbf{x}) = I\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

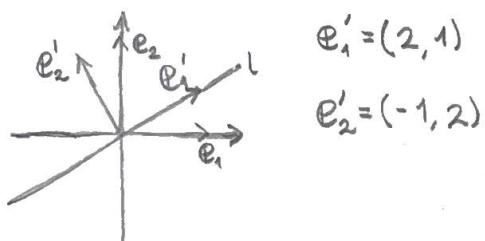
$$f_{A^{-1}} \circ f_A(\mathbf{y}) = f_{A^{-1}A}(\mathbf{y}) = f_I(\mathbf{y}) = I\mathbf{y} = \mathbf{y}$$

$$\text{Alltså, } f_{A^{-1}} = f_A^{-1}. \quad \square$$

Basbyte: (kap. 2.5, 7.6, 8.5)

Öfta praktiskt att välja bas anpassad till problem, t.ex. vid projektion eller spegling i linje l .

Ex. $l: t(2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$



Mål: Beskriv hur koordinater förändras.

Låt e_1, \dots, e_n och e'_1, \dots, e'_n vara bas för \mathbb{R}^n .

Låt $s_j = (s_{1j}, \dots, s_{nj})$ vara koordinater för e'_j i e_1, \dots, e_n d.v.s.

$$\begin{cases} e'_1 = s_{11}e_1 + \dots + s_{1n}e_n \\ e'_2 = s_{21}e_1 + \dots + s_{2n}e_n \\ \vdots \\ e'_n = s_{n1}e_1 + \dots + s_{nn}e_n \end{cases}$$

Obs. Om $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$, så är $s_j = e'_j$.

Matrisen $S = \begin{bmatrix} s_{11} & \dots & s_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{n1} & \dots & s_{nn} \end{bmatrix}$ kallas basbytesmatrisen.

Ex. $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$
 $e'_1 = (2, 1), e'_2 = (-1, 2)$

Obs. Om e_1, \dots, e_n standardbasen, så är

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e'_1 & \dots & e'_n \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{ty } e'_1 = 2e_1 + e_2, e'_2 = -e_1 + 2e_2)$$

Sats: (Sats 6 s. 137)

Låt e_1, \dots, e_n och e'_1, \dots, e'_n och S som ovan. Låt (x_1, \dots, x_n) och (x'_1, \dots, x'_n) vara koordinater i $\{e_j\}$ och $\{e'_j\}$. Då är

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

$$\underline{\text{Anm.}} \quad S \text{ inverterbar} \Rightarrow \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = S^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\underline{\text{Ex.}} \quad S^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Vilka är koordinaterna (x'_1, x'_2) för $e_1 : e'_1, e'_2$?

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = S^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 \\ -1/5 \end{bmatrix}$$

(koord. i e_j) (koord. i e_j)

Bevis:

Låt $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e_1 & \cdots & e_n \end{bmatrix}$, $E' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e'_1 & \cdots & e'_n \end{bmatrix}$.

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e_1 & \cdots & e_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$x = x'_1 e'_1 + \dots + x'_n e'_n \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e'_1 & \cdots & e'_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = E' \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

AUTSÅ, $E \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = E' \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$. (*)

Obs. $e'_j = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e'_1 & \cdots & e'_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{1j} \\ \vdots \\ s_{nj} \end{bmatrix} = E s_j$

$$E' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e'_1 & \cdots & e'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ E s_1 & \cdots & E s_n \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ s_1 & \cdots & s_n \end{bmatrix} = E S \quad (\text{Sätt in i (*)})$$

$$\Rightarrow E \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = E S \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

Obs. Kolonnerna i E bas $\Leftrightarrow E$ inverterbar \Rightarrow kan multipliceras med E^{-1}

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} \quad \square$$

Def. Om $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linjär avbildning, e_1, \dots, e_n bas för \mathbb{R}^n , e_1, \dots, e_n bas för \mathbb{R}^m , är avbildningsmatrisen för f i baserna $\{e_j\}$ och $\{e_k\}$ den $m \times n$ -matris som uppfyller:

$$f: \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ f(e_1) & \cdots & f(e_n) \end{bmatrix}$$

(koord. i e_j) (koord. i e_k)

Sats: (Sats 6 s.185)

Antag $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linjär avbildning.

Låt A vara avbildningsmatrisen i baserna \mathbf{e}_j och \mathbf{e}'_k .
Låt A' vara avbildningsmatrisen i baserna \mathbf{e}'_j och \mathbf{e}_k . Då

$$A' = S_e^{-1} A S_e$$

där S_e och S_e' är basbytesmatriser för \mathbf{e}_j' respektive \mathbf{e}_k' .

Ex. Bestäm avbildningsmatrisen A och A' för spegling i $l: t(2,1)$, $t \in \mathbb{R}$, i standardbasen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$. (för $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$)

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ f(\mathbf{e}'_1) & f(\mathbf{e}'_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = S_e A' S_e^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{(från sats)}} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Repetition:

- Sammansättning av linjära avbildningar
- $\mathcal{L}_A \circ \mathcal{L}_B = \mathcal{L}_{AB}$
- $\mathcal{L}_A^{-1} = \mathcal{L}_{A^{-1}}$
- Basbyte

Plan:

- Determinanter
 - Geometrisk tolkning
 - Definition

Determinanter: (kop. 9)

$$A_{n \times n} = (a_{ij})$$

Determinanten av A är ett tal associerat med A , skrivs $\det(A)$, $[a_{ij}]$.
(beror på orientering)

- $\det A = \underbrace{\text{Den positiva/negativa } n\text{-dimensionella volymen av den } n\text{-dimensionella parallelepiped som kolonnerna i } A \text{ spänner upp.}}$
- $\det A = \text{Den positiva/negativa } n\text{-dimensionella volymförändringen under } \mathcal{L}_A$
 $\mathcal{L}_A: S \rightarrow \mathcal{L}_A(S) = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists x \in S, \mathcal{L}_A(x) = y\} \Rightarrow \text{vol}(\mathcal{L}_A(S)) = \pm \det A \cdot \text{vol}(S)$

Def.

$$A_{n \times n}$$

- $n=1:$

$$A = [a], \det A = a$$

- $n=2:$

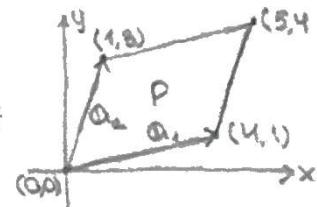
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Geometriskt: $\det A = \pm$ arean av parallelogrammet som a_1, a_2 spänner upp.
(Evaing: visa)

Ex. Beräkna arean av parallelogrammet P med hörn i $(0,0)$, $(4,1)$, $(1,3)$, $(5,4)$.

$$\text{Arean}(P) = \left| \begin{vmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right| = |4 \cdot 3 - 1 \cdot 1| = \underline{\underline{11 \text{ a.e.}}}$$



Ex. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \end{bmatrix}$

$$\det A = 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = \underline{\underline{-1}}$$

Geometriskt: $\text{Arean}(P) = |\det A| = 1$

$$(\text{Arean}(\mathcal{J}_A(S)) = |\det A| \cdot \text{arean}(S))$$

Ex. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \end{bmatrix}$

$$\det A = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$$

Geometriskt: $\text{Arean}(P) = 0$

$n=3:$

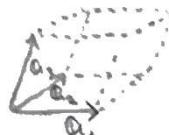
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(SARRUS regel)

$$\det A = \begin{array}{|ccc|} \hline & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \hline & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \hline \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Geometriskt:

Kan kolla med SARRUS regel.



$\det A = a_1 \cdot (a_2 \times a_3) = \pm$ volymen av parallelepipeden som spänns upp av a_1, a_2, a_3 .

Ex. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 - 2 \cdot 0 \cdot 5 \cdot 0 \cdot 4 \cdot 6 - 1 \cdot 3 \cdot 0 = \underline{\underline{56}}$

Godtyckligt n:

Mönster: $-n!$ termer

- varje term innehåller n faktorer
- varje term innehåller ett element från varje kolumn och rad

Låt $[n]$ beteckna mängden av talen $1, \dots, n$

Def./Not.

- En permutation av $[n]$ är en bijektiv avbildning $P: [n] \rightarrow [n]$.
- Permutationen $P: [n] \rightarrow [n]$ betecknas $P = [P_1, P_2, \dots, P_n]$.
- Mängden av permutationerna av $[n]$ betecknas S_n .

Def.

- En defekt (inversion) i en permutation $[P_1, P_2, \dots, P_n]$ är ett par (j, k) , där $j < k$ och $P_j > P_k$.
- P sägs vara jämn om antalet defekter i P är jämnt.
- P sägs vara udda om antalet defekter i P är udda.
- Signaturen av P , $\sigma(P)$ är $\begin{cases} 1 & \text{om } P \text{ är jämn} \\ -1 & \text{om } P \text{ är udda} \end{cases}$

Ex. $n=2$

P perm. av $[2]$	# defekter	$\sigma(P)$
$[1, 2]$	0	1
$[2, 1]$	1	-1

Ex. $n=3$

P perm. av $[3]$	# defekter	$\sigma(P)$
$[1, 2, 3]$	0	1
$[1, 3, 2]$	1	-1
$[2, 1, 3]$	1	-1
$[2, 3, 1]$	2	1
$[3, 1, 2]$	2	1
$[3, 2, 1]$	3	-1

Obs. $n!$ permutationer av $[n]$

Def. Determinanten av en $n \times n$ -matris $A = (a_{ij})$ är t.clet

$$\det A = \sum_{P \in S_n} \sigma(P) a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n}.$$

Ex. $n=2$

$$\det A = \sigma([1, 2]) a_{11} a_{22} + \sigma([2, 1]) a_{12} a_{21} = 1 \cdot a_{11} a_{22} - 1 a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

Ex. $n=3$

$$\begin{aligned} \det A &= \underbrace{\sigma([1, 2, 3])}_{1} a_{11} a_{22} a_{33} + \underbrace{\sigma([1, 3, 2])}_{-1} a_{11} a_{23} a_{32} + \underbrace{\sigma([2, 1, 3])}_{-1} a_{12} a_{21} a_{33} + \\ &+ \underbrace{\sigma([2, 3, 1])}_{-1} a_{12} a_{13} a_{31} + \underbrace{\sigma([3, 1, 2])}_{-1} a_{13} a_{21} a_{32} + \underbrace{\sigma([3, 2, 1])}_{-1} a_{13} a_{22} a_{31} = \\ &= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{13} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} \end{aligned}$$

Ex. $n=4$ ger $4!=24$ termer (går ej att använda SARRUS-regel)

Ex. $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda I$

$$\det A = \underbrace{\sigma([1, \dots, n])}_{1} a_{11} a_{22} \dots a_{nn} + (\text{termer där någon faktor } a_{ij} \ i \neq j) = \lambda^n$$

Speciellt: $\det I = 1$

Geometriskt:  $\text{Vol}(P) = \lambda^n$

Repetition:

- $\det A = \sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{1p_1} \cdots a_{np_n}$

- Geometriskt: $|\det A| = \text{vol } (\Delta_A) = \text{volymförändring under } f_A$.

Plan:

- Determinanter
 - Egenskaper

Determinanter:

Egenskaper: (kap. 9.3 och 9.9)

Sats: (Sats 2 s.199, Sats 12 s.219)

$$\det A^T = \det A$$

Bevis:

$n=2$. Antag $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.

$$\det A^T = \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} \end{vmatrix} = \det A \quad \square$$

Linjäritet:

$$\det(A+B) \stackrel{?}{=} \det A + \det B, \quad \det(\lambda A) \stackrel{?}{=} \lambda \det A$$

Ex. $A=B=I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A + \det B + \det I = 1 + 1 + 1 = 3$

$$\det A + \det B = 1 + 1 = 2$$

$$\det(A+B) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

Ärtsä, $\det(A+B) \neq \det A + \det B$ i allmänhet.

Determinanter är ej linjära i allmänhet.

