Fö 1

- linjära ekvationssystem
- geometri
  - vektorer
  - linjer och plan
  - geometri i $\mathbb{R}^n$
- matriser
  - linjära avbildningar
  - determinanter
- komplexa tal

Linjära ekvationssystem

Def: En linjär ekvation är på formen

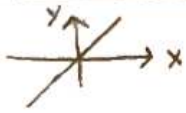
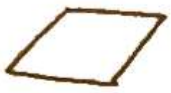
$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$

där

a_1, a_n, b reella tal

- $x_1, \dots, x_n$ kallas variabler/obekanta
- $a_1, \dots, a_n$ kallas koefficienter

ex:

Ekvation	Linjära?	#Variabler (antal)	Lösningsmängd
$y = x$	ja	2	
$x_1 = 3$	ja	1	
$xy = 1$	nej	2	
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9$	nej	3	
$-x + 3y + 11z = 3$	ja	3	

Lösningsmängden till en linjär ekvation är "linjär"

ex: punkt, linje, plan

Def: Ett <u>linjärt ekvationssystem</u> är en samling linjära ekvationer (i samma variabel)

Ex: $(*)\begin{cases} y = x \\ y = kx + m \end{cases}$

- Algebraiskt:
  (x, y) lösning till $(*)$ om (x, y) löser båda ekvationerna.
- Geometriskt:
  (x, y) ligger på båda linjerna

<u>Antalet lösningar till (x):</u>

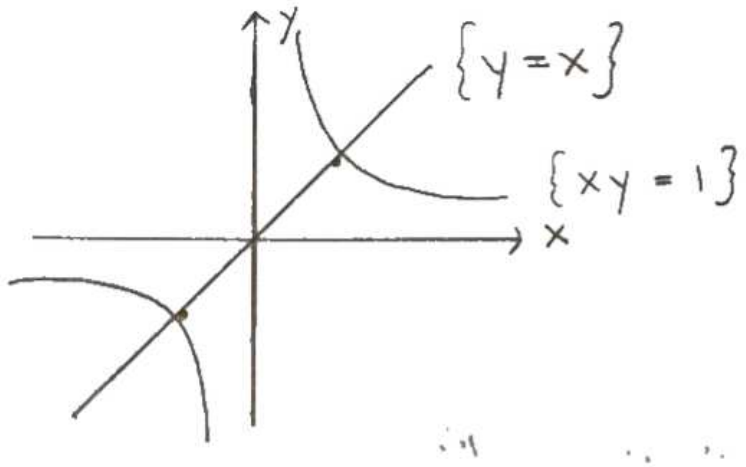
Fall	# lösningar	geometriskt
$k \neq 1$	1	linjer olika lutning
$k = 1$, $m \neq 0$, $(*)\begin{cases} y = x \\ y = x + m \end{cases}$	inga	parallella
$k = 1$, $m = 0$, $(*)\begin{cases} y = x \\ y = x \end{cases}$	∞ många	linjerna sammanfaller

Påstående: Ett linjärt ekvationssystem

- saknar lösning
- har 1 unik lösning
- har ∞ många lösningar

- Hur många lösningar har $\begin{cases} y = x \\ xy = 1 \end{cases}$?

Svar: 2



Lösa linjära ekvationssystem

Ex: Lös $\begin{cases} 2y - 8z = 8 \\ x - 2y + z = 0 \\ -4x + 5y + 9z = -9 \end{cases}$

Idé:

Steg 1: Eliminera x från alla ekv. utom en.

- För att få x i första ekv., byt plats:

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 & \text{I} \\ 2y - 8z = 8 & \text{II} \cdot \tfrac{1}{2} \\ -4x + 5y + 9z = -9 & \text{III} \end{cases} \quad 4$$

För att eliminera x:

tag $4 \cdot$ I och lägg till III

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 & \text{I} \\ \quad y - 4z = 4 & \text{II}' \\ \quad -3y + 13z = -9 & \text{III}' \end{cases}$$

3

Förenkla II genom att multiplicera med $\frac{1}{2}$

Steg 2: Eliminera y från sista ekv.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 & \text{I} \\ \quad y - 4z = 4 & \text{II}' \\ \quad\quad z = 3 & \text{III}'' \end{cases}$$

$\text{III}'' \iff z = 3$

$\text{II}' \iff y - 12 = 4 \iff y = 16$

$\text{I} \iff x - 32 + 3 = 0 \iff x = 29$

Alltså (**) och därmed (*) har

$$\begin{cases} x = 29 \\ y = 16 \\ z = 3 \end{cases}$$

<u>Formalisera detta:</u>

<u>Def:</u> Operationerna

1.) Byt ordning på ekvationerna
2) Multiplicera en ekv. med tal $\neq 0$
3) Addition av tal · ekvation till en annan ekv.

Kallas <u>elementära radoperationen</u>

Sats (sats 1, s. 9)

Om det linjära ekvationssystemet (**) fås genom att utföra elementära radoperationer på (*), så har (*) och (**) samma lösningar.

Bevis

Klart att 1) inte förändrar lösningsmängden.
Klart att 2) inte förändrar lösningsmängden.
Kolla 3):
Antag $x = (x_1, \dots, x_n)$ uppfyller

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b & \text{I} \\ c_1x_1 + \dots + c_nx_n = d & \text{II} \end{cases}$$

Då gäller $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + k(c_1x_1 + \dots + c_nx_n) = b + kd$
dvs x uppfyller ekv. $\text{I} + k\,\text{II}$
dvs om x uppfyller (*) så uppfyller x ekv.syst.

$$(**)\begin{cases} \text{I} \\ \text{I} + k\,\text{II} \end{cases}$$

omvänt om x uppfyller (**) så uppfyller det också

$$\begin{cases} \text{II} \\ \text{I} + k\,\text{II} - k\,\text{II} = I \end{cases}$$

dvs (*)
Alltså (*) och (**) har samma lösningar.
$(*) \Leftrightarrow (**)$ $\square$

Def: Givet ett linjärt ekvationssystem (*), sätt en ring runt den första noll-skilda koeff. i varje rad. (*) är trappformat om varje ring är till höger om ringarna i raderna ovanför.
Elementen med ringar kallas pivotelement

Ex: $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y = 7 \\ z = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x + z = 5 \\ z = 0 \\ y = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x + 11z = 0 \\ 2z = 3 \\ 3z = 7 \end{cases}$

trappformat ej trappformat ej trappformat

Gausselim.:
(*) Elementära radoperationer $\rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow$ (**) trappformat, lättare att lösa

Lösa trappformat ekv. system
- Lösning saknas omm finns rad med VL = 0, HL ≠ 0

Ex: $\begin{cases} x + 11z = 0 \\ 2z = 3 \\ 0 = 2{,}5 \end{cases}$ - Lösning saknas

- Obs, varje kolumn motsvarar en variabel
- Varje element som saknar pivotelement motsvarar en fri variabel, välj som parameter
- Varje ekvation uttrycker en pivotvariabel i termer av fria variabler.

Ex:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \dots + x_5 = -1 & \text{I} \\ x_3 = 7 & \text{II} \\ x_4 - x_5 = 0 & \text{III} \end{cases}$$

x_2, x_5 "fria"

sätt $x_2 = s$, $s \in \mathbb{R}$

$x_5 = t$, $t \in \mathbb{R}$

lösningar:
$$\begin{cases} x_1 = -2s - t - 1 & \text{I} \\ x_2 = s \\ x_3 = 7 & \text{II} \\ x_4 = t & \text{III} \\ x_5 = t \end{cases}$$

Fö 2

Rep

- def. linjära ekvationssystem
- # lösningar : 0, 1, ∞
- lös linj. ekv.syst. (*) med Gauseliminering

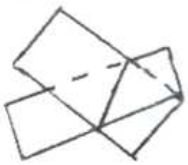
① (*) $\xrightarrow[\text{radoperation}]{\text{elementära}}$ (**) trappformat

② Lös (**) : icke pivot-variabler fria, välj som parameter pivot-variabler bestäms av ekv. i (**).

Under- /överbestämda ekv.system

Def: · Ett ekvationssystem med färre ekv. än variabler kallas underbestämt.

· Ett ekvationssystem med fler ekv. än variabler kallas överbestämt.

Ekv.system	Typiskt exempel	# lösningar
Underbestämt	2 ekv. 3 variabler  2 plan i rummet	∞ i allmänhet 0, ex: parallella plan
Överbestämt	3 ekv. 2 variabel  3 linjer i planet	0 i allmänhet 1, ∞ } undantagsfall ex: ✗ //
Kvadratiskt	2 ekv. 2 variabler 	0 ex: // 1 i allmänhet ∞ ex: /

Vektorer:

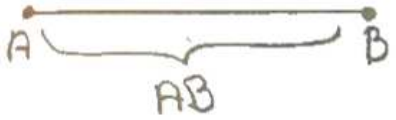
Plan: - definition
- räkneregler

Mycket begrepp!
- geometrisk storhet med storlek och riktning ↗

ex: Hastighet, acceleration, kraft
Jämför med skalärer, geometriskt storhet med storlek.
ex: längd, area, fart

Definition

En sträcka AB är ett linjesegment mellan 2 punkter A och B (på linjen/i planet/i rummet)



En riktad sträcka $\overrightarrow{AB}$ är en sträcka AB, med riktning "A kommer före B".

- A startpunkt
- B slutpunkt

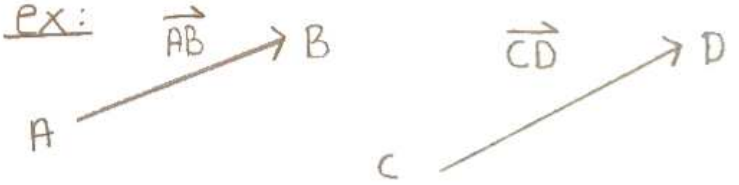
En riktad sträcka bestäms av
- startpunkt • A
- riktning ↙A
- längd A → B

Om vi struntar i startpunkt får vi en vektor.

<u>Definition</u>

En vektor $\mathbf{u}$ är en mängd av riktade sträckor, där $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{CD}$ båda tillhör samma $\mathbf{u}$ om $\overrightarrow{AB}$ kan fås genom parallellförflyttning av $\overrightarrow{CD}$.

<u>ex:</u>



, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \in \mathbf{u}$

- $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{u}$ sägs vara en representant för $\mathbf{u}$

<u>Anm:</u> Ofta är det praktiskt att låta $\overrightarrow{AB}$ beteckna $\mathbf{u}$.

<u>Ex:</u> Vektorn som representeras av $\overrightarrow{AA}$ kallas <u>nollvektorn</u>, skriv $\mathbf{0}$.

<u>Definition</u>

$\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är parallella om $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{u}$ och $\overrightarrow{CD} \in \mathbf{v}$ parallella.

<u>ex:</u> ↗ $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{u}$ ↙ $CD \in \mathbf{v}$ parallella

- <u>Längden</u> $|\mathbf{u}|$ av $\mathbf{u}$ definieras som längden $|\overrightarrow{AB}|$ av $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{u}$
- $\mathbf{u}$'s <u>riktning</u> definieras som riktningen av $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{u}$

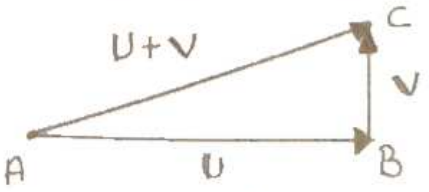
OBS! $|\mathbf{u}|$ och riktning beror ej på val av $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{u}$, eftersom alla representerar samma längd och riktning.

- $\mathbb{0}$ är parallell med alla vektorer $\mathbb{v}$
- $|\mathbb{0}| = 0$, $\mathbb{0}$ <u>enda</u> vektor med längd 0

Räkneoperationen (kap. 2.2)

- <u>Addition</u> av vektorer

$\mathbb{u} + \mathbb{v}$ definieras enligt:



dvs. välj $\overrightarrow{AB} \in \mathbb{u}$, $\overrightarrow{BC} \in \mathbb{v}$

(dvs. $\mathbb{u}$'s slutpunkt = $\mathbb{v}$'s startpunkt)

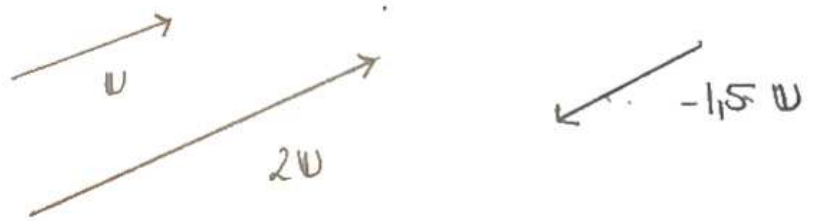
Då är $\overrightarrow{AC}$ representant för $\mathbb{u} + \mathbb{v}$.

- <u>Multiplikation med skalär</u>

Låt $\lambda \in \mathbb{R}$. Då är $\lambda \mathbb{u}$ vektorn som har längd $|\lambda||\mathbb{u}|$ och

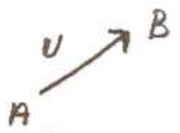
- samma riktning som $\mathbb{u}$ om $\lambda \geq 0$
- motsatt riktning som $\mathbb{u}$ om $\lambda < 0$

Ex:

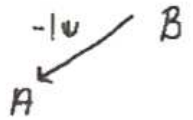


$\mathbb{0} = 0\mathbb{u}$.

Ex: Om $\mathbb{u} \ni \overrightarrow{AB}$



Om $(-1)\mathbb{u} \ni \overleftarrow{BA}$



Räkneregler (sats 1, sid. 23)

Addition

① $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

② $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$

③ $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$

Mult. med skalär

④ $\lambda(\mu \mathbf{u}) = (\lambda\mu)\mathbf{u}$

⑤ $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

⑥ $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$

⑦ $\lambda \mathbf{0} = \mathbf{0}$

Addition + multip. med λ

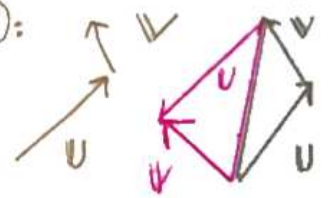
⑧ $\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = \mathbf{0}$

⑨ $(\lambda + \mu)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{u}$

⑩ $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$

Bevis av några regler:

①:



②: Välj representanter

- $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{u}$
- $\overrightarrow{BC} \in \mathbf{v}$
- $\overrightarrow{CD} \in \mathbf{w}$

$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

Alltså gäller ② $\square$

Additiv invers

Givet $\mathbb{u}$ så finns en vektor $\mathbb{v}$ sådan att

$$\mathbb{v} + \mathbb{u} = \mathbb{0} \quad (*)$$

Vi betecknar denna med $-\mathbb{u}$

Bevis

Existens: Enligt räkneregel ⑧ uppfyller

$\mathbb{v} = (-1)\,\mathbb{u} \quad (*)$

Alltså finns åtminstone en vektor $\mathbb{v}$ som uppfyller $(*)$.

Entydighet: Vi skall visa att denna vektor är unik.

Antag $\mathbb{v}$ och $\mathbb{v}'$ uppfyller $(*)$.

Vi vill visa att $\mathbb{v} = \mathbb{v}'$

Då $\mathbb{v} \underset{③}{=} \mathbb{v} + \mathbb{0} \underset{\mathbb{v}' \text{ uppfyller } (*)}{=} \mathbb{v} + (\mathbb{v}' + \mathbb{u}) \underset{①}{=} \mathbb{v} + (\mathbb{u} + \mathbb{v}') \underset{②}{=}$

$= (\mathbb{v} + \mathbb{u}) + \mathbb{v}' \underset{\mathbb{v} \text{ uppfyller } (*)}{=} \mathbb{0} + \mathbb{v}' \underset{①}{=} \mathbb{v}' + \mathbb{0} \underset{③}{=} \mathbb{v}'$

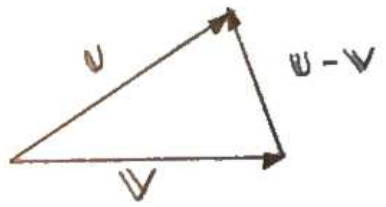
Alltså $\mathbb{v} = \mathbb{v}'$

$\square$

Notation:

Från beviset följer $-\mathbb{u} = (-1)\,\mathbb{u}$

Vi skriver $\mathbb{u} - \mathbb{v}$ för vektorn $\mathbb{u} + (-\mathbb{v})$



Fö 3

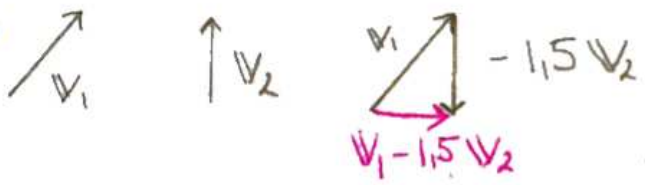
Notation:

Vi låter · $\mathbb{R}$ beteckna vektorer på linjen
· $\mathbb{R}^2$ beteckna vektorer i planet
· $\mathbb{R}^3$ beteckna vektorer i rummet

<u>Def:</u> En vektor $\mathbb{u}$ sägs vara en <u>linjärkombination</u> av $\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_p$ om det finns tal $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}^n$ så att

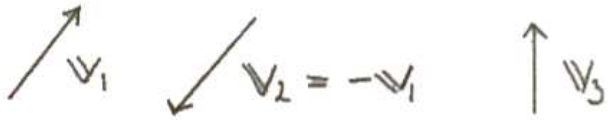
$$\mathbb{u} = \lambda_1 \mathbb{v}_1 + \lambda_2 \mathbb{v}_2 + \dots + \lambda_p \mathbb{v}_p$$

Ex:



linjärkomb. av $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2$

Ex:



Är ① $\mathbb{v}_2$ linjärkomb. av $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_3$
② $\mathbb{v}_3$ linjärkomb. av $\mathbb{v}_1\ \mathbb{v}_2$
③ $\mathbb{v}_2$ linjärkomb. av $\mathbb{v}_1$
④ $\mathbb{0}$ linjärkomb av $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2$?

- ① ja! ty $\mathbb{v}_2 = (-1)\mathbb{v}_1 + 0\mathbb{v}_3$
- ② nej! alla linjärkomb. av $\mathbb{v}_1$ och $\mathbb{v}_2$ parallella med $\mathbb{v}_1$ (på linje)
  $\mathbb{v}_3$ ej parallell med $\mathbb{v}_1$
- ③ ja! $\mathbb{v}_2 = (-1)\mathbb{v}_1$
- ④ ja! $\mathbb{0} = 0\mathbb{v}_1 + 0\mathbb{v}_2 = 3\mathbb{v}_1 + 3\mathbb{v}_2$

Def: • Vi betecknar mängden av alla linjärkomb. av $\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_p$ med

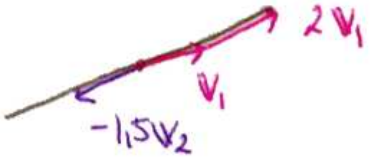
$\text{span}(\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_p)$

• Vi säger att $\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_p$ spänner upp $\text{span}(\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_p)$

Ex:

$\text{span}(\mathbb{v}_1) = \{\mathbb{u}$ på formen $\lambda \mathbb{v}_1, \lambda \in \mathbb{R}\} =$

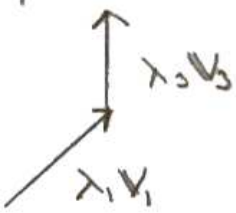
$= \{$alla $\mathbb{u}$ parallella med $\mathbb{v}_1\} =$ linje med "riktning $\mathbb{v}_1$"



$\text{span}(\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2) = \{\mathbb{u} = \lambda_1 \mathbb{v}_1 + \lambda_2 \mathbb{v}_2 + \dots \lambda_n \mathbb{v}_n;\ \lambda_n \in \mathbb{R}\} =$

$= \{(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbb{v}_1, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} = \text{span}(\mathbb{v}_1)$

$\text{span}(\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_3) = \{\mathbb{u} = \lambda_1 \mathbb{v}_1 + \lambda_3 \mathbb{v}_3\}$



Alltså $\text{span}(\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_3) = \mathbb{R}^2$

$\text{span}(\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3) = \mathbb{R}^2$

Ex: Hur många vektorer behövs för att spänna upp $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$?

$\mathbb{R}^2 = 2$
$\mathbb{R}^3 = 3$
$\mathbb{R}^n = (n)$

Linjärt beroende/oberoende

moraliskt:

$v_1, \dots, v_p$ linjärt oberoende om "pekar åt olika håll", spänner upp något av dimension p.

Ex:

- v_1, v_3

linjärt oberoende

- v_1, v_2

linjärt beroende

Kommer ge 2 def:

Def 1:

Vektorerna $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$, $p \geq 2$ sägs vara <u>linjärt beroende</u> om någon av dem är en linjärkomb. av de andra

Annars sägs de vara <u>linjärt oberoende</u>

OBS! *linjärt beroende/oberoende är en egenskap hos mängden* $v_1, \dots, v_p$, ej hos enskilda vektorer/delmängder

Def 2

$\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_p \in \mathbb{R}^n$

är linjärt oberoende om ekvationen

$\lambda_1 \mathbb{v}_1 + \dots + \lambda_p \mathbb{v}_p = \mathbb{0}$ (*)

har endast den triviala lösningen

$\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$

Annars (dvs om $\exists$ lösning till (*) med åtminstone ett $\lambda_i \neq 0$) är de linjärt beroende.

Sats (sats 5, s. 36)

De två definitionerna av linjärt beroende/oberoende är ekvivalenta.

Ex: $\nearrow \mathbb{v}_1$ $\swarrow \mathbb{v}_2$ $\uparrow \mathbb{v}_3$

① Är $\{\mathbb{v}_1\}$ linjärt beroende/oberoende?

② -||- $\{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2\}$ -||- ?

③ -||- $\{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_3\}$ -||- ?

④ -||- $\{\mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3\}$ -||- ?

① Oberoende. (*) $\lambda_1 \mathbb{v}_1 = \mathbb{0}$ har endast lösning $\lambda_1 = 0$

Alltså oberoende def 2

② Beroende. $\mathbb{v}_1 = -\mathbb{v}_2$ ($\mathbb{v}_1$ linjärkomb. av $\mathbb{v}_2$)

Alltså ber. enl. def 1

③ Oberoende. (lös $\lambda_1 \mathbb{v}_1 + \lambda \mathbb{v}_3 = \mathbb{0} \dots$)

$\mathbb{v}_1$ och $\mathbb{v}_3$ ej parallella, ingen linjärkomb. av den andra

④ Beroende. $\{\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2\}$ beroende
$\Rightarrow \{\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \mathbb{V}_3\}$ beroende

Allmänt: Om $\mathbb{V}_1, \dots, \mathbb{V}_p$ linj. beroende så
$\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_p, \mathbb{V}_{p+1}, \dots, \mathbb{V}_s$ linjärt beroende

Sats (sats 5, s. 36)

De två definitionerna av linjärt beroende/oberoende av ekvivalenta.

Bevis

① linjärt beroende enligt def. 1
$\Rightarrow$ linjärt beroende enligt def. 2

Antag $\{\mathbb{V}_1, \dots, \mathbb{V}_p\}$ linjärt beroende enligt def. 1.
Då är någon av $\mathbb{V}_1, \dots, \mathbb{V}_p$ en linjärkombination av de andra.
Antag att $\mathbb{V}_1$ är en linjärkombination av $\mathbb{V}_2, \dots, \mathbb{V}_p$. (Annars numrera om vektorerna)
Det betyder att $\exists\, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ så att
$\mathbb{V}_1 = \lambda_2 \mathbb{V}_2 + \dots + \lambda_p \mathbb{V}_p$
$\Leftrightarrow \mathbb{V}_1 - \lambda_2 \mathbb{V}_2 - \dots - \lambda_p \mathbb{V}_p = \mathbb{0}$ (*)
Eftersom (åtminstone) koefficienten framför $\mathbb{V}_1 \neq 0$ så är
$\{\mathbb{V}_1, \dots, \mathbb{V}_p\}$ linjärt beroende enligt def 2

$\square$

Omvändningen:

linjärt beroende enl. def 2

$\Rightarrow$ linjärt beroende enl. def 1

Antag $\{\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_p\}$ linjärt beroende enl. def 2

Då gäller

$(*)\ \lambda_1 \mathbb{v}_1 + \dots + \lambda_p \mathbb{v}_p = \mathbb{0}$

har en lösning där något $\lambda_i \neq 0$

Vi kan anta att $\lambda_1 \neq 0$ (annars numrera vektorerna)

$\lambda_1 \neq 0$

$\Rightarrow$ kan mult. $(*)$ med $\frac{1}{\lambda_1}$

$(*) \Leftrightarrow \mathbb{v}_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbb{v}_2 + \dots + \frac{\lambda_p}{\lambda_1}\mathbb{v}_p = \mathbb{0}$

$\Leftrightarrow \mathbb{v}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbb{v}_2 - \dots - \frac{\lambda_p}{\lambda_1}\mathbb{v}_p$

$\Rightarrow \mathbb{v}_1$ är en linjär komb. av $\mathbb{v}_2, \dots, \mathbb{v}_p$

$\Rightarrow \{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \dots, \mathbb{v}_p\}$ linjärt beroende enl. def 1

Slutsats:

linjärt beroende enl. def 1 $\Leftrightarrow$ linjärt beroende enl. def 2

Ex: Hur många oberoende vektorer kan det finnas i

$\mathbb{R}^1 = 1$

$\mathbb{R}^2 = 2$

$\mathbb{R}^3 = 3$

$\mathbb{R}^n = (n)$

Def:

$v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$ är en bas för $\mathbb{R}^n$ om

- de spänner upp $\mathbb{R}^n$ och
- linjärt oberoende

Bassatsen: (sats 4, s 35) (sats 3. s. 103)

- Fler än n vektorer i $\mathbb{R}^n$ är linjärt beroende
- Det behövs n vektorer för att spänna upp $\mathbb{R}^n$
- Speciellt har varje bas för $\mathbb{R}^n$ n vektorer.