Sats L: (del av sats 3 s.200)

Determinanten är linjär i varje kolonn/rad, d.v.s.

$$i) \begin{vmatrix} \dots & \lambda a_{ij} & \dots & \lambda' a'_{ij} & \dots \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \dots & a_{ij} & \dots \end{vmatrix} + \lambda' \begin{vmatrix} \dots & a'_{ij} & \dots \end{vmatrix}$$

$$ii) \begin{vmatrix} -\lambda a_{ij} & \dots & \lambda' a'_{ij} & \dots \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} \dots & a_{ij} & \dots \end{vmatrix} + \lambda' \begin{vmatrix} \dots & a'_{ij} & \dots \end{vmatrix}$$

Ex. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 8 & 4 \end{vmatrix} = \textcircled{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \textcircled{4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Bevis: i):

$$n=2, j=1$$

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda' a'_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} + \lambda' a'_{11} & a_{12} \\ a_{21} + \lambda' a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (\lambda a_{11} + \lambda' a'_{11}) a_{22} - a_{12} (\lambda a_{21} + \lambda' a'_{21}) = \\ = \lambda(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + \lambda'(a'_{11}a_{22} - a_{12}a'_{21}) = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \lambda' \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \\ = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a'_{11} & a'_{12} \end{vmatrix} + \lambda' \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{11} & a'_{12} \end{vmatrix}$$

Obs. ii) följer från i) ty $\det A^T = \det A$.

Ex. Vad är $\det(\lambda A)$?

$$\det(\lambda A) = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \dots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = \textcircled{2} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda^n \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda^n \det A$$

Sats A: (Sats 3)

Determinanten är alternnerande i kolonner och rader, d.v.s. om två kolonner/rader byter plats ändras tecknet.

$$i) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \dots & \dots \\ \alpha_j & \alpha_k \\ \dots & \dots \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \dots & \dots \\ \alpha_k & \alpha_j \\ \dots & \dots \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$ii) \begin{vmatrix} \vdots & \vdots \\ -\alpha_j & -\alpha_k \\ \vdots & \vdots \\ -\alpha_k & -\alpha_j \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vdots & \vdots \\ -\alpha_k & -\alpha_j \\ \vdots & \vdots \\ -\alpha_j & -\alpha_k \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

Bevis i):

$$n=2$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{11} \\ \alpha_{22} & \alpha_{21} \end{vmatrix} = \alpha_{12}\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{22} = -(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}) = - \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{vmatrix} \quad \square$$

$$\text{Ex: } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2, \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 2$$

Földrsats: (Sats L, Sats A)

1) Om två kolonner/rader är lika i A, är $\det A = 0$.

2) Adderas ett tal · (kolonn/rad) till en annan kolonn/rad, ändras inte determinanten.

3) A ej inverterbar $\Rightarrow \det A = 0$

$$\text{Ex: } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \text{ (enligt 1)}$$

Bevis:

1) Antag $\alpha_j = \alpha_k$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_j & \alpha_j & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_j & \alpha_j & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix} = -\det A$$

(platser j) (platser k)

Antså, $\det A = -\det A \Rightarrow \det A = 0$. \square

2) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0_1 & \dots & 0_n \end{bmatrix}$, A' vara den matris där λa_i lagts till a_k .

$$\det A' = \left| \dots \underbrace{0_1, \dots, 0_k + \lambda a_i, \dots} \right| = \left| \dots \underbrace{0_1, \dots, 0_k, \dots} \right| + \lambda \underbrace{\left| \dots \underbrace{0_1, \dots, 0_j, \dots} \right|}_{=0} = \det A \quad \square$$

3) A ej inverterbar $\Leftrightarrow a_1, \dots, a_n$ linjärt beroende $\Leftrightarrow a_i$ linjärkomb. av de andra \Leftrightarrow (efters omräkning) $a_1 = \sum_{j=2}^n \lambda_j a_j$.

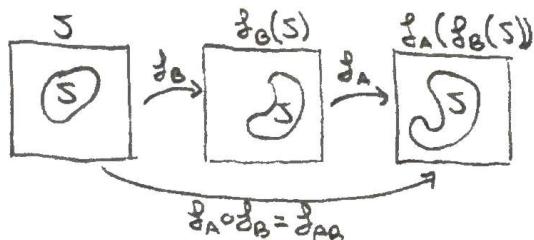
$$\det A = \left| \begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 0_1 & \dots & 0_n \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} \sum_{j=2}^n \lambda_j a_j & 1 \\ \hline 0_1 & \dots & 0_n \end{array} \right| = \sum_{j=2}^n \lambda_j \underbrace{\left| \begin{array}{c|c} 0_1 & 1 \\ \hline 0_1 & \dots & 0_n \end{array} \right|}_{=0} = 0 \quad \square$$

Ex. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} 5 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} \stackrel{(4)}{=} -5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} \stackrel{(2)-2}{\rightarrow} -5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -15$

Följdsats: (Sats L, Sats A, $\det I = 1$) (Sats 4 s.203)

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B \quad (\text{multiplikativitet})$$

Geometriskt:



$$\text{Vol}(f_A \circ f_B(S)) = |\det A| \text{Vol}(f_B(S)) = |\det A| |\det B| \text{Vol}(S)$$

$$\text{Vol}(f_{AB}(S)) = |\det(AB)| \text{Vol}(S)$$

$$\text{Alltså, } |\det(AB)| = |\det A||\det B| \Rightarrow \det(AB) = \pm \det(A) \det(B)$$

Följdsats:

Om A är inverterbar, är $\det A \neq 0$ och $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

Bevis:

$$1 = \det I = \det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} \Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}, \det A \neq 0$$

Följdsats: A inverterbar $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

Bevis 3: A ej inverterbar $\Rightarrow \det A = 0$ ger A inverterbar $\Rightarrow \det A \neq 0$

Repetition:

- Determinanter
 - Egenskaper
 - Linjär i kolonn/rad
 - Alternerande i kolom/rad
 - $\det I = 1$
 - $\det(AB) = \det A \cdot \det B$
 - $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ inverterbar
-

Plan:

- Determinanter
 - Beräkning (utveckling längs kolom/rad)
 - Adjunkt
 - Determinant och rang
-

Determinanter:

Beräkning:

Underdeterminant:

Låt $A_{m \times n}$

Def. En underdeterminant av ordning r till A är determinanten man får om man stryker $n-r$ kolonner och $m-r$ rader, vilket ger en $r \times r$ -determinant.

Ex. $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$ underdeterminant av ordning 2

Om A kvadratisk och D_{ij} betecknar den underdeterminant man får om man stryker rad i och kolonn j .

Ex. $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 12 & -7 \\ 8 & 12 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow D_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -7 \end{vmatrix}$

Sats: (Sats 6 s.206, Satz 12)

Antag A $n \times n$. Då gäller

- $\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}, j=1, \dots, n$ (utveckling efter kolonn j)
- $\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}, i=1, \dots, n$ (utveckling efter rad i)

Ex.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Utveckla efter rad 2: ($i=2$)

$$\det A = (-1)^{2+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \underline{\underline{22}}$$

Utveckla efter kolonn 3: ($j=3$)

$$\det A = (-1)^{3+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 0 + 0 = \underline{\underline{22}}$$

Strategi ($n > 3$):
- Använd elementära rad-/kolonmoperationer för att få en determinant med många nollor.
- Utveckla efter rad/kolom (med många nollor).

Ex. En matris på formen

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}, a_{ij} = 0 \text{ då } i > j$$

kallas uppst triangulär. Om $a_{ij} = 0$ då $i < j$, nedst triangulär.

Utveckla längs kolonn 1:

$$\det A = (-1)^{1+1} \cdot \lambda_1 \cdot \begin{vmatrix} \lambda_2 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 (-1)^{1+1} \cdot \lambda_2 \begin{vmatrix} \lambda_3 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1} \lambda_n = \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

Beviside:

Varje term $\sigma(p)a_{1p_1} \cdots a_{np_n}$ innehåller en faktor från rad i .

- Om man har valt a_{11} måste resten av faktorerna komma från D_{11} .
- Om man har valt a_{12} måste resten av faktorerna komma från D_{12} .

O.J.V.

Adjunkt:

Def. Antag A $n \times n$. Adjunkten till A är den $n \times n$ -matris vars $(i \times j)$ -element är $(-1)^{i+j} D_{ji}$, d.v.s.
(omvänt ordning)

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} D_{11} & -D_{21} & D_{31} \\ -D_{12} & D_{22} & \dots \\ D_{13} & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Sats: (Sats 7 s. 207)

$$A \text{adj } A = (\text{adj } A) A = (\det A) I$$

$$\text{Obs. } \det A \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A$$

Anm. Explicit uttryck för A^{-1} i termer av underdeterminant till A .

$$\text{Ex. } n=2, \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} D_{11} & -D_{21} \\ -D_{12} & D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\text{Alltså } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\text{Ex. } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 4 - 2 \cdot 3} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Ex. (Uppg. b, tenta 19/12-17)

Antag A $m \times n$, alla matriselement i A heltal och $\det A = 1$. Visar att alla matriselement i A^{-1} är heltal.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A = \text{adj } A$$

Alltså, matriselementen i A^{-1} är $\pm D_{ij}$, vilka är heltal eftersom de är underdeterminanter till A , vilka har heltalselement.

Sats: (Sats 7)

Cramers regel: Uttrycker lösning till $Ax=b$ i termer av determinanter.

Sats: (Sats 8, s.210)

Antag $A = [\underline{a}_1 \dots \underline{a}_n]$ $n \times n$, $\det A \neq 0$. Då har $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$ den entydiga lösningen.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ där } x_j = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{b} & \underline{a}_1 & \dots & \underline{a}_{j-1} & \underline{a}_{j+1} & \dots & \underline{a}_n \end{vmatrix}}{\det A} \quad (\mathbf{b} \text{ på plats } j).$$

Beweis: ($n=2, j=1$)

Antag $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ lösning till $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Då är $(\det \text{linjer i kolonner})$

$$\mathbf{b} = A \mathbf{x} = x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 \Rightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{b} & \underline{a}_1 & \underline{a}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 & \underline{a}_1 & \underline{a}_2 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} \underline{a}_1 & \underline{a}_2 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} \underline{a}_2 & \underline{a}_1 \end{vmatrix} =$$

(ty två lika termer)

$$= x_1 \det A + 0 = x_1 \det A$$

$$\text{Alltså, } x_1 = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} \mathbf{b} & \underline{a}_1 & \underline{a}_2 \end{vmatrix} \quad \square$$

Determinanter och rang:

Sats: (Sats 13 s.230)

$A m \times n$. Då är $\text{rang } A = \text{ordningen av största nollskilda underdet.}$

(D.v.s. om \exists nollskild underdet. av ordning r , men \forall underdet. av r' ordning $s > r$ är noll, är $\text{rang } A = r$.)

Ex. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\text{rang } A = 2$, ty kolonn $A = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$.

Obs. alla underdet. av ordning 3 är noll, t.ex. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$
men \exists underdet. av ordning 2 $\neq 0$,

$$\text{t.ex. } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \quad (\neq 0)$$

(ty två rader lika)

Ex. $A n \times n$

$\det A$ underdet. av ordning n om $\det A \neq 0$, så $\text{rang } A = n$.

Repetition:

- Utveckling rad/kolumn
- Adjunkt
- Determinant och rang

~~~~~

Plan:

- Komplexa tal
  - Definition
  - Räkneregler/-operationer
  - Exponentialekvationer

Komplexa tal: (App A i PB)

Utvidgning av  $\mathbb{R}$  så att alla polynomekvationer har lösningar.

Ex.  $(x-1)^2 = -1$  saknar reella lösningar

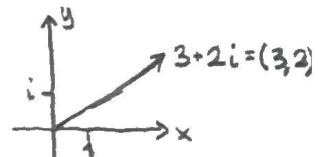
Introducera  $i$  som uppfyller  $i^2 = -1$ . Då har ekvationen lösningarna  $x = 1 \pm i$ .

Def. Ett komplext tal  $z$  är på formen  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ .

$x$  realdel,  $y$  imaginär del,  $i$  imaginära enheten.

Mängden av alla komplexa tal betecknas  $\mathbb{C}$ .

Obs.  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  kan identifieras med  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Räkneregler: (Sats 1 s. 464)

Addition:  $(x+iy) + (u+iv) = (x+u) + i(y+v)$  (kommutativ)

Multiplikation:  $(x+iy)(u+iv) = xu - yv + i(xv + yu)$  (associativ)

Obs. Addition och multiplikation med skalär i  $\mathbb{R}$  motsvarar samma i  $\mathbb{R}^2$ . Men multiplikation har ingen motsvarighet.

Anm. Multiplikation med ett komplex tal kan ses som en linjär avbildning på  $\mathbb{R}^2$ .

Ex  $\begin{array}{c} f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} \\ (x,y) \mapsto x+iy \end{array}$  med  $\begin{array}{c} f^{-1}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ z \mapsto (Rez, Imz) \end{array}$  och lät  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$   
 $\begin{array}{c} z \mapsto wz \\ (w=u+iv) \end{array}$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{C} \xrightarrow{g} \mathbb{C} \xrightarrow{f^{-1}} \mathbb{R}^2 \quad \text{Låt } F = f^{-1} \circ g \circ f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

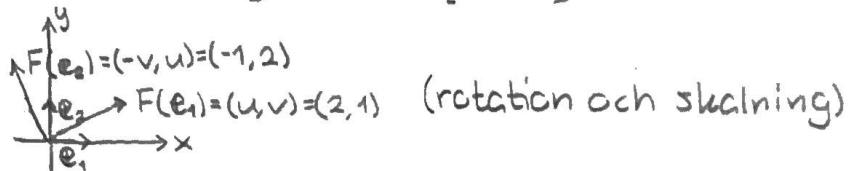
Visa att  $F$  är linjär och bestäm avbildningsmatrisen för  $F$ .

Strategi: Visa att  $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$  för något  $A$ . Då är  $F(\mathbf{x})$  och avbildningsmatrisen  $A$  linjära.

$$\begin{aligned} F(x,y) &= f^{-1}(g(f(x,y))) = f^{-1}(g(x+iy)) = f^{-1}((u+iv)(x+iy)) = (ux-vy, uy+vx) \\ &= \begin{bmatrix} u & -v \\ v & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Antså,  $F$  linjär med avbildningsmatris  $\begin{bmatrix} u & -v \\ v & u \end{bmatrix}$ .

Geometriskt:



$$\text{Ex. } w=i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ (rotation med } \frac{\pi}{2})$$

$$\text{Ex. } w=8 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \text{ (skalning med 8)}$$

### Division:

(Avbildningsmatris för multiplikation med  $w=u+iv$  är  $A=\begin{bmatrix} u & -v \\ v & u \end{bmatrix}$ )

Att dividera med  $w$  motsvarar att invertera  $A$ .

$$\det A = 0 \Leftrightarrow u=v=0$$

Antså  $A$  inverterbar om  $w=u+iv \neq 0$ .

$$A^{-1} = \frac{1}{u^2+v^2} \begin{bmatrix} u & v \\ -v & u \end{bmatrix} \text{ motsvarar multiplikation med } \frac{1}{u^2+v^2} (u-iv)$$

Def. Konjugatet till  $z=x+iy$  är  $\bar{z}=x-iy$ .

Absolutbeloppet  $|z|$  av  $z=x+iy$  är  $\sqrt{x^2+y^2}$  (längden av  $(x,y)$ ).

$$\text{Obs } z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2 = |z|^2$$

Låt  $\frac{1}{w}$  beteckna talet  $\frac{1}{|w|^2} \bar{w}$ . Då är  $\frac{1}{w}$  multipektiv invers till  $w$ , d.v.s.  $\frac{1}{w}w = 1$ . (Övning: Visa att inversen är entydig)

$$\frac{\bar{z}}{w} = \frac{1}{w} \bar{z} = \frac{1}{|w|^2} \bar{w} z = \{w = u+iv\} = \frac{1}{u^2+v^2} (u-iv) z$$

### Komplexa exponentialfunktionen:

Det finns en naturlig utvidgning av  $e^x$  till  $\mathbb{C}$ .

Def. Om  $z = x+iy$ , definieras den komplexa exponentialfunktionen av  $z$  som  $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$

Obs. Om  $z = x \Rightarrow e^x(\cos 0 + i \sin 0) = e^x$ .

Sats: (Sats 5 s. 474)

$$e^z \cdot e^w = e^{z+w}$$

Bevis:  $e^x \cdot e^n = e^{x+n}$ ,  $x, n \in \mathbb{R}$ . Trigonometri...

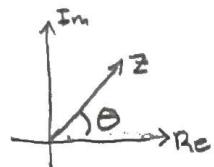
Obs. Om  $z \neq 0$  kan  $z$  definieras som den positiva vinkeln  $\Theta$  mellan Re-axeln och  $z$ .

$\Theta$  kallas argument till  $z$ ,  $\arg z$ .

$\Theta$  bestäms upp till addition av  $2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$z = |z|(\cos \Theta + i \sin \Theta) = \underbrace{|z| e^{i\Theta}}_{\text{(polär form)}}$$

$$\text{Obs. } \arg \bar{z} = -\Theta \Rightarrow \bar{z} = |z| e^{-i\Theta} \quad (\text{enligt tidigare def. för } e^z)$$



Föld av sats: (multiplication och division på polär form)

Om  $z = r e^{i\Theta}$  och  $w = p e^{i\varphi}$ , så är

$$z w = r p e^{i(\Theta+\varphi)}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{p} e^{i(\Theta-\varphi)}$$

$$\text{Speciellt: } z^n = r^n e^{in\Theta}$$

Repetition:

- Komplexa tal  $\mathbb{C} = x + iy = r e^{i\theta}$ ,  $r = |z|$ ,  $\theta = \arg z$

Plan:

- Polynomekvationer

Komplexa tal:Polynomekvationer:

Ett (komplext) polynom är en funktion

$$P: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \quad \text{där } a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$$

- Om  $a_n \neq 0$  så är  $P(z)$  grad  $n$ .
- Om  $P$  har 2 termer, sägs  $P$  vara ett binom.

(Ex:  $3z^8 - iz^2$  binom grad 8)

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot P \text{ grad 2 / binom kan reduceras till } z^n = a. \\ \cdot L \ddot{o} s z^n = a \\ \cdot Allm \ddot{a} nt P \end{array} \right.$$

P grad 2:

$$cz^2 + bz + a = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{C}, \quad c \neq 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 + \frac{b}{c}z + \frac{a}{c} = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2c}\right)^2 = \left(\frac{b}{2c}\right)^2 - \frac{a}{c}$$

$$\text{Låt } \tilde{z} = z + \frac{b}{2c} \text{ och } \tilde{a} = \left(\frac{b}{2c}\right)^2 - \frac{a}{c}$$

$$\Leftrightarrow \tilde{z}^2 = \tilde{a}$$

P binom:

$$a_m z^m + a_k z^k = 0, \quad a_m, a_k \in \mathbb{C}, \quad a_m, a_k \neq 0, \quad m > k$$

$$\Leftrightarrow z^m + \frac{a_k}{a_m} z^k = 0 \Leftrightarrow z^k \left(z^{m-k} + \frac{a_k}{a_m}\right) = 0$$

$$1) z^n = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$2) z^{m-k} + \frac{a_k}{a_m} = 0 \Leftrightarrow z^{m-k} = -\frac{a_k}{a_m}$$

Låt  $n = m-k$  och  $\tilde{a} = -\frac{a_k}{a_m}$

$$\Leftrightarrow z^n = \tilde{a}$$

Lösa  $z^n = a$ :

Metod 1: ("rektaangular form")

Antag  $n=2$ . Sätt  $z=x+iy$ ,  $a=u+iv$ ,  $u,v,x,y \in \mathbb{R}$

$$z^2 = a \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = u + iv$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = u & (\operatorname{Re} z^2 = \operatorname{Re} a) \\ 2xy = v & (\operatorname{Im} z^2 = \operatorname{Im} a) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{u^2 + v^2} & (|z^2| = |z|^2 = |a|) \end{cases}$$

Ex. Löslös  $x^2 = -i$

$$\text{Sätt } z = x+iy \Leftrightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\begin{array}{ll} (I) \left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -1 \end{array} \right. & (\operatorname{Re} z^2 = \operatorname{Re} (-i)) \\ (II) \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ 2xy = -1 \end{array} \right. & (\operatorname{Im} z^2 = \operatorname{Im} (-i)) \\ (III) \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{array} \right. & (|z^2| = |-i|) \end{array}$$

(I) + (III) ger:

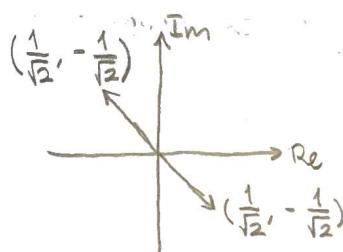
$$2x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Insättning i (I):

$$y^2 = x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vilka  $x, y$  uppfyller (2)?

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ eller } \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$



### Metod 2: ("polär form")

Sätt  $a = \rho e^{i\varphi}$ ,  $\rho = |a|$ ,  $\varphi = \arg a$ . Sätt  $z = re^{i\Theta}$ ,  $r = |z|$ ,  $\Theta = \arg z$

$$z^n = a \Leftrightarrow r^n e^{in\Theta} = \rho e^{i\varphi}$$

$$\begin{cases} r^n = \rho \\ n\Theta = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (|z^n| = |a|) \quad (\arg z^n = \arg a)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \Theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (\rho \geq 0)$$

$$z = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i(\frac{\varphi + 2\pi k}{n})}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Obs.  $k=1, \dots, n-1$  ger olika lösningar.

Dock  $k=0$  och  $k=1+n$  ger samma lösning, ty

$$e^{i(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi(1+n)}{n})} = \underbrace{e^{2\pi i}}_{=1} \cdot e^{i(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n})}$$

Slutsats:  $z^n = a$  har lösningarna  $z = (\rho)^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n})}$ ,  $k = 0, \dots, n-1$

Ex. Lös  $z^3 = -i$

$$|-i| = 1, \quad \arg(-i) = \frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow z^3 = e^{i\frac{3\pi}{2}} \Rightarrow z = e^{i(\frac{3\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3})}, \quad k = 0, \dots, 2$$

Ex.  $n=2$  ger två olika lösningar.

$$z = e^{i(\frac{3\pi}{4} + 0)} = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (k=0)$$

$$z = e^{i(\frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{2})} = e^{i\frac{7\pi}{4}} = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (k=1)$$

### Allmänna polynomekvationer:

#### Algebraens fundamentaltsats:

$p(z)$  grad  $\geq 1 \Rightarrow \exists$  nollställe till  $p(z)$

$p(z)$  grad  $n \Rightarrow \exists$  exakt  $n$  nollställen till  $p(z)$

#### Faktorsatsen:

Om  $z=a$  nollställe till  $p$ , d.v.s.  $p(a)=0$ , är  $p(z) = (z-a)q(z)$  (grad  $n-1$ )

$\Rightarrow p(z) = C(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n)$ ,  $a_1, \dots, a_n$  nollställen till  $p$

Ex. Lös ekvationen  $p(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2 = 0$

(Tips:  $\exists$  minst ett rent imaginärt nollställe,  $z=ai$ ,  $a \in \mathbb{R}$ )

Sätt  $z=ai$

$$p(ai) = a^4 + 2a^3i - 3a^2 - 2ai + 2 = 0$$

$$\begin{cases} I) a^4 - 3a^2 + 2 = 0 & (\text{Re } p(ai) = 0) \\ II) 2a^3 - 2a = 0 & (\text{Im } p(ai) = 0) \end{cases}$$

$$(II) \Leftrightarrow 2a(a^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow a = 0, \pm 1$$

$a = \pm 1$  lösningar till (I)

Alltså,  $p(ai)$  har lösningar  $a = \pm 1 \Rightarrow p(z) = 0$  har lösningar  $\pm i \Rightarrow$   
 $\Rightarrow p(z)$  har en faktor  $(z-i)(z+i) = z^2 - i^2 = z^2 + 1$

$$\text{Polynomdivision ger } p(z) = (z^2 + 1)(z^2 - 2z + 2)$$

$$\text{Lös } z^2 - 2z + 2 = 0 \Rightarrow (z-1)^2 = -1 \Rightarrow z-1 = \pm i \Rightarrow z = 1 \pm i$$

Slutsats:  $p(z) = (z-i)(z+i)(z-1-i)(z-1+i) = 0$  har  
lösningar  $z = i, -i, 1-i, 1+i$ .

## Repetition

- Polynomekvationer
  - p grad 2 och binom,  $z^n = a$
  - Ansats  $z = x + iy$  och  $z = re^{i\theta}$
  - Allmänt  $p(z) = 0$
- 

## Plan:

- Eigenvärden- och vektorer
  - Definition
  - Exempel
  - Beräkning
  - Diagonalisering

Eigenvärden- och vektorer: (kap. 10.1, 10.2)

Def. (s. 238)

- Antag  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  linjär avbildning. Om  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  uppfyller  $f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$ , kallas  $\lambda$  eigenvärde och  $\mathbf{x}$  eigenvektor till  $f$ .
- Antag  $A$   $n \times n$ . Om  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  uppfyller  $A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ , kallas  $\lambda$  eigenvärde och  $\mathbf{x}$  eigenvektor till  $A$ .

Anm.  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , ty annars är alla  $\lambda$  eigenvärden.

$$\text{Ex.: } A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 3\mathbf{x}$$

Alltså, 3 är ett eigenvärde och  $\mathbf{x}$  eigenvektor till  $A$ .

$$\text{Ex.: } A = I, \quad A\mathbf{x} = I\mathbf{x} = 1 \cdot \mathbf{x}$$

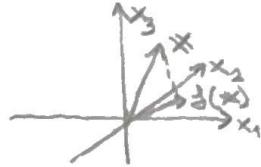
1 eigenvärde.  $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$  eigenvektorer.

$$\text{Ex.: } A = \mathbf{0}, \quad A\mathbf{x} = \mathbf{0}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

0 eigenvärde.  $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$  eigenvektorer.

$$\text{Ex.: } f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} \mapsto 3\mathbf{x}. \quad \text{Obs. } f(\mathbf{x}) = 3\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

3 eigenvärde.  $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$  eigenvektorer.



Ex.  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\star$  orthogonal projection  $(x_1, x_2)$ -planet,  $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, 0)$

Obs.  $f(\star) = \star$  om  $\star \in (x_1, x_2)$ -planet, d.v.s. om  $\star = (x_1, x_2, 0)$ .

$f(\star) = 0$  om  $\star \in x_3$ -axeln, d.v.s. om  $\star = (0, 0, x_3)$ .

Annars  $f(\star) \neq \lambda \star$  för något  $\lambda$ .

Alltså, egenvärde 1 och motsvarande egenvektorer  $(x_1, x_2)$ -planet,  $\star \neq 0$ , eller egenvärde 0 och egenvektorer  $x_3$ -axeln,  $\star \neq 0$ .

Ex.  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\star \mapsto \star$  roterad  $\Theta$  radianer moturs. Antag  $0 < \Theta < \pi$ .

$f(\star)$  aldrig parallell med  $\star \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  egenvärde saknas.



Obs.  $\Theta = 0$  ger egenvärde 1 ( $f(\star) = \star$ ).  
 $\Theta = \pi$  ger egenvärde -1 ( $f(\star) = -\star$ ).

Ex. (~Lemma 1 s. 240)

Antag  $\star$  egenvektor för  $A$  med egenvärde  $\lambda$ .  
 $B$   $\mu$ .

Då är  $\star$  egenvektor till  $cA + B$  med egenvärde  $c\lambda + \mu$ . (i)

$$\begin{array}{ccc} -\parallel & A+B & -\parallel \\ -\parallel & AB & -\parallel \\ -\parallel & 7A^2B^4 + 18AB^2 & -\parallel \\ -\parallel & P(A,B) & -\parallel \end{array} \quad \begin{array}{c} c\lambda + \mu. \\ c\mu. \\ 7\lambda^3\mu^4 + 18\lambda^2\mu^2. \\ P(\lambda, \mu). \end{array} \quad \begin{array}{l} (ii) \\ (iii) \\ (iv) \\ (v) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} -\parallel & A+B & -\parallel \\ -\parallel & AB & -\parallel \\ -\parallel & 7A^2B^4 + 18AB^2 & -\parallel \\ -\parallel & P(A,B) & -\parallel \end{array} \quad \begin{array}{c} c\lambda + \mu. \\ c\mu. \\ 7\lambda^3\mu^4 + 18\lambda^2\mu^2. \\ P(\lambda, \mu). \end{array} \quad \begin{array}{l} (ii) \\ (iii) \\ (iv) \\ (v) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} -\parallel & A+B & -\parallel \\ -\parallel & AB & -\parallel \\ -\parallel & 7A^2B^4 + 18AB^2 & -\parallel \\ -\parallel & P(A,B) & -\parallel \end{array} \quad \begin{array}{c} c\lambda + \mu. \\ c\mu. \\ 7\lambda^3\mu^4 + 18\lambda^2\mu^2. \\ P(\lambda, \mu). \end{array} \quad \begin{array}{l} (ii) \\ (iii) \\ (iv) \\ (v) \end{array}$$

Bevis (i):

$$(cA)\star = c(A\star) = c(\lambda\star) = (c\lambda)\star$$

Bevis (ii):

$$(A+B)\star = A\star + B\star = \lambda\star + \mu\star = (\lambda + \mu)\star$$

Övning: Bevisa resterande.

Ex.  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\star \mapsto A\star$ ,  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ . Bestäm egenvärden och -vektorer.

$$A\star = \lambda\star \Leftrightarrow 0 = \lambda\star - A\star = \lambda I\star - A\star = (\lambda I - A)\star$$

Obs.  $\lambda$  egenvärde till  $A$  (eller  $f$ )  $\Leftrightarrow \lambda\star - A\star$  har icke-trivial lösning.  
 $\Leftrightarrow \det(\lambda I - A) = 0$  (ty  $\lambda I - A$  ej inverterbar)

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -3 \\ -4 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2) - (-3)(-4) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 - 12 = \lambda^2 - 3\lambda - 10 = (\lambda - \frac{3}{2})^2 - \frac{49}{4} = (\lambda - 5)(\lambda + 2)$$

$\det(\lambda I - A) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5, \lambda = -2$  egenvärden.

$$\lambda = -2: (-2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1 - 3x_2 = 0 \\ -4x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -t \end{cases}$$

Alltså, egenvektorer  $t(1, -1)$ ,  $t \neq 0$ .

$$\lambda = 5: (5 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 = 0 \\ -4x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3t \\ x_2 = 4t \end{cases}$$

Alltså, egenvektorer  $t(3, 4)$ ,  $t \neq 0$ .

Def. (Def. 2 s. 241)

$A_{n \times n}$ .

- $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$  kallas karakteristiska polynomet för  $A$ .

$\cdot p(\lambda) = 0$  karakteristiska ekvationen.

Sats: (Sats 1 s. 242)

$A_{n \times n}$

- Egenvärdena till  $A$  är röllställena till  $p_A$ .
- Egenvektorerna motsvarande egenvärde  $\lambda$  är de icke-triviala lösningarna till  $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Obs.  $p_A(\lambda)$  grad  $n \Leftrightarrow$  antalet egenvärden  $\leq n$ .

Egenvektorerna till  $\lambda$  är oändligt många.

Ex. (Sats 6 s. 259)

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda I)^T = \lambda I \\ (A+B)^T = A^T + B^T \end{array} \right.$$

$A$  och  $A^T$  har samma egenvärden, ty  $p_{A^T}(\lambda) = \det(\lambda I - A^T) = \det((\lambda I - A)^T) = \det(\lambda I - A) = p_A(\lambda)$  ( $\det A^T = \det A$ )

Obs.  $A$  och  $A^T$  har ej i allmänhet samma egenvektorer.

Ex.  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2)$ -planet

$$\text{Avb.matriX } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 \lambda$$

$$p_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0, \lambda = 1 \text{ (egenvärden)}$$

$$\lambda = 1: \quad (I - A) \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \{x_3 = 0\} = \{x_1, x_2\}-\text{planet}$$

Egenvektorer:  $(x_1, x_2)$ -planet \{0\}

Ex.  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$  roterad  $\Theta$  radianer moturs,  $0 < \Theta < \pi$

$$\text{Avb.matriX } A = \begin{bmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{bmatrix}. p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - \cos \Theta & \sin \Theta \\ -\sin \Theta & \lambda - \cos \Theta \end{vmatrix} = (\lambda - \cos \Theta)^2 + \sin^2 \Theta$$

$p_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - \cos \Theta)^2 = 0$  och  $\sin^2 \Theta = 0$  (ty termerna  $\geq 0$ ), men  
 $0 < \Theta < \pi \Rightarrow \sin \Theta > 0 \Rightarrow p_A(\lambda) > 0 \Rightarrow$  nollställen saknas

Alltså, egenvärden saknas.

Övning:  $\Theta = \pi$ ?

Diagonalisering: (kap. 10.3)

Diagonala matriXer är på formen  $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$ .

Ex.  $D^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^2 \end{bmatrix}$  (Speciellt:  $D^N$  diagonal,  $N \in \mathbb{N}$ )

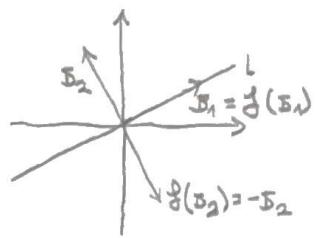
Def. (Def. 3 s. 247)

En linjär avbildning  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  sägs vara diagonalisbar om det finns en bas  $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n$  för  $\mathbb{R}^n$  så att avb.matriXen för  $f$  i basen  $\mathbf{s}_j$  är diagonal.

Ex.  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $x \mapsto$  spegling av  $x$  i  $L: t(2; 1)$ ,  $t \in \mathbb{R}$

Låt  $\mathbf{s}_1 = (2, 1)$ ,  $\mathbf{s}_2 = (-1, 2)$ .  $f(\mathbf{s}_1) = \mathbf{s}_1$ ,  $f(\mathbf{s}_2) = -\mathbf{s}_2$

Avt. matris  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  diagonal.  $\Rightarrow f$  diagonaliseras.



Obs. Om  $f$  diagonaliseras och  $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$  är avt. matris i basen  $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n$ , är

kolumn  $j \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_j \\ 0 \end{bmatrix}$  (plats  $j$ ) då  $f(\mathbf{s}_j)$  är uttryckt i basen  $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n$ .

Alltså,  $f(\mathbf{s}_j) = \lambda_j \mathbf{s}_j$ ,  $\mathbf{s}_j$  egenvektor och  $\lambda_j$  egenvärde.

Def. (Def. 3' s. 247)

En  $(n \times n)$ -matris  $A$  sägs vara diagonaliseras om  $\exists$  inverterbar matris  $S$  och diagonal matris  $D$  så att  $S^{-1}AS = D \Leftrightarrow A = SDS^{-1}$ .

Ex. Om  $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$ , är  $A$  diagonaliseras ( $D = A$ ,  $S = I$ ).

Ex. Antag  $A$  diagonaliseras. Visa att  $A^{-1}$  är diagonaliseras.

$A$  diagonaliseras  $\Rightarrow \exists S, D$  så att  $A = SDS^{-1}$ .

$$A^{-1} = (SDS^{-1})^{-1} = \underbrace{(S^{-1})}_{\text{ggf}} \underbrace{(D^{-1})}_{\text{diagonal}} \dots \underbrace{(S^{-1})}_{\text{ggf}} = S D^{-1} S^{-1}$$

Alltså,  $A^{-1}$  diagonaliseras ( $A^N$ ,  $N \in \mathbb{N}$ )

Prop. (Del av sats 2 s. 248)

Om  $A = SDS^{-1}$  där  $S = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \mathbf{s}_1 & \dots & \mathbf{s}_n \end{bmatrix}$  och  $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$ , är  $\mathbf{s}_j$  egenvektor till  $A$  med egenvärde  $\lambda_j$ .

Anm. Jämför med Obs. ovan.

Bevis:

$$\text{Antag } A = SDS^{-1} \Leftrightarrow AS = SD$$

$$AS = \begin{bmatrix} 1 & & \\ A\mathbb{J}_1 & \cdots & A\mathbb{J}_n \end{bmatrix}, \quad SD = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \mathbb{J}_1 & \cdots & \mathbb{J}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \lambda_1\mathbb{J}_1 & \cdots & \lambda_n\mathbb{J}_n \end{bmatrix}$$

kolonn j  $AS =$  kolonn j i  $SD$ , d.v.s.  $A\mathbb{J}_j = \lambda_j\mathbb{J}_j$ .

Alltså,  $\mathbb{J}_j$  egenvektor med  $\lambda_j$  egenvärde.  $\square$

Sats: (Del av sats 2 s.248)

Antag  $A$   $n \times n$ .

$A$  diagonalisierbar  $\Leftrightarrow A$  har  $n$  linjärt oberoende egenvektorer.

Bevis:

$\Rightarrow$ :  $A$  diagonalisierbar  $\Leftrightarrow A = SDS^{-1}$  där  $S = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \mathbb{J}_1 & \cdots & \mathbb{J}_n \end{bmatrix}$  inverterbar  $\Leftrightarrow \mathbb{J}_1, \dots, \mathbb{J}_n$  linjärt oberoende  $\Rightarrow \mathbb{J}_1, \dots, \mathbb{J}_n$  egenvektorer. ( $n$  stycken).

$\Leftarrow$ :  $A$  har  $n$  linj. obero. egenvektorer  $\mathbb{J}_1, \dots, \mathbb{J}_n$  med egenvärden  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$$\text{Låt } S = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \mathbb{J}_1 & \cdots & \mathbb{J}_n \end{bmatrix} \text{ och } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

$$AS = A \begin{bmatrix} 1 & & \\ \mathbb{J}_1 & \cdots & \mathbb{J}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ A\mathbb{J}_1 & \cdots & A\mathbb{J}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \lambda_1\mathbb{J}_1 & \cdots & \lambda_n\mathbb{J}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \mathbb{J}_1 & \cdots & \mathbb{J}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = SD$$

$\mathbb{J}_1, \dots, \mathbb{J}_n$  linjärt oberoende  $\Leftrightarrow S$  inverterbar

$A = SDS^{-1} \Leftrightarrow A$  diagonalisierbar  $\square$

Notation: Att hitta  $S$  och  $D$  kallas att diagonalisera  $A$ .

Strategi: (För att avgöra om  $A$  är diagonalisierbar och i sf. diagonalisera  $A$ )

- i) Bestäm egenvärden (lös  $\det(\lambda I - A) = 0$ ).
- ii) Bestäm egenvektorer (lös  $(\lambda I - A)x = 0$ ).

- iii) Avgör om det finns  $n$  linjärt oberoende egenvektorer  $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n$ .  
 Om nej  $\rightarrow A$  ej diagonalisierbar.  
 Om ja  $\rightarrow A = SDS^{-1}$  ( $D$  diagonal,  $S$  inverterbar).

Ex. Avgör om  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  är diagonalisierbar. I.s.f. diagonalisera.

Minns:  $A$  har egenvärden:

-2 med egenvektorer  $t_1(1, -1)$ ,  $t_1 \in \mathbb{R}$ .  
 5 med egenvektorer  $t_2(3, 4)$ ,  $t_2 \in \mathbb{R}$ .

Ex.v.  $\mathbf{s}_1 = (1, -1)$  och  $\mathbf{s}_2 = (3, 4)$  linj. obero. egenvektorer  $\Rightarrow A$  diagonalisierbar

Låt  $S = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$  och  $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ .

Övning:  $A = SDS^{-1}$

Ex. Avgör om  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  är diagonalisierbar. I.s.f. diagonalisera.

i)  $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2$

$\det(\lambda I - A) = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$  (egenvärde)

ii)  $(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0 \Rightarrow (I - A)\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \{x_2 = 0\}$  ( $x_1$ -axeln)

Egenvektorer  $t(1, 0)$ ,  $t \neq 0$ .

iii)  $\exists$  två linj. obero. egenvektorer.

Slutsats:  $A$  ej diagonalisierbar.

Repetition:

(linjär arb.)

- Egenvektorer och -värden (\* egenvektör med egenvärde  $\lambda$  om  $\lambda(x) = \lambda x$ )
  - Beräkning: Läs  $\det(\lambda I - A) = 0$  ( $p_A(\lambda) = 0$ )  $\rightarrow$  egenvärden  
Lös  $(\lambda I - A)x = 0 \rightarrow$  egenvektorer
  - Diagonalisering
    - $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  linj. arb. diagonalisierbar om  $\exists$  bas s.a. arb.matriks diagonal
    - $A$  diagonalisierbar om  $\exists S$  inv. bar och  $D$  diagonal s.a.  $A = SDS^{-1}$
- 

Plan:

- Villkor diagonalisering.
- 

Diagonlisering:

Ex.  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  diagonal, spec.  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  diagonalisierbar.

Ex.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ej diagonalisierbar

Tillräckliga villkor:

Sats: (Sats 3 s. 255)

[Antag  $A$   $n \times n$  har egenvärden  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  och  $\lambda_i \neq \lambda_j$ ,  $i \neq j$ .  
Då är  $A$  diagonalisierbar.]

Obs. Ej nödvändigt villkor, ex.v.  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  diagonalisierbar, ej olika egenvärden

Beweis:

Per def. finns minst en egenvektor  $s_j \neq 0$  med egenvärde  $\lambda_j$ ,  $j=1, \dots, n$ .

Visa att  $s_1, \dots, s_n$  linj. obero.  $\Leftrightarrow A$  diagonalisierbar.

Induktion:

- $s_1$  linj. obero. ty  $s_1 \neq 0$ .
- Antag  $s_1, \dots, s_p$  linj. obero.
- Visa att  $s_1, \dots, s_p, s_{p+1}$  linj. obero.

Visa att  $\underbrace{x_1 s_1 + \dots + x_p s_p + x_{p+1} s_{p+1}}_{(*)} = 0 \Rightarrow x_1, \dots, x_{p+1} = 0$

$$\text{Obs. } (\lambda_{p+1} I - A) s_{p+1} = \{A s_{p+1} = \lambda_{p+1} s_{p+1}\} = 0$$

$$(\lambda_{p+1} I - A) s_j = \lambda_{p+1} s_j - \lambda_j s_j = \{\lambda_i \neq \lambda_j\} \neq 0$$

Multiplicera  $(\lambda_{p+1} I - A)$  i bådd led i  $(*)$ :

$$VL = (\lambda_{p+1} I - A)(x_1 s_1 + \dots + x_{p+1} s_{p+1}) = x_1 (\lambda_{p+1} I - A) s_1 + \dots + x_{p+1} (\lambda_{p+1} I - A) s_{p+1} =$$

$$x_1 (\lambda_{p+1} - \lambda_1) s_1 + \dots + x_p (\lambda_{p+1} - \lambda_p) s_p$$

$$HL = (\lambda_{p+1} I - A) 0 = 0$$

$$\text{Alltså, } x_1 (\lambda_{p+1} - \lambda_1) s_1 + \dots + x_p (\lambda_{p+1} - \lambda_p) s_p = 0.$$

$$\text{Induktionsantagandet } \Rightarrow x_1 (\lambda_{p+1} - \lambda_1), \dots, x_p (\lambda_{p+1} - \lambda_p) = 0$$

$$\text{Hypotes i sats: } \lambda_{p+1} - \lambda_j \neq 0 \Rightarrow x_1, \dots, x_p = 0, \quad j = 1, \dots, p.$$

Insättning i  $(*)$ :

$$0 + x_{p+1} s_{p+1} = 0, \quad s_{p+1} \neq 0 \Rightarrow x_{p+1} = 0$$

Alltså  $x_1, \dots, x_{p+1} = 0 \Rightarrow s_1, \dots, s_n$  linj. obero.  $\Rightarrow A$  diagonalisierbar  $\square$

### Spektralsatsen: (Sats 4 s. 257)

Antag  $A$   $n \times n$  symmetrisk. Då

- har  $A$   $n$  reella egenvärden (med multiplicitet).
- $\exists$  ortogonal matris  $S$  och diagonal matris  $D$  s.a.  $A = SDS^T$ .

Delar av bevis:

#### Lemma: (Lemma 2 s. 256)

Antag  $A$   $n \times n$  symmetrisk,  $s_j$  egenvektor med egenvärde  $\lambda_j$ ,  $s_k$  egenvektor med egenvärde  $\lambda_k$ ,  $\lambda_j \neq \lambda_k$ .

Då är  $s_j \perp s_k$ .

#### Bevis:

$u \cdot v$  kan skrivas  $u^T v$ . Visa att  $0 = s_j \cdot s_k = s_j^T s_k$ .

$$\begin{aligned}
 & (\text{räkneregler}) \quad (A\mathbf{s}_j = \lambda_j \mathbf{s}_j) \quad ((AB^T = B^TA^T) \quad (A \text{ symmetrisk}) \quad (A\mathbf{s}_k = \lambda_k \mathbf{s}_k)) \\
 & \lambda_j(\mathbf{s}_j^T \mathbf{s}_k) = (\lambda_j \mathbf{s}_j)^T \mathbf{s}_k = (A \mathbf{s}_j)^T \mathbf{s}_k = \mathbf{s}_j^T A^T \mathbf{s}_k = \mathbf{s}_j^T A \mathbf{s}_k = \mathbf{s}_j^T \lambda_k \mathbf{s}_k = \lambda_k (\mathbf{s}_j^T \mathbf{s}_k) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow (\lambda_j - \lambda_k) \mathbf{s}_j^T \mathbf{s}_k = 0, \quad \lambda_j \neq \lambda_k \Rightarrow \mathbf{s}_j^T \mathbf{s}_k = 0 \Rightarrow \mathbf{s}_j \perp \mathbf{s}_k \quad \square
 \end{aligned}$$

Följd av lemma: (Specialfall av spektralsatsen)

Antag  $A$   $n \times n$  symmetrisk och har  $n$  olika egenvärden.

Då  $\exists S$  ortogonal och  $D$  diagonal s.a.  $A = SDS^T$ .

Bevis:

Antag  $\hat{\mathbf{s}}_1, \dots, \hat{\mathbf{s}}_n$  egenvektorer med egenvärden  $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_n$ .

Låt  $\mathbf{s}_j = \frac{\hat{\mathbf{s}}_j}{\|\hat{\mathbf{s}}_j\|} \Rightarrow \|\mathbf{s}_j\| = 1$ . (från lemma)

Då är  $\mathbf{s}_j$  egenvektor med egenvärde  $\lambda_j$ ,  $\|\mathbf{s}_j\|=1$  och  $\mathbf{s}_j \perp \mathbf{s}_k$ ,  $j \neq k$ .

Alltså,  $S = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \mathbf{s}_1 & \cdots & \mathbf{s}_n \\ 1 & & \end{bmatrix}$  ortogonal.

Låt  $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$ .

$A = SDS^{-1} = SDS^T$  ( $S$  ortogonal  $\Rightarrow S^{-1} = S^T$ )

Obs. "Omvändningen" till spektralsatsen:

Antag  $A$  har ON-bas av egenvektorer  $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n$ .

Då är  $A = SDS^{-1} = SDS^T$  ( $S$  och  $D$  som ovan)

$A^T = (SDS^T)^T = (S^T)^T D^T S^T = SDS^T = A \Rightarrow A$  symmetrisk  
\((AB)^T = B^T A^T) \((S^T)^T = S, D^T = D)

Ex. Låt  $A$  vara avb.matris till  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ortogonal projektion på planet  $\Pi = \{x+y+z=0\}$ . Visa att  $A$  är symmetrisk.

Välj  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$  vektorer av längd 1 s.a.  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \parallel \Pi$ ,  $\mathbf{s}_1 \perp \mathbf{s}_2$ ,  $\mathbf{s}_3 \perp \Pi$ .  
Då är  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$  ON-bas och  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$  egenvektorer med egenvärde 1 samt  $\mathbf{s}_3$  egenvektor med egenvärde 0.

Alltså,  $A$  symmetrisk.

Repetition:

- Tillräckliga villkor för A diagonalisierbar
- n olika egenvärden
- A symmetrisk (spektralsatsen)

Plan:

- Spår, determinant och egenvärden
- Tillämpningar

Egenvärden: (kap. 10.4)

Prop: (Sats 6 s. 25a)

Antag  $\mathbf{x}$  egenvektor till A med egenvärde  $\lambda$  och  $B = SAS^{-1}$ . Då är  $S\mathbf{x}$  också egenvektor till B med egenvärde  $\lambda$ . S inverterbar.

Bevis:

$$B(S\mathbf{x}) = SAS^{-1}(S\mathbf{x}) = SA\mathbf{x} = S\lambda\mathbf{x} = \lambda S\mathbf{x}$$

Alltså,  $S\mathbf{x}$  egenvektor till B med egenvärde  $\lambda$ ,  $S\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .  $\square$

Spår, determinantal och egenvärden:

Def: Spåret av  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$  är spår  $A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ .

Ex.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ . Spår  $A = 1 + 2 = \underline{\underline{3}}$

Sats: (Sats 7 s. 25a)

Antag A  $n \times n$  har n (reella) egenvärden  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Då är spår A =  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ .  
 $\text{Det } A = \lambda_1 \dots \lambda_n$ .

Ex.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ .  $\text{Det } A = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = -10 = (-2) \cdot 5$   
 $\text{Spår } A = 1 + 2 = 3 = -2 + 5$  ty egenvärden  $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 5$   
från tidigare föreläsning

Bevis:

Skriv  $p_A(\lambda)$  på två olika sätt. Identifiera koefficienter.

• Post.1:  $p_A(\lambda) = \lambda^n - (a_{11} + \dots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A$ .

Att konstanttermen är  $(-1)^n \det A$  inses genom att sätta  $\lambda=0$ .  
 $p_A(0) = \det(0 \cdot I - A) = \det(-A) = (-1)^n \det A$ .

Att koefficienten framför  $\lambda^{n-1}$  är -spårA visas med induktion.

• Bevis: Basfall:  $n=1 \Rightarrow A = [a] \Rightarrow p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det([\lambda - a]) = \lambda - a$

Induktionsantagande: Antag att påståendet är sant för  $A$   $p \times p$ .