- $v_1, \dots, v_n$ bas för $\mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow v_1, \dots, v_n$ spänner upp $\mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow v_1, \dots, v_n$ linjärt oberoende

Fö 4

- $\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_p \in \mathbb{R}^n$ <u>spänner upp</u> span $(\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_p) =$
$= \{\mathbb{u} = u_1\mathbb{v}_1 + \dots + u_p\mathbb{v}_p,\ u_1, \dots, u_p \in \mathbb{R}\} =$
$= \{$linjärkomb. av $\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_p\}$

- $\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_p$ <u>linjärt oberoende</u> om
$\lambda_1\mathbb{v}_1 + \dots + \lambda_p\mathbb{v}_p = \mathbb{0}$
$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$

- $\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_p \in \mathbb{R}^n$ <u>bas</u> för $\mathbb{R}^n$ om
  - span $(\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_p) = \mathbb{R}^n$
  - linjärt oberoende

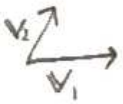
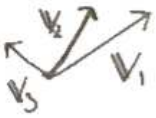
<u>Bassatsen</u>

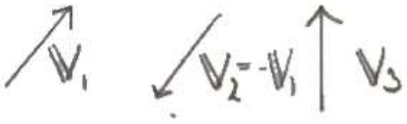
(i) Fler än n vektorer i $\mathbb{R}^n$ är linjärt beroende
(ii) Behövs åtminstone n vektorer för att spänna upp $\mathbb{R}^n$
(i) och (ii) $\Rightarrow$ En bas för $\mathbb{R}^n$ har **exakt** n element

---

$\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n$ bas
$\Leftrightarrow \mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n$ spänner upp $\mathbb{R}^n$
$\Leftrightarrow \mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n$ linjärt oberoende

Ex: Ange/beskriv en bas för

		# vektorer i basen
$\mathbb{R}$ linjen	$v \in \mathbb{R}$, $v \neq 0$ 	1
$\mathbb{R}^2$ planet	 två icke parallella vektorer v_1 och v_2	2
$\mathbb{R}^3$ i rummet	 tre vektorer som inte ligger i ett plan (linjärt oberoende)	3

Ex: 

vektorer	linjärt oberoende	spänner upp	Bas för $\mathbb{R}^2$
v_1	ja (ty $v_1 \neq 0$)	nej, för få vektorer	nej
v_1, v_2	nej 	nej, endast en linje	nej
v_1, v_3 	ja	ja	ja
v_1, v_2, v_3	nej	ja	nej

Notation:

Ofta betecknar vi vektorerna i en bas med $e_1, \dots, e_n$

Sats

$$\begin{pmatrix} n=1, \text{ lemma 1, s. 26} \\ n=2, \text{ sats 2, s 29} \\ n=3, \text{ sats 3, s 30} \end{pmatrix}$$

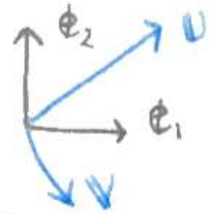
Antag $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ bas för $\mathbb{R}^n$ och $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$
Då finns entydigt bestämda $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$ så att
$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + \dots u_n\mathbf{e}_n$

Def:

- $u_1, \dots, u_n$ kallas koordinater
- vektorerna $u_i\mathbf{e}_i$ kallas komposanter

Notation:
När vi fixerat en bas $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ kan vi beskriva $\mathbf{u}$ som
$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$
↑
kordinater map basen

Ex: bas $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ för $\mathbb{R}^2$



$\mathbf{u} = (2, 1) = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$
$\mathbf{v} = (1, -2) = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$

Övning: uttryck $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ i basen $\mathbf{u}, \mathbf{v}$

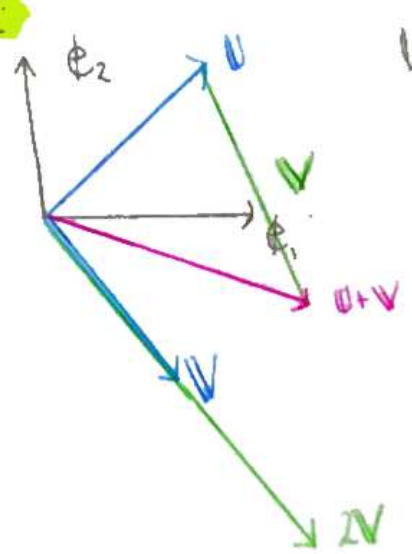
OBS: om $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ och
$\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ koordinater map basen $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$

$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1\mathbf{e}_1 + \dots + u_n\mathbf{e}_n) + (v_1\mathbf{e}_1 + \dots + v_n\mathbf{e}_n) \overset{\text{räkneregler}}{=}$
$= (u_1 + v_1)\mathbf{e}_1 + \dots + (u_n v_n)\mathbf{e}_n$
så att $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 v_1 + \dots + u_n v_n)$

På samma sätt

$$\lambda \mathbb{U} = (\lambda U_1 + \ldots + \lambda U_n)$$

Ex:

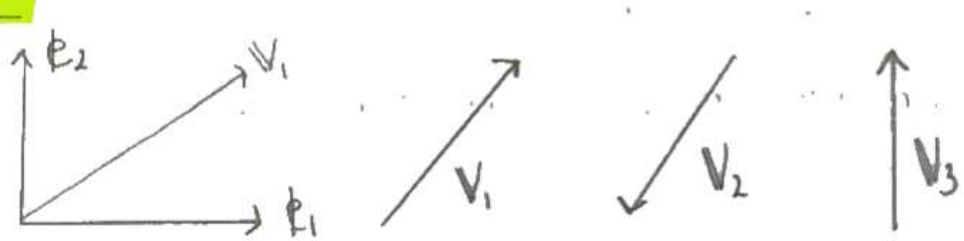


$$\mathbb{U}+\mathbb{V} = (2,1)+(1,-2) = (3,-1)$$

Subtraktion:

$$\mathbb{U}-\mathbb{V} = (U_1 - V_1, \ldots, U_n - V_n)$$

Ex:



Baser för $\mathbb{R}^2$ $\{\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2\}$, $\{\mathbb{e}, \mathbb{V}_1\}$, $\{\mathbb{V}_2, \mathbb{V}_3\}$, $\{\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_3\}$ ...

Vektor	koord. i bas $\{\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2\}$	koord i $\{\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_3\}$
$\mathbb{V}_1$	$\mathbb{V}_1 = \mathbb{e}_1 + \mathbb{e}_2 = (1,1)$	$\mathbb{V}_1 = \mathbb{V}_1$, $\mathbb{V}_1 = (1,0)$
$\mathbb{V}_2$	$\mathbb{V}_2 = -\mathbb{V}_1 = -\mathbb{e}_1 - \mathbb{e}_2 = (-1,-1)$	$\mathbb{V}_2 = -\mathbb{V}_1$, $\mathbb{V}_2 = (-1,0)$
$\mathbb{V}_3$	$\mathbb{V}_3 = \mathbb{e}_2$, $\mathbb{V}_3 = (0,1)$	$\mathbb{V}_3 = (0,1)$
$3\mathbb{V}_1 - 2\mathbb{V}_3$	$3\mathbb{V}_1 - 2\mathbb{V}_3 = 3(1,1) - 2(0,1) = (3,3) - (0,2) = (3,1)$	$(3,-2)$

Bevis av föregående sats

• Existens av $u_1, \dots, u_n$

$e_1, \dots, e_n$ bas $\underset{\text{def av bas}}{\Longrightarrow}$ $e_1, \dots, e_n$ spänner upp $\mathbb{R}^n$

Alltså är varje vektor $u \in \mathbb{R}^n$ en linjärkomb. av $e_1, \dots, e_n$, dvs det finns tal $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$ så att $u = u_1 e_1 + \dots + u_n e_n$

Entydighet av $u_1, \dots, u_n$

Antag att $u = u_1 e_1 + \dots + u_n e_n$ ①

och att $u = u_1 e_1 + \dots + u_n e_n$ ②

Tag ① − ②

$0 = u - u = u_1 e_1 + \dots + u_n e_n) - (u_1 e_1 + \dots + u_n e_n) \overset{\text{räkneregler}}{=}$

$= (u_1 - u_1) e_1 + \dots + (u_n - u_n) e_n$ (*)

$e_1, \dots, e_n$ bas $\overset{\text{def av bas}}{\Longrightarrow}$ $e_1, \dots, e_n$ linjärt oberoende

$\Rightarrow$ ekv (*) har endast den triviala lösningen

$u_1 - u_1' = u_n - u_n' = 0$

Alltså $u_i = u_n'$ för $i = 1, \dots, n$

Alltså är $u_1, \dots, u_n$ entydigt bestämda.

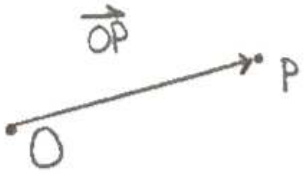
$\square$

Koordinatsystem (kap. 3)

- Beskriver punkter i rummet
(på planet, i linje i högre dim)

Def: Ett koordinatsystem består av

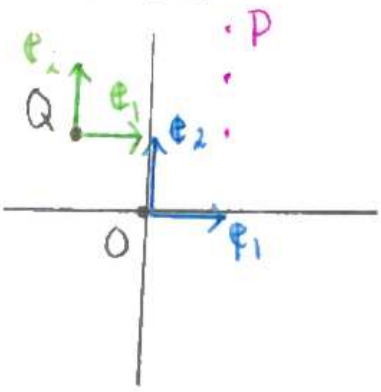
① En speciell punkt O, kallas origo
Varje punkt P motsvarar exakt en vektor $\overrightarrow{OP}$.
Denna kallas P's ortsvektor



② En bas e_1, e_2, e_3 för $\mathbb{R}^3 = \{$vektorer i rummet$\}$
Då finns enligt sats en entydig representation.
$\overrightarrow{OP} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$
(x_1, x_2, x_3) kallas P's koordinator i koordinatsystemet

Anm: Koordinatsystem för linjen/planet(/högre dim) definieras analogt.

Ex: Antag P har koordinaten (1,3) i koord.syst. O, e_1, e_2



- Q har koord. (−1,1) i O, e_1, e_2
- Vad är P's koord. i Q, e_1, e_2? ①
- Vad är Q's —||— ? ②
- Vad är Q's —||— ? ③
(obs: Q är har nytt origo)

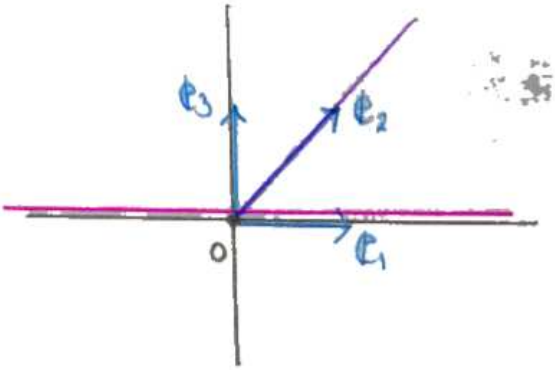
① $P = (2,2)$

② $O = (1,-1)$

③ $Q = (0,0)$

Notation:

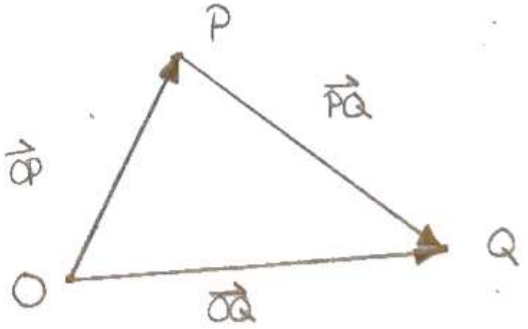
När vi har fixerat ett koord.syst. $O, e_1, \dots, e_n$ [illegible] kan vi identifiera P med $(x_1, \dots, x_n)$



- koordinataxlar i "x_n-axeln"
- koordinatplan i x_1x_2-planet

Fö 5

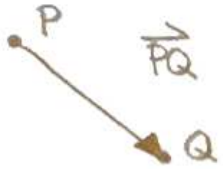
OBS!



$\vec{OP} + \vec{PQ} = OQ$

Kan lite oegentligt skriva detta som

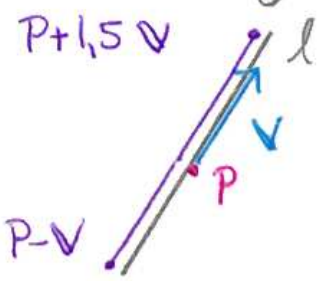
$P + \vec{PQ} = Q$



Detta ger en operation
punkt + vektor = punkt

Mer vetenskapligt:
vektorn $\vec{PQ}$ verkar på punkten P. Verkan av $\vec{PQ}$ på P är Q

Linjer i rummet



OBS: l entydigt bestämd av

- $P = (p_1, p_2, p_3)$ punkt på l
- $\mathbb{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektor parallell med l

l består av alla punkter på formen
$P + t\mathbb{v}$, $t \in \mathbb{R}$

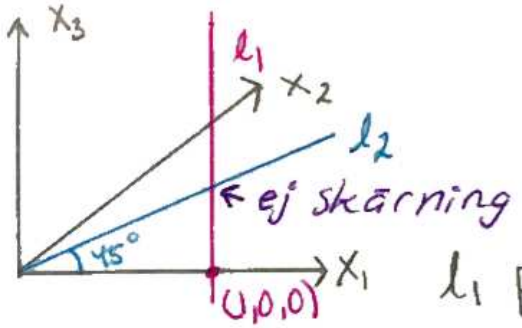
dvs
$$\begin{cases} x_1 = p_1 + t v_1 \\ x_2 = p_2 + t v_2 \\ x_3 = p_3 + t v_3 \end{cases}$$

- $\mathbb{v}$ är en riktningsvektor för l
- (*) är en parametisering av l med parametern t
  (linjens ekv. på parameterform)

OBS: parametisering beror på valet av P och $\mathbb{v}$.

Ex: Avgör om linjerna l_1, l_2 skär, där

l_1: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t \end{cases}$ $\qquad$ l_2: $\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 5 \\ x_3 = 0 \end{cases}$



l_1 parallell med x_3-axeln genom $(1,0,1)$

l_1 och l_2 skär om $\exists\, t, s$ så att

$$\begin{cases} 1 = s \\ 0 = s \\ t = 0 \end{cases} \qquad (P_1 + t\mathbb{v}_1 = P_2 + s\mathbb{v}_2)$$

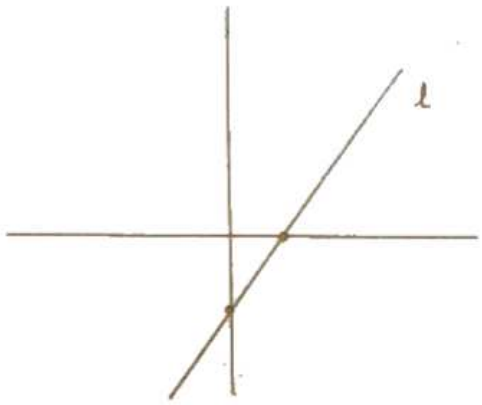
- $l_1 = P_1 + t\mathbb{v}_1$
- $l_2 = P_2 + s\mathbb{v}_2$

Lätt att se att (*) saknar lösning.
<u>Alltså</u> l_1 och l_2 skär ej varandra.

<u>Linjer i planet</u>

En linje i planet kan beskrivas
- som lösningarna till en linjär ekv.
  ex: $l = \{y = kx + m\} = \{ax + by = c\}$
  - linjens ekvation på affin form

<u>Ex:</u> $l = \{y = 2x - 2\}$



genom en parametrisering
$P + t\mathbb{v}$

- parametrisera l ovan:

sätt $x = t$

Då $y = 2t - 2$

$$l = \begin{cases} x = t \\ y = -2 + 2t \end{cases}$$

Plan i rummet

Ett plan π kan beskrivas:

- som lösningsmängden till en linjär ekvation

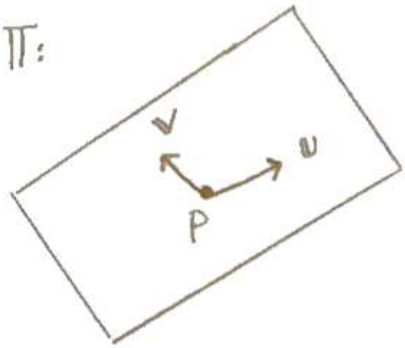
$\pi = \{ax + by + cz = d\}$

planets ekvation (på affinform)

Ex: $\pi = \{x + y - 3z = 4\}$

- genom en parametrisering

π:



OBS: π entydigt bestämt av

- en pkt $P = (p_1, p_2, p_3) \in \pi$
- två linjärt beroende vektorer $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ och $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ parallella med π

π består av alla punkter på formen

$P + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$, $s, t \in \mathbb{R}$

dvs.
$$\begin{cases} x_1 = P_1 + su_1 + tv_1 \\ x_2 = P_2 + su_2 + tv_2 \\ x_3 = P_3 + su_3 + tv_3 \end{cases}$$

OBS! Parametriseringen beror på P, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$.

Ex: Parametrisera $\Pi = \{x + y + 3y = 4\}$

sätt $z = t$, $t \in \mathbb{R}$

$y = s$, $s \in \mathbb{R}$

Då $x = -s + 3t + 4$

dvs,

$$\Pi: \begin{cases} x = \overset{P}{\boxed{4}} \overset{u}{\boxed{-s}} + \overset{v}{\boxed{3t}} \\ y = s \\ z = t \end{cases}$$

parametrisering av Π

$\Pi: P + su + tv$

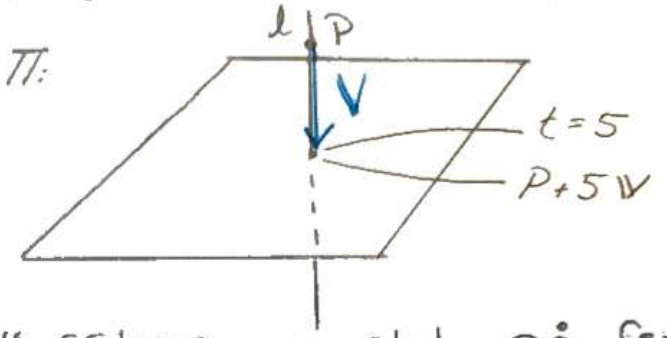
$P = (4, 0, 0)$
$u = (-1, 1, 0)$
$v = (3, 0, 1)$

<u>Minns:</u> Gick från en parametrisering → planets ekv.

Ex: Bestäm skärningen mellan Π ovan och

$l: (1, 1, 1) + t(1, 0, 0)$

Π:



$(x, y, z) = (6, 1, 1)$

Vi söker en pkt på formen

$(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(1, 0, 0)$ (*)

som uppfyller

$x + y - 3z = 4$ (**) (Π's ekvation)

sätt in (*) i (**):

$$\underbrace{1+t}_{x} \underbrace{+1}_{y} \underbrace{-3\cdot 1}_{z} = 4$$

$\Leftrightarrow \quad t-1=4$

$\Leftrightarrow \quad t=5$

Parametervärdet $t=5$ motsvarar punkten
$(x,y,z)=(1,1,1)+5(1,0,0)=(6,1,1)$

Alltså: skärningen mellan Π och l är $\{(6,1,1)\}$

Sammanfattning

Linjer i 2 dim.
- linjens ekv. (affin form)
- parametrisering 1 parameter

Linjer i 3 dim.
- parametrisering 1 parameter

Plan i 3 dim.
- planets ekv. (affin form)
- parametrisering 2 parametrar

Mer allmänt (överkurs)

I dim n:
- Ett "plan" av dim k parametriseras med k parametrar

$\Pi: P + t_1 v_1 + \dots + t_k v_k$

- En linjär ekvation i dim n beskriver ett "plan" av dimension $n-1$ (ett <u>hyperplan</u>)

(kap 3.4)

Linjära ekvationssystem och geometri

Vad är skärningen mellan planen

$\Pi_1 = \{a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1\}$

$\Pi_2 = \{a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2\}$

$\vdots$

$\Pi_3 = \{a_s x + b_s y + c_s z = d_s\}$

Hur beskriver vi skärningarna?

- Genom ekvationssystem

Hur kan skärningen se ut?

(Antag någon koeffic $\neq 0$)

Geometriskt	Algebraiskt
skär ej, ex: parallell	saknas lösning
punkt	entydig lösning
linje	1 parameter, ∞-många
plan	2 parameter, ∞-många

För vilka s? (= # plan)		För vilka s? (Allmänna koeff.)
$s \geq 2$	ex: 	$s \geq 4$
$s \geq 3$		$s = 3$
$s \geq 2$		$s = 2$
$s \geq 1$		$s = 1$

Övn: Låt Π_1 (allmänt) plan av dim k_1 (Antag att vi är i dim 1). Låt Π_2 vara ett plan av dim k_2. Vad är dimensionen av skärningen av skärningen av Π_1 och Π_2

FÖ6

Skalärprodukt (kap 4)

Minns:

- har definierat · addition $\mathbb{u}+\mathbb{v}$
  · mult. med skalär $\lambda\mathbb{u}$

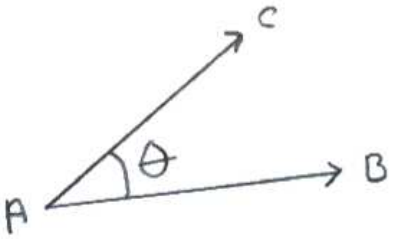
Det finns naturliga sätt att multiplicera vektorer

- Skalärprodukt $\mathbb{u}\cdot\mathbb{v}$ = tal/skalär
- I dim 3 vektorprodukt $\mathbb{u}\cdot\mathbb{v}$ = vektor

Geometrisk def. av skalärprodukt:

Antag $n \leq 3$

- Minns $|\mathbb{u}|$ def. som $|\overrightarrow{AB}|$, $\overrightarrow{AB} \in \mathbb{u}$
- Kan definiera vinkeln mellan $\mathbb{u} \neq 0$, $\mathbb{v} \neq 0$ som minsta vinkeln mellan $\overrightarrow{AB} \in \mathbb{u}$ och $\overrightarrow{AC} \in \mathbb{v}$



$\overrightarrow{AC} = \mathbb{v}$ $\quad (\theta \in [0, \pi])$

$\overrightarrow{AB} = \mathbb{u}$

Def:

Skalärprodukten $\mathbb{u}\cdot\mathbb{v}$ av $\mathbb{u}, \mathbb{v} \in \mathbb{R}^n$ $(n \leq 3)$ definieras som

$$\mathbb{u}\cdot\mathbb{v} = \begin{cases} 0, & \text{om } \mathbb{u} = \mathbb{0} \text{ eller } \mathbb{v} = \mathbb{0} \\ |\mathbb{u}|\cdot|\mathbb{v}|\cos\theta & \leftarrow \text{vinkeln mellan } \mathbb{u} \text{ och } \mathbb{v} \end{cases}$$

Ex:

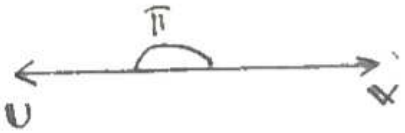
$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = |\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{u}|\cdot\underbrace{\cos\theta}_{\cos 0 = 1} = |\mathbf{u}|^2$$

Ex: $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ parallella

θ ?

$$\theta = \begin{cases} 0, & \text{om } \mathbf{u},\mathbf{v} \text{ pekar åt } \underline{\text{samma}} \text{ håll} \\ \pi, & \text{om } \mathbf{u},\mathbf{v} \text{ pekar åt } \underline{\text{olika}} \text{ håll} \end{cases}$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\cdot\cos 0 = |\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|$$



$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\cdot\cos\pi = -|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|$$

<u>Räkneregler för skalärprodukt</u> (sats 2, s. 66)

(i) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$

(ii) $(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}_1\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}_2\cdot\mathbf{v}$

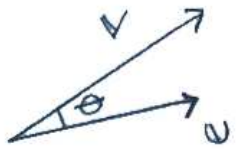
(iii) $(\lambda\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$

(i) + (ii) $\Rightarrow$ $\mathbf{u}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_2$

(i) + (iii) $\Rightarrow$ $\mathbf{u}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$

<u>Bevisskiss:</u>

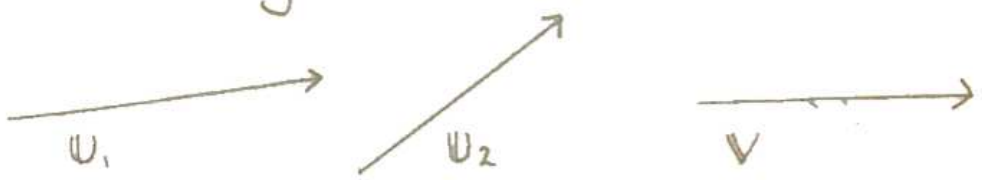
(i) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\cos\theta = |\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{u}|\cos\theta$

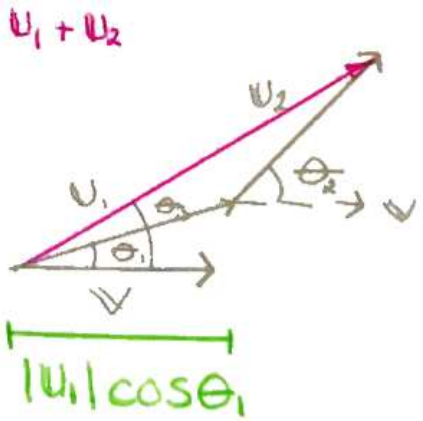


OBS: θ beror inte på ordn. av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$

(iii) följer från def. (ÖVNING!)

(ii) Antag





- Låt θ_1 vara vinkeln mellan $\mathbb{U}_1$ & $\mathbb{V}$
- θ_2 -//- $\mathbb{U}_2$ & $\mathbb{V}$
- θ_3 -//- $\mathbb{U}_1 + \mathbb{U}_2$ & $\mathbb{V}$

OBS:

$$|\mathbb{U}_1|\cos\theta_1 + |\mathbb{U}_2|\cos\theta_2 = |\mathbb{U}_1 + \mathbb{U}_2|\cos\theta_3$$

OBS!

$$(\mathbb{U}_1 + \mathbb{U}_2)\cdot\mathbb{V} = |\mathbb{U}_1 + \mathbb{U}_2|\cdot|\mathbb{V}|\cos\theta_3 =$$
$$= (|\mathbb{U}_1|\cos\theta_1 + |\mathbb{U}_2|\cos\theta_2)\cdot|\mathbb{V}| =$$
$$= |\mathbb{U}_1|\cdot|\mathbb{V}|\cos\theta_1 + |\mathbb{U}_2|\cdot|\mathbb{V}|\cos\theta_2 =$$
$$= \mathbb{U}_1\mathbb{V}\cdot\mathbb{U}_2\mathbb{V}$$

Rita och argumentera på samma sätt när en eller flera av vinklarna är trubbiga! (ÖVNING)

$\square$

Ortogonalitet

Ex: När är $\mathbb{u} \cdot \mathbb{v} = 0$?