Gäller påståendet för  $A$   $(p+1) \times (p+1)$ ?

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & \cdots & -a_{1(p+1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{(p+1)1} & \cdots & \lambda - a_{(p+1)(p+1)} \end{vmatrix} \stackrel{\text{utv. längs rad } p+1}{=} (-1)^{(p+1)(p+1)} (\lambda - a_{(p+1)(p+1)}) \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & \cdots & -a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{p1} & \cdots & \lambda - a_{pp} \end{vmatrix} \stackrel{\text{(Engre ordningens ternier)}}{=}$$

+ termer med grad =  $(-1)^{(p+1)(p+1)} (\lambda - a_{(p+1)(p+1)}) (\lambda^p - (a_{11} + \dots + a_{pp}) \lambda^{p-1}) + \text{lot} =$   
 högst  $p-2$  i  $\lambda$

$$= \lambda^{p+1} - (a_{11} + \dots + a_{pp} + a_{(p+1)(p+1)}) \lambda^p + \text{lot}$$

Alltså, koefficienten framför  $\lambda^{n-1}$  är -spårA.  $\square$

• Post.2:  $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) = \lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$

• Bevis:  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  nollställen till  $p_A(\lambda)$ . Faktorsatsen ger då  
 $p_A(\lambda) = C(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$ .

Koefficienten framför  $\lambda^n$ :  $p_A(\lambda)$  är 1  $\Rightarrow C=1$ .  $\square$

Identifiera koefficienten framför  $\lambda^{n-1}$ : spårA =  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$  (enl. post.1 och 2)

Identifiera koefficienten framför konstanttermen:  $\det A = \lambda_1 \dots \lambda_n$  ( $-11-$ )  $\square$

Föld: (del av Sats 5 s.258)

Antag  $A$   $n \times n$  har egenvärden  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Då  $A$  inv.bar  $\Leftrightarrow \lambda_i \neq 0, i=1, \dots, n$

Bevis:  $A$  inv.bar  $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \dots \lambda_n \neq 0 \Leftrightarrow \lambda_i \neq 0 \forall i$ .  $\square$

Ex. Antag  $A$   $2 \times 2$  har egenvärden  $-1$  och  $2$  och låt  $B = A^3 - 3A^2 + 2A$ . Avgör om  $B$  är inverterbar.

Strategi: Bestäm egenvärden för  $B$  och använd följdsets ovan.

$$\text{Om } A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}, \text{ är } B\mathbf{x} = (A^3 - 3A^2 + 2A)\mathbf{x} = A^3\mathbf{x} - 3A^2\mathbf{x} + 2A\mathbf{x} = \lambda^3\mathbf{x} - 3\lambda^2\mathbf{x} + 2\lambda\mathbf{x} = (\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda)\mathbf{x}$$

Alltså, om  $p(t) = t^3 - 3t^2 + 2t$ ;  $\mathbf{x}$  egenvektorer till  $B$  med egenvärde  $p(\lambda)$ .

$$\lambda = -1 \Rightarrow p(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 2(-1) = -6 \text{ egenvärde till } B$$

$$\lambda = 2 \Rightarrow p(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = 0 \text{ egenvärde till } B$$

Slutsats:  $-6, 0$  egenvärden till  $B \Rightarrow B$  ej inverterbar, ty  $0$  egenvärde.

Repetition:

-  $A = [\alpha_1 \dots \alpha_n]$ , spår  $A = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{nn}$ ,  $\det A = \alpha_{11}\alpha_{22}\dots\alpha_{nn}$

Plan:

- Vektorrum
- Definition
- Exempel
- Underrum

Vektorrum: (H1.1) (Holmåker, finns på kurshemsidan)Def. (Def. 1.1)

Ett vektorrum (eller linjärt rum) över  $\mathbb{R}$  (reellt vektorrum) är en icke-tom mängd  $V$  med operationer

i) Addition:  $\forall u, v \in V \exists! u+v \in V$

ii) Mult. m. skalär:  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in V \exists! \alpha v \in V$

och ett speciellt element  $\emptyset \in V$  (nollelementet/nollvektorn) som uppfyller ( $\forall u, v, w \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ )

Addition: 1)  $u+v=v+u$  (kommutativitet)  
2)  $(u+v)+w=u+(v+w)$  (associativitet)  
3)  $u+\emptyset=u$   
4)  $\exists (-u) \in V$  (additiv invers):  $u+(-u)=\emptyset$

Mult. m. skalär: 5)  $\alpha(\beta u)=(\alpha\beta)u$   
6)  $1u=u$

Addition + mult. m. skalär: 7)  $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$   
8)  $(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$ .

Elementen i  $V$  kallas vektorer. Elementen i  $\mathbb{R}$  kallas skalärer.

Anm. Associativitet ger att man kan skriva  $u+v+w$ .  
5) ger att man kan skriva  $\alpha\beta u$ .

Prop:

- i)  $0u=\emptyset \quad \forall u \in V$
- ii)  $\alpha\emptyset=\emptyset \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Bevis:

$$\begin{aligned} \text{i) } 0u &\stackrel{(3)}{=} 0u + \emptyset \stackrel{(4)}{=} 0u + u + (-u) \stackrel{(6)}{=} 0u + 1u + (-u) \stackrel{(2)}{=} (0+1)u + (-u) \stackrel{(1)}{=} 1u + (-u) \stackrel{(5)}{=} \\ &\stackrel{(6)}{=} u + (-u) \stackrel{(4)}{=} \emptyset \quad \square \end{aligned}$$

ii) Övning

Prop:

- i)  $\emptyset$  entydigt bestämd.
- ii)  $-u$  entydigt bestämd och  $-u = (-1)u$ .

Bevis: Övning

Anm. Vektorrum över  $\mathbb{C}, \mathbb{D}$  definieras analogt, men skalärerna tar värden i  $\mathbb{C}, \mathbb{D}$ .

Ex. på vektorrum:

- 1) Geometriska vektorer:  $\overset{\rightarrow}{u} \rightarrow \overset{\rightarrow}{u+v} \overset{\rightarrow}{\alpha u}$  } vektorrum över  $\mathbb{R}$
  - 2)  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$
  - 3)  $\mathbb{C}^n = \{(z_1, \dots, z_n), z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}\}$  (Addition:  $(z_1, \dots, z_n) + (w_1, \dots, w_n) = (z_1 + w_1, \dots, z_n + w_n)$  } vektorrum över  $\mathbb{C}$   
Mult m. skalär:  $\alpha(z_1, \dots, z_n) = (\alpha z_1, \dots, \alpha z_n), \alpha \in \mathbb{C}$
- Övning: Visa att räkneregler stämmer överens.  
 $(\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{C}^n$  vektorrum över  $\mathbb{R}$  ( $\mathbb{C}$  kan identifieras som  $\mathbb{R}^2$ ))  
Analogt:  $\mathbb{C}^n \sim \mathbb{R}^{2n}$ .

- 4)  $\{(m \times n)\text{-matriser}\}$

Addition och mult. m. skalär med matriser är överensstämmande  
 $\emptyset$ -nollmatrisen,  $-A = (-1)A$

- 5) Låt  $X$  vara en mängd och  $Y$  ett vektorrum över  $\mathbb{R}$ .  
Låt  $F(X, Y) = \{\text{funktioner från } X \text{ till } Y\}$

i) Addition:  $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

ii) Mult. m. skalär:  $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

} vektorrum över  $\mathbb{R}$   
(väldefinierat ty  $Y$   
vektorrum över  $\mathbb{R}$ )

Låt  $\mathbb{D}$  vara nollfunktionen.  $\mathbb{D}(x) = \mathbb{D}$  (noll i  $V$ )

Övning: Visa att räkneregler stämmer överens.

Underrum: (kap. 1.2 H)

Def. Ett underrum (delrum) till ett vektorrum  $V$  är en icketom delmängd  $M \subseteq V$  sådan att  $M$  är ett vektorrum m.a.p. operationerna på  $V$ .

Sats: (Sats 1.1 H)

Antag  $M$  icketom delmängd till  $V$ . Då är  $M$  underrum till  $V$  om

- i)  $u, v \in M \Rightarrow u+v \in M$
- ii)  $\alpha \in \mathbb{R}, u \in M \Rightarrow \alpha u \in M$

Alt. kan i), ii) ersättas med  $u, v \in M, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha u + \beta v \in M$

Anm.  $\mathbb{D} \in M$  om  $M$  underrum.

Ex.  $V$  vektorrum,  $M = \{\mathbb{D}\} \subseteq V$  underrum,  $V$  underrum till  $V$ .

Ex. Låt  $V$  vara geometriska vektorer i rummet.

Typiska underrum: linjer/plan genom origo

Ex.  $M = \{t(1, 2); t > 0\}$  ej underrum (ty ex.v.  $-1(1, 2) \notin M$ ).

Ex.  $A$  ( $m \times n$ )-matris.  $N_{\mathbb{D}} A = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax = \mathbb{D}\} \subseteq \mathbb{R}^n$  underrum.  
 $KolonnA = \text{span}(a_1, \dots, a_n) \subseteq \mathbb{R}^m$  underrum.

Ex. Antag  $\lambda$  egenvärde till  $A$   $n \times n$ . Då är  $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax = \lambda x\}$  underrum till  $\mathbb{R}^n$ , kallas egenrum.

Ex.  $V = \{(m \times n)\text{-matriser}\}$ . Avgör om följande mängder är underrum.

- a)  $\{\text{symmetriska matriser}\}$
- b)  $\{\text{inverterbara matriser}\}$

a) Vill visa att om  $A, B$  är symmetriska, är  $\alpha A + \beta B$  symmetrisk.

$$(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T = \alpha A + \beta B \quad \square \text{ Underrum!}$$

b) Ej underrum ty  $\mathbb{D}$  ej inverterbar

$\{\text{inv.bara matriser}\} \cup \{\mathbb{D}\}$  ej underrum heller

Ex. Funktionsrum. Låt  $V = F(\mathbb{R}) = \{\text{funktioner } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$  (Ex. 1.5 H)

Underrum:  $C(\mathbb{R}) = \{\text{kontinuerliga funktioner } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$

$C^\infty(\mathbb{R}) = \{\text{glatta funktioner } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\} =$   
 $= \{\text{funktioner med kontinuerliga derivator av alla ordningar}\}$

$P = \{\text{polynom på } \mathbb{R}\}$

$P_n = \{\text{polynom av grad } n \text{ på } \mathbb{R}\}$

Ex. Avgör om  $M = \{\text{polynom av grad } n\}$  är ett underrum till  $V$ .

$\emptyset \notin M$ , alltså ej underrum.

Ex.  $M = \{\text{växande funktioner } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ .

Ej underrum, ty  $-f$  där  $f(x) = x$ .

Repetition:

- Allmänna vektorrum  $V = \emptyset$
- Definition
- Exempel (geometriska vektorer,  $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \{(m \times n)\text{-matriser}\}, F(X, Y)$ )
- Räkneregler (add. och mult. m. skalar)
- Underrum

---

Plan:

- Linj. ber./ober., bas, dimension etc.
- Linj. avbildningar

Linj. ber./ober., bas, dimension etc: (H 1.3)

Def.  $V$  vektorrum över  $\mathbb{R}$

- $v \in V$  linjärkombination är  $u_1, \dots, u_p \in V$  om  $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$  så att  $v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p$ .
- $S \subset V$  (ej nödvändigtvis ändlig)  $\Rightarrow \text{span } S = \{\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p, \alpha_j \in \mathbb{R}, u_j \in S\}$ .
- $S$  spänner upp  $\text{span } S$ .
- $u_1, \dots, u_p$  linjärt oberoende om  $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p = 0$  endast har den triviala lösningen  $\alpha_1, \dots, \alpha_p = 0$ . Annars  $u_1, \dots, u_p$  linjärt beroende.
- $S$  delmängd av  $V$  linjärt oberoende om varje ändlig delmängd av  $S$  är linjärt oberoende.
- $S$  delmängd av  $V$  är en bas om
  - $S$  spänner upp  $V$ .
  - $S$  linjärt beroende.  
 $\Leftrightarrow \forall v \in V$  har en entydig bestämd framställning  
 $v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p, \alpha_j \in \mathbb{R}, u_j \in S$ .
- Dimensionen av  $V$ ,  
 $\dim V = \begin{cases} n & \text{om } \exists \text{ bas med } n \text{ element} \\ \infty & \text{om } \exists \text{ bas med ändligt många element} \end{cases}$

Anm. Överensstämmar för vektorrum över  $\mathbb{C}$ .

Obs. Linjärkombinationer ändliga, ty det är ej självtäckt att oändliga linjärkombinationer tillhör vektorrummet.

- Ex.  $V = \{\text{geometriska vektorer i rummet}\}$ .  $\dim V = 3$ , ty bas 3 linj. obero. vekt.