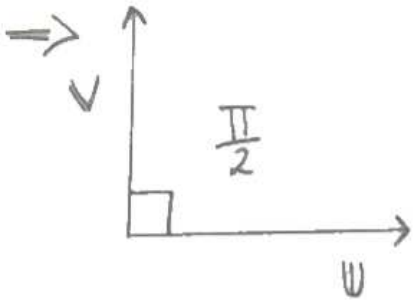
$0 = \mathbb{u} \cdot \mathbb{v} = |\mathbb{u}| \cdot |\mathbb{v}| \cos\theta$

$\Rightarrow |\mathbb{u}| = 0$, $|\mathbb{v}| = 0$ eller $\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

Alltså $\mathbb{u} \neq 0$, $\mathbb{v} \neq 0$

så $\mathbb{u} \cdot \mathbb{v}$

$\Rightarrow$



Def: Om $\mathbb{u} \cdot \mathbb{v} = 0$ sägs $\mathbb{u}$ och $\mathbb{v}$ vara ortogonala, skrivs $\mathbb{u} \perp \mathbb{v}$

OBS: $\mathbb{0} \perp \mathbb{v}$, alla $\mathbb{v}$

Lemma

Antag $\mathbb{v} \neq \mathbb{0}$

och $\mathbb{u} \perp \mathbb{v}$ och $\mathbb{u} \parallel \mathbb{v}$

Då $\mathbb{u} = \mathbb{0}$

Bevis

Antag $\mathbb{u} \neq \mathbb{0}$

Att $\mathbb{u} \parallel \mathbb{v}$ betyder $\mathbb{u} = \lambda \mathbb{v}$, ngt $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$|\mathbb{u}|^2 = \mathbb{u} \cdot \mathbb{u} = \mathbb{u} \cdot \lambda \mathbb{v} = \lambda \mathbb{u} \cdot \mathbb{v} = 0$, ty $\mathbb{u} \perp \mathbb{v}$

Alltså $|\mathbb{u}|^2 = 0$

Alltså $\mathbb{u} = \mathbb{0}$, motsägelse $\square$

Sats (delvis Sats 1, s. 65)

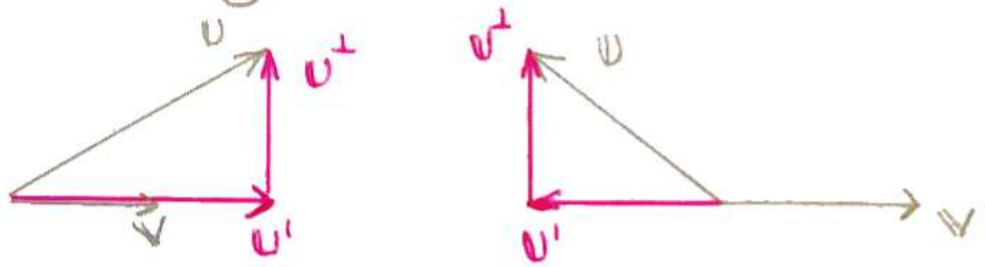
Antag $\mathbb{v} \neq 0$, $v \in \mathbb{R}^n$

Då gäller att varje vektor $\mathbb{u} \in \mathbb{R}^n$ har en unik uppdelning

$\mathbb{u} = \mathbb{u}' + \mathbb{u}^{\perp}$ (*)

där $\mathbb{u}'$ parallell med $\mathbb{v}$

$\mathbb{u}^{\perp}$ ortogonal med $\mathbb{v}$



Vidare är

$$\mathbb{u}' = \frac{\mathbb{u} \cdot \mathbb{v}}{|\mathbb{v}|^2} \mathbb{v} \quad (**)$$

Def:

$\mathbb{u}'$ kallas den <u>ortogonala projektionen</u> av $\mathbb{u}'$ på $\mathbb{v}$

Moraliskt: $\mathbb{u}'$ skugga av $\mathbb{u}$

Bevis

Bevisgång:

1) Visa att $\mathbb{u}'$ def. enl. (**) parallell med $\mathbb{v}$
2) Visa att $\mathbb{u} - \mathbb{u}'$ är ortogonal mot $\mathbb{v}$

1) och 2) $\Rightarrow$ Det finns åtminstone en uppdeln. (*)

3) Visa att denna uppdelning är unik

1) $\mathbb{U}' = \underbrace{\frac{\mathbb{U}\cdot\mathbb{V}}{|\mathbb{V}|^2}}_{\text{skalär}} \cdot \mathbb{V}$

$\mathbb{U}' = \text{skalär} \cdot \mathbb{V}$

Alltså $\mathbb{U}'$ parallell med $\mathbb{V}$

2) $(\mathbb{U}\cdot\mathbb{U}')\cdot\mathbb{V} = \mathbb{U}'\cdot\mathbb{V} \underset{(**)}{=} \mathbb{U}\cdot\mathbb{V} - \frac{\mathbb{U}\cdot\mathbb{V}}{|\mathbb{V}|^2}\cdot\underbrace{\mathbb{V}\cdot\mathbb{V}}_{|\mathbb{V}|^2} =$

$= \mathbb{U}\cdot\mathbb{V} - \mathbb{U}\cdot\mathbb{V} = 0$

Alltså $\mathbb{U}-\mathbb{U}' \perp \mathbb{V}$

3) Antag $\mathbb{U} = \mathbb{U}' + \mathbb{U}^\perp$ ①

och $\mathbb{U} = \tilde{\mathbb{U}}' + \tilde{\mathbb{U}}^\perp$ ②

där $\mathbb{U}'$ och $\tilde{\mathbb{U}}' \parallel \mathbb{V}$

och $\mathbb{U}^\perp$ och $\tilde{\mathbb{U}}^\perp \perp \mathbb{V}$

Tag ① − ②

$\Rightarrow \mathbb{0} = \mathbb{U} - \mathbb{U} = (\mathbb{U}' + \mathbb{U}^\perp) - (\tilde{\mathbb{U}}' + \tilde{\mathbb{U}}^\perp) =$

$= (\mathbb{U}' - \tilde{\mathbb{U}}') + (\mathbb{U}^\perp - \tilde{\mathbb{U}}^\perp$

$\Leftrightarrow \underbrace{\mathbb{U}' - \tilde{\mathbb{U}}'}_{\text{parallell med } \mathbb{V}} = \underbrace{\tilde{\mathbb{U}}^\perp - \mathbb{U}^\perp}_{\text{ortogonal mot } \mathbb{V}}$

(<u>OBS:</u> $\mathbb{U}_1 \perp \mathbb{V}$ och $\mathbb{U}_2 \perp \mathbb{V}$

$\Rightarrow (\mathbb{U}_1 + \mathbb{U}_2)\cdot\mathbb{V} = \underbrace{\mathbb{U}_1\cdot\mathbb{V}}_{=0,\text{ ty } \mathbb{U}_1\perp\mathbb{V}} + \underbrace{\mathbb{U}_2\cdot\mathbb{V}}_{=0,\text{ ty } \mathbb{U}_2\perp\mathbb{V}} =$)

Lemmat medför att

$\mathbb{U}' - \tilde{\mathbb{U}}' = \mathbb{0} = \tilde{\mathbb{U}}^\perp - \mathbb{U}^\perp$

$\Rightarrow \mathbb{U}' = \tilde{\mathbb{U}}'$ och $\tilde{\mathbb{U}}^\perp = \mathbb{U}^\perp$. Uppdelningen (*) är unik. $\square$

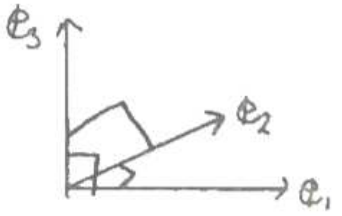
Fö 7

ON-baser (kap 4.2)

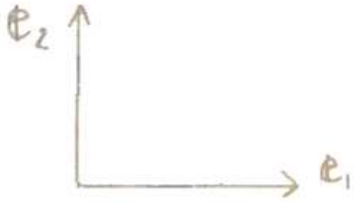
Def:

$e_1, \dots, e_n$ är en ortonormerad bas (ON-bas)
om $e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1 & \text{om } i = j \\ 0 & \text{om } i = j \end{cases}$

$\left(\begin{array}{l} \text{dvs } |e_2| (= e_2 \cdot e_1)^{\frac{1}{2}} = 1 \\ \text{och } e_2 \perp e_1 \text{ om } i \neq j \end{array} \right)$



$n = 3$



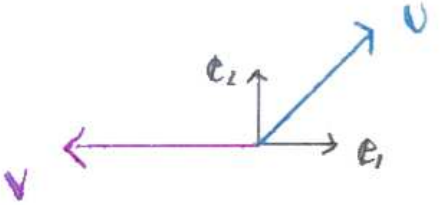
$n = 2$

Sats (sats 3, s. 70)

Om u och v har koordinater
$u = (u_1, \dots, u_n)$ respektive
$v = (v_1, \dots, v_n)$ i ON-basen
$e_1, \dots, e_n$ så

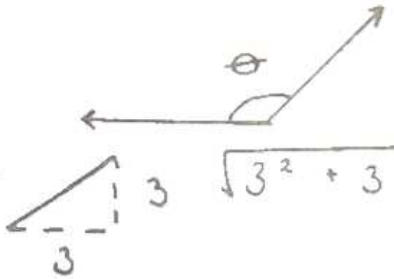
$$u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot v_i$$

Ex: Låt e_1 och e_2 ON-bas i planet
Låt $u = (3, 3)$ och $v = (-5, 0)$
Beräkna $u \cdot v$!



Metod 1: $(3,3)\cdot(-5,0) \overset{\text{sats}}{=} 3(-5) + 3\cdot 0 = -15$

Metod 2: $|\mathbb{U}||\mathbb{V}|\cos\theta$



$|\mathbb{U}| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$

$|\mathbb{V}| = 5$

$\theta = 135^\circ = \frac{3\pi}{4}$

$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow 3\sqrt{2}\cdot 5\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -15$

<u>Bevis sats</u>

$n=2$:

$\mathbb{U}\cdot\mathbb{V} = (U_1\mathbb{e}_1 + U_2\mathbb{e}_2)\cdot(V_1\mathbb{e}_1 + V_2\mathbb{e}_2) =$

$U_1V_1\underbrace{\mathbb{e}_1\cdot\mathbb{e}_1}_{1} + U_1V_2\underbrace{\mathbb{e}_1\cdot\mathbb{e}_2}_{0} + U_2V_1\underbrace{\mathbb{e}_2\cdot\mathbb{e}_1}_{0} + U_2V_2\underbrace{\mathbb{e}_2\cdot\mathbb{e}_2}_{1} = U_1V_1 + U_2V_2$

{ty e_1, e_2 ON-bas}

$\square$

<u>Allmänt n:</u>

$\mathbb{U}\cdot\mathbb{V} = \left(\sum_{i=1}^{n} U_i\cdot\mathbb{e}_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n} V_j\mathbb{e}_j\right) = \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} U_iU_j\mathbb{e}_i\mathbb{e}_j =$

= [dela upp summan i termer där $i=j$ och $i\neq j$] =

$$= \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot v_i \cdot \underbrace{e_i \cdot e_i}_{=1} + \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n \\ i \ne j}} u_i v_j \underbrace{e_i e_j}_{=0} = \sum_{i=1}^{n} u_1 \cdot u_2$$

ty $e_1, \dots, e_n$ ON

$\square$

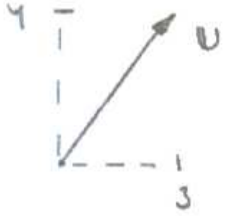
<u>Ex:</u> låt $u = (u_1, \dots, u_n)$ i ON-bas $e_1, \dots, e_n$

$|u| = (u \cdot u)^{\frac{1}{2}} = (\sum u_i^2)^{\frac{1}{2}}$

<u>Ex:</u> $u = (1, 2, 3)$

$|u| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

<u>Ex:</u> $u = (3, 4)$



$|u| = 3^2 + 4^2 = \sqrt{25} = 5$

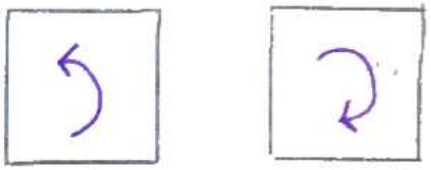
<u>Vektorprodukt</u> (kryssprodukt) (kap 5)

Orientering:

<u>Ex:</u> dim 1: en linje kan orienteras på två sätt

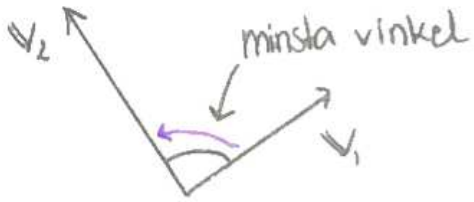
orientering

<u>Ex:</u> Dim 2: ett plan kan orienteras på två sätt:



Def: $n = 2$ $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2 \in \mathbb{R}^2$.