- Ex.  $\mathbb{R}^n$ . Bas:  $e_j = (0, \dots, \underset{(plats j)}{1}, \dots, 0)$ ,  $j = 1, \dots, n$ .  $\dim \mathbb{R}^n = n$ .
- Ex.  $\mathbb{C}$  vektorrum över  $\mathbb{R}$ . Bas:  $1, i$ .  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ .
- Ex.  $\mathbb{C}$  vektorrum över  $\mathbb{C}$ . Bas:  $1$ .  $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ .
- Ex.  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$ .  $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n$
- Ex.  $V = \{(m \times n)\text{-matriser}\}$ . Bas:  $e_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  (plats  $ij$ ).  $\dim V = mn$ .
- Ex.  $P_n = \{\text{polynom av grad } \leq n\}$ . Bas:  $1, x, \dots, x^n$ , eller  $1, (1-x), \dots, (1-x)^n$  etc.
- Övn. Visa att ovanstående är en bas.  $\dim P_n = n+1$
- Ex.  $P = \{\text{polynom}\}$ . Bas:  $1, x, x^2, \dots$ .  $\dim P = \infty$ .

### Linjära avbildningar: (H3)

Avbildningen mellan vektorrum som respekterar vektorrumssstruktur.

Def.  $U, V$  vektorrum över  $\mathbb{R}$ . Då är  $f: U \rightarrow V$  linjär om  
 $\left. \begin{array}{l} f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2), \forall u_1, u_2 \in U \\ f(\alpha u) = \alpha f(u), \forall u \in U, \alpha \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \begin{array}{l} f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) \\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \forall u_1, u_2 \in U. \end{array}$

Obs.  $f(\emptyset) = \emptyset$  om  $f$  linjär.

Ex. Geometriska linj. avb.: ortogonal proj., spiegling, rotation etc.

Ex.  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$  ( $A$   $m \times n$ )

Ex. Derivering:

$D: C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $g(x) \mapsto g'(x)$  = {öändligt många gånger deriverbara funktioner}

Övn. Visa att  $D$  är linjär (m.h.a. räkneregler för derivata).

(Nollrum, egenvektorer, -värden etc. kan definieras enligt tidigare)

• Noll( $D$ ) =  $\{g \in C^\infty(\mathbb{R}): g'(x) = 0\}$  = {konstanta funktioner}

• Egenvektorer:  $g$  egenvektor (egenfunktion) om  $Dg = \alpha g$  för något  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  $\alpha$  egenvärde.  $g \neq \emptyset$ .

•  $g'(x) = \alpha g(x) \Rightarrow g(x) = \beta e^{\alpha x}$ ,  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ( $\alpha$  fixt) egenfunktion till  $D$  med egenvärde  $\alpha$ .  
 (Obs. öändligt många egenvärden)

Ex.  $P(D) = 1 - 3D + D^2$ .  $P(D)(g) = g - 3g' + g''$ .  $\text{Ncl}(P(D)(g)) = \{g - 3g' + g'' = 0\}$ .

Ex. Låt  $C[a, b] = \{\text{kontinuerliga funktioner } [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\}$ .

$F_1: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ ,  $g(x) \mapsto \int_a^x g(t) dt$  (linjär pga. egenskaper hos integralen)

$F_2: C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) \mapsto \int_a^b g(x) dx$  (-11-)

Anm. En linjär avbildning mellan funktionsrum kallas operator, ex.v.  $F_1$ .

En linjär avbildning från  $V$  till  $\mathbb{R}$  kallas funktional, ex.v.  $F_2$ .

### Repetition:

- Linj. komba., linj. ber./ober., etc.
- Dimension = # element i bas
- Linj. avb. (Ex.  $D: C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $C[a,b] \rightarrow C[a,b]$ )

### Plan:

- Skalärprodukt  $\langle u, v \rangle \in \mathbb{R}$ 
  - Norm  $\|u\|$
  - $u \perp v$

### Skalärprodukt:

#### Def. (Def. 2.1 H)

•  $V$  vektorrum över  $\mathbb{R}$ . En skalärprodukt (inre produkt) på  $V$  är en funktion  $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$  ( $u \cdot v$ ) som är  
(Kartesisk produkt  $\{(u, v), u, v \in V\}$ )

i) symmetrisk, d.v.s.  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ .

ii) linjär i första variabeln, d.v.s.  $\langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle$ ,  $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$   
alt.  $\langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v \rangle = \alpha_1 \langle u_1, v \rangle + \alpha_2 \langle u_2, v \rangle$ .

iii) positivt definit, d.v.s.  $\langle u, v \rangle \geq 0$ ,  $\langle u, u \rangle = 0$  om  $u = \mathbf{0}$ .

• Ett vektorrum med en skalärprodukt är ett inre produktrum.

Obs. i), ii)  $\Rightarrow$  linjär i andra variabeln.

Ex. Geometriska vektorer:  $u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos \theta$



Ex.  $\mathbb{R}^n$ :  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

Ex. Antag  $A$   $n \times n$ , symmetrisk, positivt definit, d.v.s.  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \geq 0$   
 $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 0$  om  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Påst:  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$  skalärprodukt på  $\mathbb{R}^n$ .

i)  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{y}^T A \mathbf{x} = (\mathbf{y}^T A \mathbf{x})^T = \mathbf{x}^T A^T (\mathbf{y}^T)^T = \mathbf{x}^T A \mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  (symmetrisk)  
( $\mathbf{y}^T A \mathbf{x}$  täl,  $1 \times 1$ -matris symmetrisk)

ii) Övn: Använd räkneregler för matriser.

iii) Följer eftersom  $A$  positivt definit.

Ex. I positivt definit och symmetrisk.  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T I \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$

Ex.  $C[a,b] = \{\text{kontinuerliga funktioner } [a,b] \rightarrow \mathbb{R}\}$

Påst:  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$ .

i)  $f(x)g(x) = g(x)f(x)$  (symmetrisk).

ii) Följer från räknergler för integraler.

iii)  $\langle f, f \rangle = \int_a^b (f(x))^2 dx \geq 0$ , likhet om  $f(x)=0$  på  $[a,b]$  (positivt definit).

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  på  $V \Rightarrow$  längd eller norm till av  $u \in V$ .

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \quad \text{Obs. } \|u\|=0 \text{ om } u=\emptyset.$$

• ortogonalitet.

$u$  och  $v$  sägs vara ortogonala om  $\langle u, v \rangle = 0$ .

Ex. på  $\mathbb{R}^n$ :  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

Ex.  $C[a,b]$ :  $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 dx}$

Ex.  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 2x-1$ ,  $p_3 = 6x^2 - 6x + 1 \in C[0,1]$ . Visa parvis ortogonalitet.

$$\langle p_1, p_2 \rangle = \int_0^1 p_1(x)p_2(x)dx = \int_0^1 1(2x-1)dx = [x^2 - x]_0^1 = 1 - 1 - 0 + 0 = 0 \quad (p_1 \perp p_2)$$

$$\langle p_1, p_3 \rangle = \int_0^1 p_1(x)p_3(x)dx = \int_0^1 1(6x^2 - 6x + 1)dx = [2x^3 - 3x^2 + x]_0^1 = 0 \quad (p_1 \perp p_3)$$

$\langle p_2, p_3 \rangle$  övn.

( $p_1, p_2, p_3$  skiftande Legendre-polynom, ex. på ortogonala polynom)

Ex. 1,  $\sin(nx)$ ,  $\cos(nx)$ ,  $n=1, 2, \dots$  ortogonala på  $C[-\pi, \pi]$  övn.

Sats: (Sats 2.4 H)

$V$  vektorrum,  $0 < \dim V < \infty \Rightarrow V$  har en ON-bas.

Bevis: Gram-Schmidtts metod: Tag bas  $v_1, \dots, v_n$  för  $V$  ( $n = \dim V$ ). Bygg upp ON-bas från v.

$$1) e'_1 = v_1$$



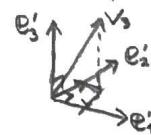
$$2) e'_2 = v_2 - \text{proj}_{e'_1}(v_2)$$

$$(v_2 = v_2'' + v_2^\perp \Rightarrow v_2'' = \text{proj}_{e'_1}(v_2) = \frac{\langle v_2, e'_1 \rangle}{\|e'_1\|} e'_1)$$

(proj. formeln)

$$3) e'_3 = v_3 - \text{proj}_{e'_1}(v_3) - \text{proj}_{e'_2}(v_3) \text{ osv...}$$

$\Rightarrow e'_1, \dots, e'_n$  ON-bas



Ex, Låt  $v_1 = 1$ ,  $v_2 = x$  i  $C[0, 1]$

Hitta ON-bas med Gram-Schmidt's metod:

$$\|v_1\| = \sqrt{\int_0^1 (v_1)^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 1 dx} = 1$$

$$\text{proj}_{v_1}(x) = \frac{\langle x, v_1 \rangle}{\|v_1\|} v_1 = \langle x, v_1 \rangle v_1$$

$$\langle x, v_1 \rangle = \langle x, 1 \rangle = \int_0^1 (x \cdot 1) dx = \int_0^1 x dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$v_2' = v_2 - \text{proj}_{v_1}(v_2) = v_2 - \langle v_2, v_1 \rangle v_1 = x - \frac{1}{2}$$

## Plan: Repetition

- Vektorer/vektorrumbegrepp

Geometri

- Matriser och linjära ekvationssystem
  - Linjära avbildningar
  - Determinanter
  - Komplexa tal
- 

## Vektorer och vektorrum:

Def. • Geometriska vektorer: på linjen / i planet / i rummet.

$\mathbb{R}^n$ :  $\{a = (a_1, \dots, a_n), a_i \in \mathbb{R}\}$

• Vektorrum: mängd  $\neq \emptyset$   
addition, mult. m. skalär + räkneregler

Ex.  $\mathbb{C}^n$ ,  $\{(m \times n)\text{-matriser}\}$ ,  $C(\mathbb{R}) = \{\text{kont. funktioner } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ ,  
 $P_n = \{\text{polynom av grad } \leq n\}$

Operationer:

- Addition
  - Mult. m. skalär
  - Skalärprodukt  $u \cdot v$ ,  $\langle u, v \rangle \rightarrow$  innre produktrum
  - Kryssprodukt (vektorprodukt)  $u \times v$
- OBS.  $u \times v = -v \times u$   
 $(u \times v) \times w \neq u \times (v \times w)$  i allmänhet

## Viktiga begrepp:

- Linjärkombination
- Linjärt beroende/oberoende
- Spänner upp
- Bas
- Dimension (# element i bas)

- Underrum
- Koordinater
- Orthogonalitet  $u \perp v$  om  $u \cdot v = 0$
- (H)ON-bas

## Typiska uppgifter:

- Räkning m. vektorer: ex.v. tyngdpunktsformeln, skalär-/kryssprodukt
- Avgör om mängd vektorer i  $V$  linjärt (o)beroende/spänner upp  $V$ /bas för  $V$ .
- Avgör om en mängd är vektorrum/underrum/innre produktrum.
- Bestäm dimensionen för  $V$

- Bestäm koordinater för vektor.
- Hitta (H)ON-bas med särskilda egenskaper.

### Geometri:

#### Viktiga begrepp/resultat:

- Koordinatsystem (origo, bas)
- Linjer: - parametrisering  $\ell = P + t\mathbf{v}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $P$  punkt på  $\ell$ ,  $\mathbf{v}$  rikningsvektor  
- linjens ekvation  $\ell = \{ax + by = c\}$ ,  $(a, b)$  normalvektor
- Plan: - parametrisering  $\Pi = P + t\mathbf{v} + s\mathbf{w}$ ,  $s, t \in \mathbb{R}$   
- planets ekvation  $\Pi = \{ax + by + cz = d\}$   $(a, b, c)$  normalvektor
- Geometrisk tolkning av lösning till ekvat. system (punkter/linjer/plan)
- Orthogonal projektion på vektor, linje, plan genom origo
- Spegling i linje/plan genom origo
- Avstånd mellan punkter/linjer/plan
- Orientering
- Geometrisk tolkning av
  - kryssprodukt  $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \text{area av parallelogram}$
  - skalar trippelprodukt  $(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_3 = \pm \text{volym av parallelepiped}$

#### Typiska uppgifter:

- Beskriv lösningar till ekvat. system
- Bestäm skärningen mellan linjer/plan
- Bestäm ekvation för linje/plan
- Avgör om linjer/plan parallella/skär
- Beräkna arean av triangel / parallelogram, volymen av teträeder / parallelepiped
- $\text{Vol}(\Delta) = \frac{1}{2} \text{Vol}(\square)$ ,  $\text{Vol}(\leftrightarrow) = \frac{1}{6} \text{Vol}(\blacksquare)$

## Matriser och linjära ekvationssystem:

Def. matris typ  $m \times n$   $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