- positivt orienterade om

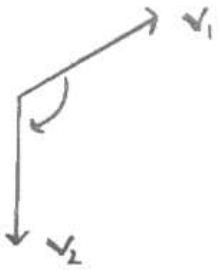


- negativt orienterade om

OBS: Ordningen viktigt

Ex: $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2$ poso och $\mathbb{v}_2, \mathbb{v}_1$ nego

Ex:



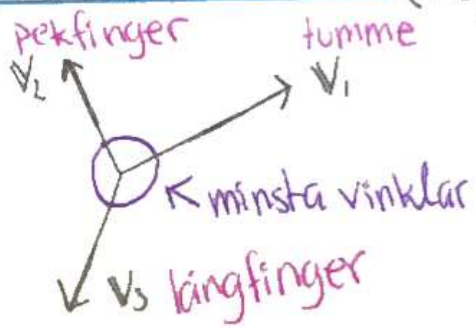
= negativt orienterade

Def:

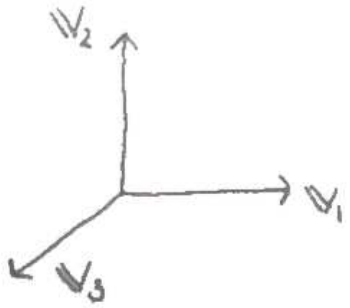
$\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3$ linjärt oberoende i $\mathbb{R}^3$

- positivt orienterade (högerorient.)

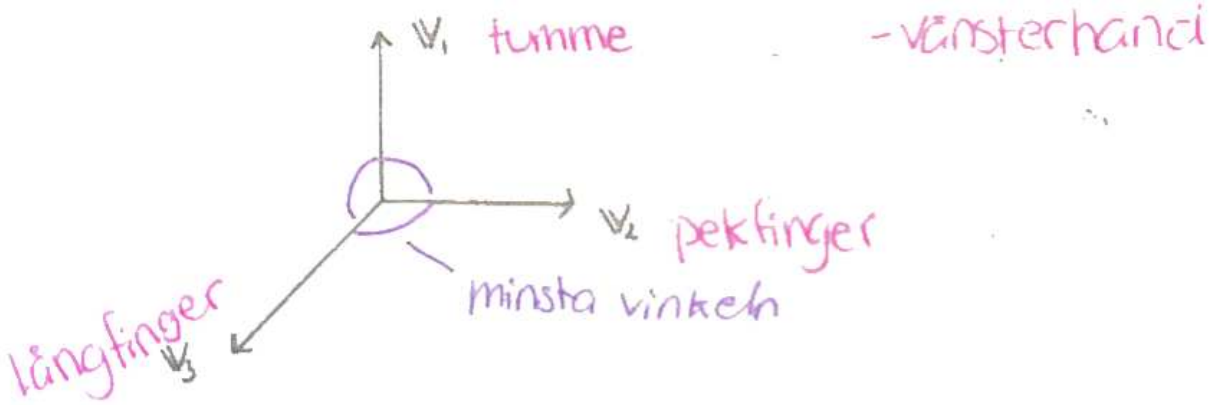
om



-högerhand



• <u>negativt orienterade</u> (vänsterorient.)



<u>Ex:</u> $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \mathbb{V}_3$ pos. o. då

- $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \mathbb{V}_3$ neg o.
- $\mathbb{V}_2, \mathbb{V}_1, \mathbb{V}_3$ neg o.
- $\mathbb{V}_2, \mathbb{V}_3, \mathbb{V}_1$ pos. o.

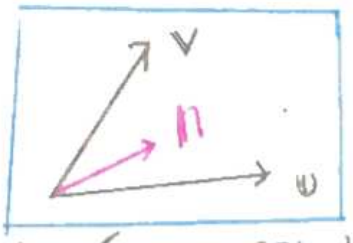
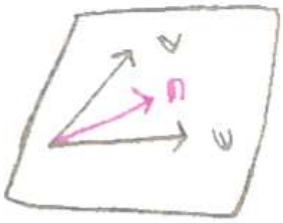
• byt tecken på en $\mathbb{V}_i \longmapsto$ orient. byts

• byt plats på $\mathbb{V}_i$ och $\mathbb{V}_j \longmapsto$ orient. byts

• rotera positionen $\longmapsto$ orient. bevaras

$\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \mathbb{V}_3 \longmapsto \mathbb{V}_2, \mathbb{V}_3, \mathbb{V}_1 \longmapsto \mathbb{V}_3, \mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$

Ide: $n = 3$

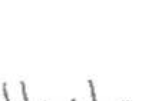
Input: Lin. ober. vektorer	Geom. objekt	Orient.	Tal (skalär)	Output
$\mathbb{u}$	 linje (genom origo)	orient av linjen 	$\lvert\mathbb{u}\rvert$	
$\mathbb{u}, \mathbb{v}$	 plan (genom origo) bestäms av $\mathbb{n}$ $\mathbb{n} \perp \mathbb{u}$, $\mathbb{n} \perp \mathbb{v}$	 välj $\mathbb{n}$ så att $\mathbb{u}, \mathbb{v}, \mathbb{n}$ är positivt orient.	arean av  $= \lvert\mathbb{u}\rvert\lvert\mathbb{v}\rvert\sin\theta$	välj $\lvert\mathbb{n}\rvert = \lvert\mathbb{u}\rvert\lvert\mathbb{v}\rvert\sin\theta$
$\mathbb{u}, \mathbb{v}, \mathbb{w}$	"3-dim plan", dvs. rummet sjalvt	positivt orient. om $\mathbb{u}, \mathbb{v}, \mathbb{w}$ pos. orient, annars neg. orient.	Volymen V av $\mathbb{u}, \mathbb{v}, \mathbb{w}$	

$+V$ om $\mathbb{u}, \mathbb{v}, \mathbb{w}$ pos. o skalär

$-V$ om $\mathbb{u}, \mathbb{v}, \mathbb{w}$ neg. a trippelprodukt

Obs/def (rad 2)

Om $\mathbb{u}, \mathbb{v} \in \mathbb{R}^3$ linjärt oberoende så finns unik vektor $\mathbb{n} \in \mathbb{R}^3$ som

- är ortogonal mot $\mathbb{u}$ och $\mathbb{v}$
- $\mathbb{u}, \mathbb{v}, \mathbb{n}$ positivt orient
- $\lvert\mathbb{n}\rvert$ = arean () $= \lvert\mathbb{u}\rvert\lvert\mathbb{v}\rvert\sin\theta$, då θ minsta vinkeln mellan $\mathbb{u}$ och $\mathbb{v}$

$\mathbb{n}$ kallas <u>vektorprodukt</u> (eller kryssprodukt) av $\mathbb{u}$ och $\mathbb{v}$, betecknas $\mathbb{u} \times \mathbb{v}$

- Om $\mathbb{u}$ och $\mathbb{v}$ linjärt beroende så def. $\mathbb{u} \times \mathbb{v}$ som $\mathbb{0}$

$\mathbb{n}$ kallas <u>vektorprodukt</u> (eller kryssprodukt) av $\mathbb{u}$ och $\mathbb{v}$, betecknas $\mathbb{u} \times \mathbb{v}$

- Om $\mathbb{u}$ och $\mathbb{v}$ linjärt beroende så def. $\mathbb{u} \times \mathbb{v}$ som $\mathbb{0}$

Fö 8

$\mathbb{u} \times \mathbb{v} = 0$, om $\mathbb{u}, \mathbb{v}$ linj. beroende

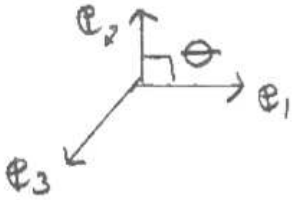
Annars $\mathbb{u} \times \mathbb{v}$ den unika vektor

- som är ortogonal mot $\mathbb{u}$ och $\mathbb{v}$
- uppfyller $\mathbb{u}, \mathbb{v}, \mathbb{u} \times \mathbb{v}$ positivt orient.
- $|\mathbb{u} \times \mathbb{v}| = |\mathbb{u}||\mathbb{v}| \sin\theta = \text{area}$ ()

<u>Obs:</u>

$\mathbb{u} \times \mathbb{v} = \mathbb{0}$ om $\mathbb{u}, \mathbb{v}$ parallella

Ex: Antag att $\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2, \mathbb{e}_3$ högerorienterad ON-bas (HON-bas)



Då $\mathbb{e}_1 \times \mathbb{e}_2 = \begin{cases} \cdot \text{ ortogonal mot } \mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2 \\ \Rightarrow \mathbb{e}_1 \times \mathbb{e}_2 = \lambda \mathbb{e}_3 \\ \cdot\ \mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2, \mathbb{e}_1 \times \mathbb{e}_2 \text{ pos. orient.} \\ \quad \Rightarrow \lambda \geq 0 \\ \cdot\ |\mathbb{e}_1 \times \mathbb{e}_2| = \underbrace{|\mathbb{e}_1|}_{1}\underbrace{|\mathbb{e}_2|}_{1}\underbrace{\sin\theta}_{1} = 1 \\ \Rightarrow \lambda = 1 \end{cases}$

Slutsats:

$\mathbb{e}_1 \times \mathbb{e}_2 = \mathbb{e}_3$

På samma sätt

$e_1 \times e_3 = -e_2$

$e_2 \times e_3 = e_1$

osv.

Sats/definition (sats 2, s. 86) (rad 3 i tabell)

$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \begin{cases} \text{volym}\left(\right) \text{ om } \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \text{ pos. orient} \\ -\text{volym}\left(\right) \text{ om } \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \text{ neg. orient} \end{cases}$

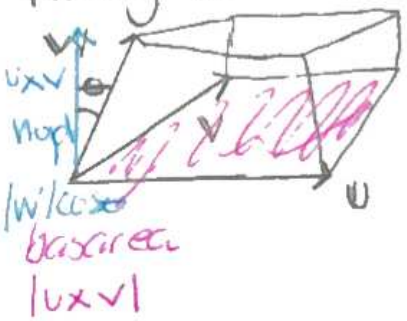
$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ kallas skalär tyngdprodukt

Anm: $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{vmatrix}$

Följd: $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = 0$ om och endast om $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ är linjärt beroende. (ligger i ett plan)

Bevisidé

Antag att $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ pos. orient.



Volym = basarea · höjd =

$= |\mathbf{u} \times \mathbf{v}||\mathbf{w}|\cos\theta =$

$= (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$

vinkel mellan $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$

Rita en liknande figur när $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ neg. orient.

$\square$

Räkneregler x-produkt (sats 4, s. 87)

(i) $\mathbb{v} \times \mathbb{u} = -\mathbb{u} \times \mathbb{v}$ - antikommutativitet

(ii) $(\mathbb{u}_1 + \mathbb{u}_2) \times \mathbb{v} = \mathbb{u}_1 \times \mathbb{v} + \mathbb{u}_2 \times \mathbb{v}$

(iii) $(\lambda \mathbb{u}) \times \mathbb{v} = \lambda(\mathbb{u} \times \mathbb{v})$

(i) + (ii) $\Rightarrow$ $\mathbb{u} \times (\mathbb{v}_1 + \mathbb{v}_2) = \mathbb{u} \times \mathbb{v}_1 + \mathbb{u} \times \mathbb{v}_2$

(i) + (iii) $\Rightarrow$ $\mathbb{u} \times (\lambda \mathbb{v}) = \lambda(\mathbb{u} \times \mathbb{v})$

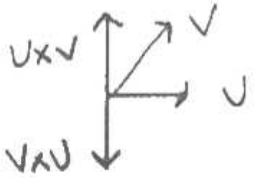
Ex: $\underbrace{(\mathbb{e}_1 \times \mathbb{e}_2)}_{-\mathbb{e}_3} \times \mathbb{e}_2 = \mathbb{e}_3 \times \mathbb{e}_2 = -\mathbb{e}_1$

$\mathbb{e}_1 \times \underbrace{(\mathbb{e}_2 \times \mathbb{e}_2)}_{=0} = \mathbb{0}$

Slutsats: x-prod. ej associativ,
dvs $(\mathbb{u} \times \mathbb{v}) \times \mathbb{w} \neq \mathbb{u} \times (\mathbb{v} \times \mathbb{w})$ i allmänhet

Bevis

(i) byte av ordning byter orientering.



$\Rightarrow \mathbb{v} \times \mathbb{u} = -\mathbb{u} \times \mathbb{v}$

(iii) följer från def. övning

Bevis (ii)

För beviset behövs Lemma (2, s. 87):

Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

Då $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}, \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$

Bevis

$\Leftarrow$: klart att om $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, så $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}, \forall \mathbf{w}$

$\Rightarrow$: Antag $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}, \forall \mathbf{w}$

$\Leftrightarrow (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = 0, \forall \mathbf{w}$

- Att detta gäller $\forall \mathbf{w}$, medför att det speciellt gäller för $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$

$\Rightarrow (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = 0$

$\Leftrightarrow |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = 0$

$\Leftrightarrow |\mathbf{u} - \mathbf{v}| = 0$

$\Leftrightarrow \mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$

$\Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$

$\square$

Bevis (av (ii))

Låt $\mathbf{w} \in \mathbb{R}$ vara godt. vektor

Betrakta:

$$[(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \times \mathbf{v}] \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w})(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = \text{Skalärprodukt} =$$

distributiv

OBS: om vi har $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w})\mathbf{u}$
ty $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ spänner samma parallelleppied som
$\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}$ och $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ samma orient. som
$\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}$

$$= (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u}_1 + (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u}_2 \underset{\text{OBS}}{=} (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} + (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{v})\mathbf{w} =$$

skalärprod. distributiv

$$= [\mathbf{u}_1 \times \mathbf{v} + \mathbf{u}_2 \mathbf{v}]\mathbf{w}$$

Eftersom $\mathbf{w}$ var godtycklig (gäller detta för alla $\mathbf{w}$) ger lemmat att

$$(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \times \mathbf{v} = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{v} + \mathbf{u}_2 \times \mathbf{v}$$

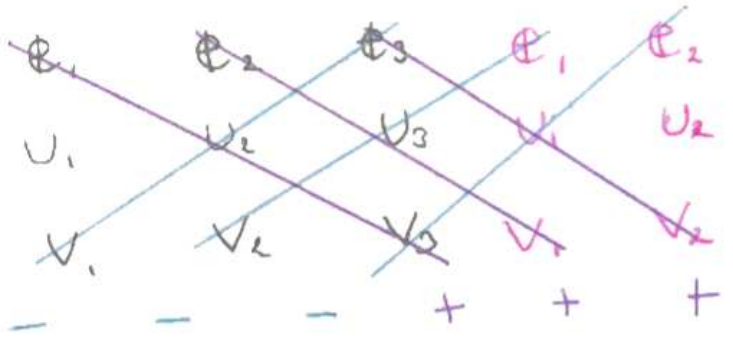
$\square$

$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ i ON-bas

Sats (5. s. 89)

$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ har koordinater $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$,
$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$
~ HON-basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ pos. orient ON-bas)
Då
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2,\ u_3 v_1 - u_1 v_3,\ u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

Minnesregel: (Sarrus regel)



$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = u_2 v_3 \mathbf{e}_1 + u_3 v_1 \mathbf{e}_2 + u_1 v_2 \mathbf{e}_3 - u_2 v_1 \mathbf{e}_3 - u_3 v_2 \mathbf{e}_1 - u_1 v_3 \mathbf{e}_2$$

Bevis (Övning)

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\sum_{i=1}^{3} u_i \mathbf{e}_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{3} v_j \mathbf{e}_j\right) = u_1 v_1 \underbrace{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1}_{0} + u_1 v_2 \underbrace{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}_{\mathbf{e}_3} +$$
+ 7 termer till!

... övning!

ex: $\mathbb{u} = (1, 2, 3)$, $\mathbb{v} = (4, 5, 6)$

$\mathbb{u} \times \mathbb{v}$:

$$\begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_1 & e_2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ - & - & - & + & + \end{array} \quad +$$

$(\mathbb{u} \times \mathbb{v}) = (2 \cdot 6 - 3 \cdot 5,\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6,\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4) =$
$= (-3, 6, -3)$

<u>Geometriska tillämpningar av</u>

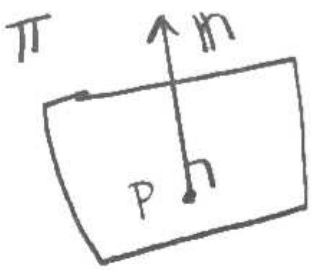
- prod och x-prod (kap. 4.3 och 5.5)

Antag fixerat HON-bas för rummet

<u>Plan:</u>

- Planets normalvektor
- Ortogonal projektion
- Avstånd

Obs: EH plan π bestäms av punkt $P \in \pi$ och vektor $\mathbb{n} \neq \mathbb{0}$ ortogonal mot π. En sådan $\mathbb{n}$ kallas <u>normalvektor.</u>



Obs: normalvektorn ej unik

Hitta $\mathbb{n}$!

<u>Fall I:</u> π ges som parametrisering

$\pi: P + s\mathbb{v}_1 + t\mathbb{v}_2$

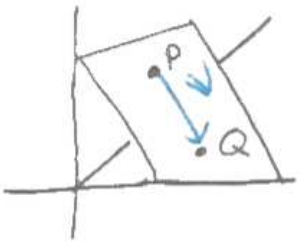
Kan välja $\mathbb{n}$ som $\mathbb{v}_1 \times \mathbb{v}_2$

<u>Fall II</u>: $\pi = \{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b\}$ (affinform)

Tolkning: $P_i(x_1, x_2, x_3) \in \pi$ omm

$\overrightarrow{OP} \cdot \mathbb{a} = b$

$((x_1, x_2, x_3) \cdot (a_1, a_2, a_3) = b)$



obs: $\mathbb{v}$ parallell med π omm

$\mathbb{v} = \overrightarrow{PQ}$ för några $P, Q \in \pi$,

dvs $\overrightarrow{OP} \cdot \mathbb{a} = b$ och $\overrightarrow{OQ} \cdot \mathbb{a} = b$

$\iff \mathbb{v} \cdot \mathbb{a} - (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP})\,\mathbb{a} = \underbrace{\overrightarrow{OQ} \cdot \mathbb{a}}_{=b} - \underbrace{\overrightarrow{OP} \cdot \mathbb{a}}_{=b} = 0$

$\iff \mathbb{v} \perp \mathbb{a}$

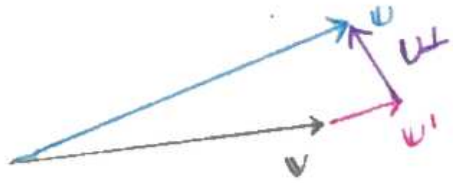
Slutsats: $\mathbb{a} = (a_1, a_2, a_3)$ normalvektor till π

Fö 9

Ortogonal projektion

Minns: $\mathbb{V} \neq \emptyset$ givet

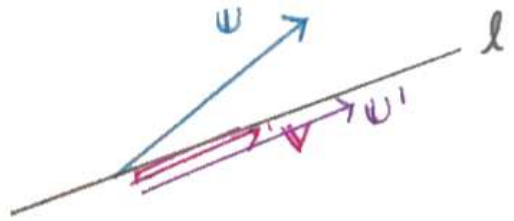
Då finns det en unik uppdelning av $\mathbb{u} = \mathbb{u}' + \mathbb{u}^{\perp}$



$\mathbb{u}'$ parallell m $\mathbb{v}$ ortogonal proj. av $\mathbb{u}$ på $\mathbb{v}$

$\mathbb{u}^{\perp}$ ortogonal mot $\mathbb{v}$

Den ortogonala proj. av $\mathbb{u}$ på linjen $l: P + t\mathbb{v}$ def. som orto. proj. på $\mathbb{v}$.



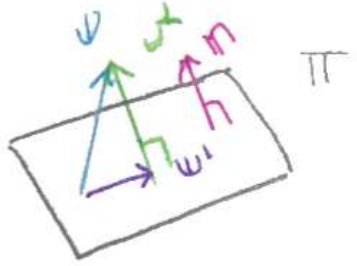
Ortogonal proj. på Π

Sats/def: Givet plan Π och $\mathbb{u} \in \mathbb{R}^3$ $\exists!$ uppdelning

$\mathbb{u} = \mathbb{u}' + \mathbb{u}^{\perp}$

$\mathbb{u}'$ - parallell med Π

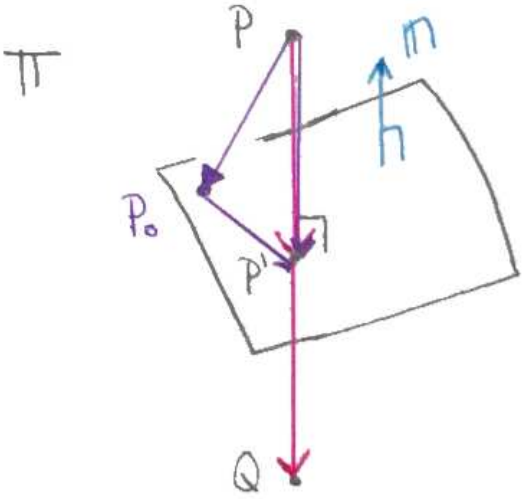
$\mathbb{u}^{\perp}$ - vinkelrät mot Π



- $\mathbb{u}'$ kallas <u>ortogonal projektion</u> på Π
- $\mathbb{u}^{\perp}$ ges som ortogonal projektion av $\mathbb{u}$ på $\mathbb{n}$.

Bevis: övning

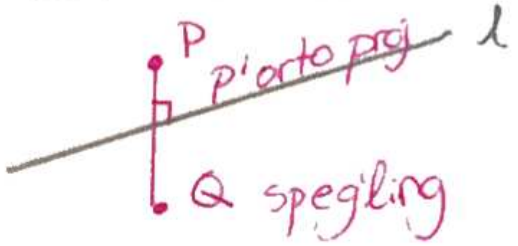
Ortogonal projektion av punkter och spegling



Givet plan π och punkt P,
$P' \in \pi$ så att $\overrightarrow{PP'} \perp \pi$

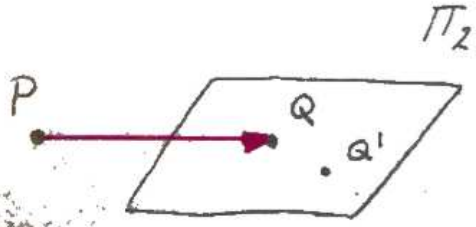
- P' ortogonala proj. av P
- $Q = P + 2PP'$ speglingen av P i π

Hitta P': Tag godtycklig $P_0 \in \pi$
Då är $\overrightarrow{PP'}$ = ortogonala proj. av $\overrightarrow{PP_0}$ på m
På samma sätt



Avstånd

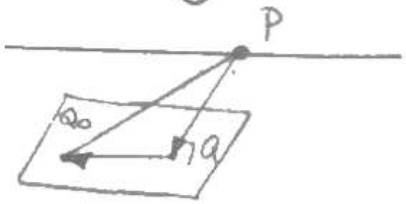
Avstånd mellan $P/l_1/\pi_1$ och $Q/l_2/\pi_2$ =
kortaste avståndet mellan $P/P \in l_1/P \in \pi_1$
och $Q/Q \in l_2/\pi \in \pi_2$



Påstående: Minsta avstånd erhålls om $\overrightarrow{PQ}$ är ortogonal mot l_1 / Π_1 och l_2 / Π_2

Bevis (övning)

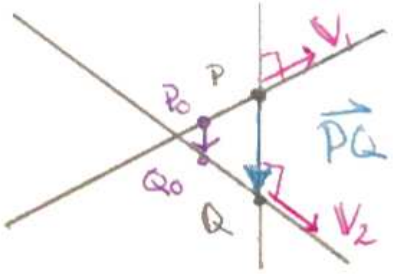
Idé



$\overrightarrow{PQ_0} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QQ_0}$

Visa $|\overrightarrow{PQ_0}| \geq |\overrightarrow{PQ}|$

Ex: Beräkna avståndet mellan



$l_1 : t(1,0,0) = t\mathbf{v}_1$

$l_2 : (3,4,5) + s(0,1,1) = P + s\mathbf{v}$

Vill beskriva de vektorer som är $\perp$ mot l_1, l_2

Låt $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (1,0,0) \times (0,1,1) = \ldots = (0,-1,1)$

Då $\mathbf{v} \perp \mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v} \perp \mathbf{v}_2$

Alltså alla vektorer $\perp$ l_1 och l_2 är på formen $\lambda \mathbf{v}$

Hitta $\overrightarrow{PQ}$:

Tag $P_0 \in l_1$, $Q_0 \in l_2$

$\overrightarrow{PQ}$ är nu orto. prg. av $\overrightarrow{P_0Q_0}$ på $\mathbf{v}$

Välj $P_0 = (0,0,0) \in l_1$, $Q_0 = (3,4,5) \in l_2$

$\overrightarrow{P_0Q_0} = (3, 4, 5)$

Avståndet $(l_1, l_2) = \left| \begin{matrix} \text{ortogolal projektion} \\ \text{av } \overrightarrow{P_0Q_0} \text{ på } \mathbb{v} \end{matrix} \right| =$

$$= \left| \frac{\overrightarrow{P_0Q_0} \cdot \mathbb{v}}{|\mathbb{v}|^2} \cdot \mathbb{v} \right| = \frac{|\overrightarrow{P_0Q_0} \cdot \mathbb{v}|}{|\mathbb{v}|^2} \cdot |\mathbb{v}| = \frac{|\overrightarrow{P_0Q_0} \cdot \mathbb{v}|}{|\mathbb{v}|} =$$

$$= \frac{|(3, 4, 5)(0, -1, 1)|}{\sqrt{|(0, -1, 1)(0, -1, 1)|}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\mathbb{R}^n$ (kap 6)

Def:

- $\mathbb{R}^n$ är mängden av alla $\mathbb{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ där $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$
- $\mathbb{a} = (a_1, \dots, a_n)$ kallas vektor

På $\mathbb{R}^n$ har vi olika räkneoperationer

- addition def genom
  $\mathbb{a} + \mathbb{b} = (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 b_1, \dots, a_n b_n)$
- mult. med skalär $\lambda \in \mathbb{R}$
  $\lambda \mathbb{a} = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n)$

Ex: Låt $\mathbf{a} = (1, 1, 1, 1)$ $\mathbf{b} = (1, -2, 3, -4)$
$(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n)$

$2\mathbf{a} - \mathbf{b} = 2(1, 1, 1, 1) - (1, -2, 3, -4) = (1, 4, -1, 6)$

<u>OBS:</u> För $n = 1, 2, 3$ låter
$M_n = \{$Geometriska vektorer dim. $n\}$

Välj en ON-bas $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ för M_n
Vi kan nu identifiera $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + \dots + u_n\mathbf{e}_n \in M_n$
med vektorn $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$
Alltså $M_n \cong \mathbb{R}^n$ (kan identifiera M_n med $\mathbb{R}^n$)

<u>Sats</u> (1, s. 98)
Räknelagarna för $\mathbb{R}^n$ är de samma som för geometriska vektorer.