Operationer: - addition  
- mult. m. skalar  
- multiplikation  $((m \times n) \cdot (n \times p))$  OBS.  $BA \neq AB$  i allmänhet

## Viktiga exempel/begrepp/resultat:

•  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  enhetsmatrisen,  $\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$  nollmatrisen

$\begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$  uppåt triangulär,  $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & \lambda_n \end{bmatrix}$  nedåt triangulär

•  $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$  transponat, symmetrisk om  $A^T = A$

• V vänsterinvers om  $VA = I$ , H högerinvers om  $AH = I$

$A^{-1}$  invers om  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ .

• A ortogonal om kolonner ON-bas  $\Leftrightarrow A^T = A^{-1}$

•  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  egenvektor med egenvärde  $\lambda$  om  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$

• A diagonalisierbar om  $A = SDS^{-1}$ , S inverterbar, D diagonal

• Spektralsatsen: A symmetrisk  $\Rightarrow$  A diagonalisierbar

• Spår A =  $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$

• Adj A matriselementen underdeterminanter

## Linjära ekvationssystem:

$$x_1a_{11} + \dots + x_na_{nn} = b \Leftrightarrow Ax = b \text{ där } A = \begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Homogen om  $b = \mathbf{0}$ :

- 0n eller  $\infty$  lösningar

-  $\text{Nul}(A) = \{\mathbf{x}, Ax = \mathbf{0}\}$

-  $\dim(\text{Nul}(A)) = n - \text{dimension}$

Inhomogen om  $b \neq 0$ :

- inga, en eller  $\infty$  lösningar
- lösbart om  $b \in \text{kolonn } A = \text{span}(a_1, \dots, a_n)$
- $\dim(\text{kolonn } A) = \text{rang } A$
- lösning  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$  — (lösning till  $A\mathbf{x} = 0$ )  
(partikulär lösning)

Lösa  $A\mathbf{x} = b$ :

• Gaußeliminering:  $A \xrightarrow[\text{radop.}]{\text{elem.}} T$  (trappformat elev.syst.)

$$\begin{aligned}\text{Rang } A &= \# \text{ pivotelement i } T \\ \text{Nolldim } A &= n - \# \text{ pivotelement i } T\end{aligned}$$

•  $\mathbf{x} = A^{-1}b$

• Cramers regel: Lösning i termier av determinanter

• Minsta kvadratmetoden: Approximativ lösning som minimisar  $|A\mathbf{x} - b|$ , Lös  $A^T A \mathbf{x} = A^T b$ .

Typiska uppgifter:

- Lösa ekvationssystemet.
- Hitta minsta kvadratlösning.
- Lösa  $A \mathbf{x} = b$ .
- Hitta vänster-/högerinvers om de existerar.
- Beräkna  $A^{-1}$  / avgör om  $A$  är inverterbar.
- Bestäm  $\text{noll } A$ , kolonn  $A$ , nolldim  $A$ , rang  $A$ .
- Bestäm egenvärden och egenvektorer.
- Avgör om  $A$  är orthogonal, symmetrisk, diagonalisabel.
- Diagonalisera  $A$ .

Linjära avbildningar:

Def.  $f: U \rightarrow V$  linjär om  $f(\lambda \mathbf{x} + \lambda' \mathbf{x}') = \lambda f(\mathbf{x}) + \lambda' f(\mathbf{x}')$

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  linjär om  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$

•  $f$  isometri om  $|f(x)| = |x| \Leftrightarrow A$  ortogonal

•  $f_A, f_B$  linjära  $\Rightarrow f_A \circ f_B$  linjär med matris  $AB$

$$f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$$

$$\text{Vol}(f_A(S)) = \pm \det A \cdot \text{Vol}(S)$$

$x \in D$  egenvektor med egenvärde  $\lambda$  om  $f(x) = \lambda x$

### Viktiga exempel:

- Skalning, ortogonal projektion, spegling, rotation etc.
- Derivering
- Integration

### Typiska uppgifter:

- Avgör om avbildningen är linjär.
- Bestäm  $A = \begin{bmatrix} f(e_1) & \dots & f(e_n) \end{bmatrix}$ .
- Bestäm egenvärden, -vektorer.
- Avgör om  $f$  är injektiv, surjektiv, bijektiv, isometri.
- Bestäm  $f^{-1}$ .
- Bestäm arean/volymen av  $f_A(T)$ .

### Determinanter:

$$\text{Def. } \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{1p_1} \dots a_{np_n}$$

Geometrisk tolkning:  
-  $\pm$  Volymen som vektorerna spänner upp  
-  $\pm$  Volymförändring under  $f_A$

Egenskaper:  $\det A^T = \det A$

1) Linjär i rad/kolumn

2) Alternerande i rader/kolonner

3)  $\det I = 1$

1) och 2)  $\Rightarrow$  Om 2 rader/kolonner lika  $\Rightarrow \det A = 0$

1), 2), 3)  $\Rightarrow \det AB = \det A \cdot \det B$   
 $\Rightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow A$  inverterbar

## Viktiga begrepp:

- Underdeterminant
- Adjunkt
- Karaktteristiska polynomet  $\det(\lambda I - A)$

## Beräkna determinanter:

- $n \leq 3$ : Sarrus regel
- elementära radoperationer  $\rightarrow$  förenkling
- Utveckling längs rad/kolumn

## Typiska uppgifter:

- Beräkna determinanter.
- Använda determinanter. (Avgör om  $A$  inv. bar, avgör om vektorer linj. ber., beräkna  $A^{-1}$  mha adj, beräkna area/volym, hitta egenvärden)

Samband:  $A mxn$

- $n \leq m$  •  $f_A$  injektiv  $\Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  högst en lösning  $\Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  endast trivial lösning  $\Leftrightarrow N\mathbf{c}\mathbf{l}\mathbf{A} = \{\mathbf{0}\}$   $\Leftrightarrow \text{nolldim } A = 0 \Leftrightarrow A$  har vänsterinvers  $\Leftrightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_n$  linj. obero.
- $n \geq m$  •  $f_A$  surjektiv  $\Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  lösbar  $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \Leftrightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_n$  spänner upp  $\mathbb{R}^m \Leftrightarrow \text{Kol}\mathbf{c}\mathbf{m}\mathbf{A} = \mathbb{R}^m \Leftrightarrow \text{rang } A = m \Leftrightarrow A$  har högerinvers
- $m = n$  •  $f_A$  bijektiv  $\Leftrightarrow A$  inverterbar  $\Leftrightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_n$  bas för  $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \det A \neq 0$

## Komplexa tal:

$$z = x + iy = re^{i\theta}, \quad \Theta = \arg z, \quad r = |z|$$

Operationer: Addition, multiplikation

Exponentialfunktionen:  $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$

Polynomekvationer:  $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = 0$

Lös  $p(z) = 0$ :

- p grad 2  $\rightarrow z^2 = c$
- p binom  $\rightarrow z^m = a$
- p högre grad  $\rightarrow$  reduktion till  $z^m = a$

## Typiska uppgifter:

- Lösa  $p(z) = 0$
- Skriv  $p(z) = c(z - \alpha_1) \dots (z - \alpha_n)$
- # lösningar (komplexa/reella)
- Relatera till linjära avbildningar  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Tenta 22/08-22:

1.a) Beräkna

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 8 & -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{R}_1 \leftrightarrow \text{R}_4} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & -8 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 4 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{R}_2 \leftrightarrow \text{R}_3} = 1 \cdot (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -3 & -8 & 3 \\ 4 & -4 & 4 \end{vmatrix} = -(64 + 0 + 24 - 64 - 24 + 0) = \underline{-128}$$

(utv. längs kolonn 4)  
(Sarrus regel)

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \underline{0} \quad (\text{ty rad 1 och 3 lika})$$

b) Bestäm ett egenvärde till

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 0 & 1 \\ 8 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Notera } A_2 = A_1 + 2I. \\ \det A_2 = \det(A_1 + 2I) = 0 \\ \Rightarrow \text{egenvärde } \lambda = \underline{-2} \end{array}$$

2. Låt  $K$  vara kuben med hörn i  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$  och  $\mathcal{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  den linjära avbildning som avbildar  $p_1 \mapsto p_2$ ,  $p_2 \mapsto p_3$ ,  $p_3 \mapsto p_4$ ,  
 $p_4 = (1, 1, 1)$ ,  $p_5 = (1, -1, 1)$ ,  $p_6 = (1, -1, -1)$ ,  $p_7 = (-1, 1, 1)$ ,  
 $p_8 = (-1, -1, 1)$ ,  $p_9 = (-1, -1, -1)$ .

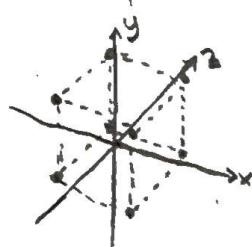
a) Vad är volymen av  $K$ ?

$\text{Vol}(K)$  är volymen av en kub med sidolängd  $K \Rightarrow \text{Vol}(K) = \underline{8}$ .

Algebraiskt:  $K$  är en parallelepiped som spänns upp av

$$p_5 - p_7 = (2, 0, 0), \quad p_6 - p_7 = (0, 0, 2), \quad p_8 - p_7 = (0, 2, 0).$$

$$\text{Vol}(K) = \left| \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \right| = |8| = \underline{8}$$



b) Bestäm avbildningsmatrisen för  $\mathcal{f}$ .

$$A \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{0}_{p_1} & \mathbf{0}_{p_2} & \mathbf{0}_{p_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{0}_{p_2} & \mathbf{0}_{p_3} & \mathbf{0}_{p_4} \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{0}_{p_2} & \mathbf{0}_{p_3} & \mathbf{0}_{p_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{0}_{p_1} & \mathbf{0}_{p_2} & \mathbf{0}_{p_3} \end{bmatrix}^{-1}$$

Bestäm inversen av vektor matrisen

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-1} \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{2}} \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{2}} \sim$$

$$\sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}} \sim \frac{1}{2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \frac{1}{2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{array} \right] \text{ inversen}$$

$$A = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{array} \right] \cdot \frac{1}{2} \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{array} \right] = \underline{\underline{\left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right]}} \text{ Avbildningsmatrisen}$$

- c) Beskriv bilden  $\mathcal{F}(K)$  av  $K$ . Bestäm  $\mathcal{F}(p_i)$  för  $p_4, \dots, p_8$ .  
Bestäm volymen av  $\mathcal{F}(K)$ .

$$\mathcal{F}(p_i) = A \begin{bmatrix} 0 \\ p_i \end{bmatrix} \Rightarrow p_4 \mapsto p_1, p_5 \mapsto p_6, \dots, p_8 \mapsto p_5$$

$$\text{Vol}(\mathcal{F}(K)) = |\det A \cdot \text{Vol}(K)| = |1 \cdot 8| = \underline{\underline{8}}$$

3. Låt  $P_3$  vara mängden av alla polynom av grad högst 3 och  $D: P_3 \rightarrow P_3$ ,  $p \mapsto p'$ . Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till  $D$ .

$$D(p) = \lambda p \quad (p \neq 0) \Rightarrow \lambda \text{ egenvärde}, p \text{ egenvektor}$$

$$p = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow D(p) = 3ax^2 + 2bx + c = \lambda(ax^3 + bx^2 + cx + d)$$

$$\begin{aligned} x^3: \lambda a = 0 \\ x^2: \lambda b = 3a \\ x: \lambda c = 2b \\ 1: \lambda d = c \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=0 \end{cases} \quad (\lambda \neq 0) \quad \text{eller} \quad \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=t \end{cases} \quad (\lambda=0)$$

$$\begin{aligned} \lambda \neq 0 \Rightarrow p = 0 \quad (\text{giltigt}) \\ \lambda = 0 \Rightarrow p = t(0, 0, 0, 1) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{O egenvärde med egenvektorer } t(0, 0, 0, 1), t \neq 0. \end{array} \right.$$