Ex: Visa att vektoraddition är kommutativ, dvs $\mathbf{b} + \mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$

$\mathbf{b} + \mathbf{a} = (b_1 + a_1, \dots, b_n + a_n)$
$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$ $\Leftrightarrow$ ty $b_1 + a_1 = a_1 + b_1$

<u>Baser:</u> Definitioner/notation
- $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ är en linjärkomb. av $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p \in \mathbb{R}^n$
om $\exists\, x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}$ så $\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_p\mathbf{a}_p$
- spann $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p) = \{$linjärkomb av $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p\}$

- $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$ <u>spänner upp</u> Spann $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p)$
- $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_p$ <u>linjärt beroende</u> om $x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_p\mathbf{a}_p = \mathbf{0}$ endast har lösningen $x_1 = \dots = x_p = 0$
- $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$ <u>bas</u> för $\mathbb{R}^n$ om spänner upp $\mathbb{R}^n$ och linjärt oberoende
- Om $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$ bas för $\mathbb{R}^n$ och $\mathbf{b} = b_1\mathbf{a}_1 + \dots + b_p\mathbf{a}_p$ så kallas $(b_1, \dots, b_p)$ <u>koordinater</u> (liksom för geometriska vektorer entydigt bestämda)

<u>Sats</u> (2, s. 100)

$p \geq 2$

$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$ linjärt beroende $\Leftrightarrow$ någon $\mathbf{a}_j$ linjärkomb av de andra.

<u>Skalärprodukt i $\mathbb{R}^n$</u>

$\mathbf{u}, \mathbf{v}$ geometriskt vektor

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ koordinater i ON-bas

<u>Def:</u> <u>Skalärprodukten</u> $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ av

$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ och

$\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$

def som

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

- $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är <u>ortogonala</u> $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ om $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$
- <u>Längden</u> av $\mathbf{a}$ def som $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$

- $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ ON-bas om

$$e_i \cdot e_k = \begin{cases} 1 & \text{om } i = k \\ 0 & \text{om } i \neq k \end{cases}$$

<u>Sats</u> (4, s. 108)

För $a \cdot b$ gäller samma räkneregler som för geometriska vektorer.

Fö 10

Bassatsen (Sats 3, s. 10) (för geom. vektorer sats 4, s 35)

[redacted]

① a) Det finns högst n st linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^n$

b) Det behövs åtminstone n st vektorer för att spänna upp $\mathbb{R}^n$

c) Varje bas i $\mathbb{R}^n$ har <u>exakt</u> n st vektorer

② $a_1, \dots, a_n$ bas $\Leftrightarrow$
$a_1, \dots, a_n$ linjärt oberoende $\Leftrightarrow$
$a_1, \dots, a_n$ spänner upp $\mathbb{R}^n$

Obs: Viktigt att ha <u>n st</u> vektorer i del 2

<u>Def:</u> antalet baselement i $\mathbb{R}^n$ (vektorrummet) kallas <u>dimensionen</u> av $\mathbb{R}^n$ (vektorrummet)

<u>Bassatsen</u> säger att dimensionen av $\mathbb{R}^n$ är n

Bevis (kap 6.3)

Antag $x_1 a_1 = x_1(a_{11}, \dots, a_{1j}, \dots, a_{1n})$

$\vdots$

$x_k a_k = x_k(a_{k1}, \dots, a_{kj}, \dots, a_{kn})$

$\vdots$

$x_p a_p = x_p(a_{p1}, \dots, a_{pj}, \dots, a_{pn})$

$b = (b_1, \dots, b_j, \dots, b_n)$

och betrakta vektorekv.

$$x_1 a_1 + \dots + x_k a_k + \dots + x_p a_p = b \quad (*)$$

observera att $(*) \iff$ ekvationssystemet

$$\boxed{a_{11} x_1 + \dots + a_{k1} x_k + \dots + a_{p1} x_p = b_1}$$

$$\vdots$$

$$a_{1j} x_1 + \dots + a_{kj} x_k + \dots + a_{pj} x_p = b_j \quad (**)$$

$$\vdots$$

$$a_{1n} x_1 + \dots + a_{kn} x_k + \dots + a_{pn} x_p = b_n$$

- n ekvation – en ekvation per "plats" i vektorerna
- p variabler – en variabel per vektor a_j

Ex $a_1 = (1,0)$, $a_2 = (2,3)$, $b = (0,4)$

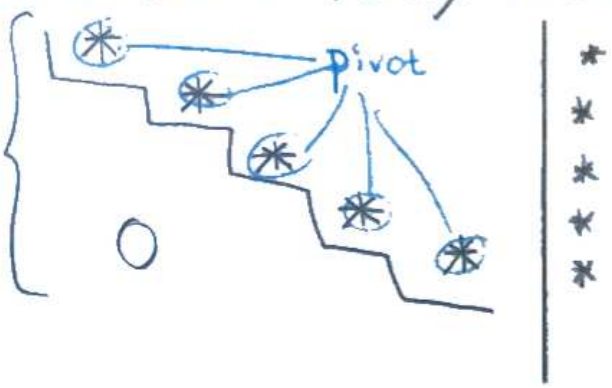
$$x_1 a_1 + x_2 a_2 = b \quad (*)$$

$$\iff x_1 (1,0) + x_2 (2,3) = (0,4) \quad (**)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ \quad\quad 3x_2 = 4 \end{cases}$$

Använd elementära radoperationer.

$(**) \iff$



trappformat

$(***)$

Obs 1: högst ett pivotelement per rad
$\Rightarrow$ # pivot $\leq n$ # rader

högst ett pivot per kolonn
$\Rightarrow$ # pivot $\leq p$ # kolonner

<u>Bevis 1b:</u>

Obs 2: $\left[a_1, \dots, a_p \text{ spänner upp } \mathbb{R}^n \right]$

$\overset{\Leftrightarrow}{\text{def}}$

$\forall b \in \mathbb{R}^n$ linjärkomb. av $a_1, \dots, a_p$

$\Leftrightarrow$

(*) lösbar för alla $\mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow$

(***) lösbart för alla högerled

$\Leftrightarrow$

pivotelement i varje rad i (***)

$\left[\text{\# pivot} = \text{\# rader} = n \right]$

$\Rightarrow$ (OBS 1 # pivot $\leq p$) $\underline{n \leq p}$.

dvs om $a_1, \dots, a_p$ spänner upp $\mathbb{R}^n$ så är $p \geq n$, dvs det behövs åtminstone n vektorer för att spänna upp $\mathbb{R}^n$,
dvs 1b)

$\square$

Bevis 1a:

Obs 3: $\left[a_1, \dots, a_p \text{ linjärt oberoende} \right]$

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

(*) med $b = 0$ har endast lösn. $x_1 = \dots = x_p = 0$

$\Longleftrightarrow$

(***) med högerkal 0 har endast lösn. $x_1 = \dots = x_p = 0$

$\Longleftrightarrow$

pivotelement i varje kolonn i (***)

$\Longleftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} \# \text{ pivot} \\ \# \text{ kolonn} = p \end{array} \right]$

$\Longrightarrow$ (Obs 1: # pivot $\leq n$) $p \leq n$

dvs om $a_1, \dots, a_p$ linjärt oberoende så är $p \leq n$

dvs påstående 1a $\square$

Bevis 1c:

Obs: $a_1, \dots, a_p$ bas

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$a_1, \dots, a_p$ spänner upp $\mathbb{R}^n$ och $\overset{\text{OBS 2}}{\Longrightarrow}$ $p \geq n$

$a_1, \dots, a_p$ linjärt oberoende $\Longrightarrow$ $p \leq n$

Alltså om $a_1, \dots, a_p$ bas så är $\overset{\text{OBS 3}}{p = n}$, dvs 1c)

$\square$

② : Antag $\underline{p = n}$

Obs 4 : $a_1, \dots, a_n$ spänner upp $\mathbb{R}^n$

$$\overset{\text{obs 2}}{\Longleftrightarrow}$$

pivotelement i varje rad i (***)

$$\overset{\text{obs 2}}{\Longleftrightarrow}$$

pivot $= n$

$$\overset{p=n}{\Longleftrightarrow}$$

pivot $= p$

$$\overset{\text{obs 3}}{\Longleftrightarrow}$$

pivot i varje kolonn i (***)

$$\overset{\text{obs 3}}{\Longleftrightarrow}$$

$a_1, \dots, a_n$ linjärt oberoende

<u>Slutsats:</u>

[$a_1, \dots, a_n$ spänner upp $\mathbb{R}^n$]

$$\overset{\text{obs 4}}{\Longleftrightarrow}$$

[$a_1, \dots, a_n$ linjärt oberoende]

$$\Longleftrightarrow$$

$a_1, \dots, a_n$ spänner upp $\mathbb{R}^n$ och linjärt ober.

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$$

[$a_1, \dots, a_n$ bas]

$\square$

Matriser (kap. 7)

Anm. · koefficienterna i ett linjärt ekvationssystem kan ses som en matris.

· matriser kan ses som funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^n$ (linjära avbildningen kap. 8)

Definition

En (reell) matris är ett rektangulärt schema av (reella) tal a_{ij}

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots, & a_{mn} \end{bmatrix}$$

· A är av typ $m \times n$, där
n = # kolonner
m = # rader

· a_{ij} matriselement på plats:
rad i
kolonn j

Ex: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -7 \end{bmatrix}$ typ 2×3 , $a_{22} = 1$, $a_{13} = 3$

Räkneoperationer

- Addition om $A = (a_{ij})$ och $B = (b_{ij})$ har samma typ $m \times n$ så definieras

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

- Multiplikation med λ (skalär): $(\lambda \in \mathbb{R})$

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & & \\ \lambda a_{m1} & & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

Fö 11

Multiplikation

Om A typ $m \times n$ med radien
$\alpha_j = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn})$
och B typ $n \times p$ med kolonner
$b_k = (b_{1k}, \dots, b_{pk})$
så definieras produkten AB som

$$AB = \begin{bmatrix} — \alpha_1 — \\ — \alpha_2 — \\ \vdots \\ — \alpha_m — \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & & | \\ b_1 & b_2 & \dots & b_p \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 b_1 & \alpha_1 b_2 & \dots & \alpha_1 b_p \\ \alpha_2 b_1 & \alpha_2 b_2 & \dots & \\ \vdots & & & \\ \alpha_m b_1 & & \dots & \alpha_m b_p \end{bmatrix}$$

dvs element $\underset{\text{rad } j}{(AB)_{jk}} \sum_{l=1}^{n} a_{jl} b_{lk}$
kolonn k

Obs: AB är av typ $\underset{\#\text{ rader}}{m} \times \underset{\#\text{ kolonner}}{p}$

Ex:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- Vilka matriser kan adderas?

$$A + C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

• Terminologi: C kallas för <u>nollmatrisen</u> av typ 2×3, betecknas $\mathbb{O}$. Obs: $A + \mathbb{O} = A$

$$B + E = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

• Terminologi: En matris av typ $n\times n$ kallas <u>kvadratisk.</u>

$A + A$, $D + D$, etc. för addition krävs <u>samma typ.</u>

– Vilka matriser kan multipliceras?

$B\cdot B$, $D\cdot D$, $E\cdot E$

$$B\cdot E = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 2\cdot 1 & 2\cdot 1 + 2\cdot 0 \\ 1\cdot 1 + 3\cdot 1 & 1\cdot 1 + 3\cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$E\cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + 1\cdot 1 & 1\cdot 2 + 1\cdot 3 \\ 1\cdot 2 + 0\cdot 1 & 1\cdot 2 + 0\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Obs: $BE \neq EB$, Matrismultiplikation är ej kommutativ: i allmänhet $AB \neq BA$

$$AD = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} = A$$

• Terminologi: En kvadratisk matris på formen $\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$ kallas <u>enhetsmatris</u> (av typ $n\times n$), betecknas I.

Obs: $AI = A$

(moraliskt. I "etta" vid matrismult.

I vårt ex: $D \cdot A \overset{?}{=}$ ej def.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I \qquad A \qquad = A$$

Räknelagar för matriser (kap. 7.2)

Sats (1, s. 120-121)

- Addition:

(i) $B + A = A + B$ (kommutativitet)

(ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (associativitet)

(iii) $A + \mathbb{0} = A$

- Multiplikation:

(iv) $\lambda(\mu A) = \lambda\mu A$

(v) $1 \cdot A = A$

(vi) $0 \cdot A = \mathbb{0}$

(vii) $\lambda \cdot \mathbb{0} = \mathbb{0}$

(viii) $A + (-1)A = \mathbb{0}$

(ix) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

(x) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

(distributivitet)

- Matrismult:

(xi) $(AB)C = A(BC)$ (associativitet)

(xii) $(A+B)C = AC + BC$ (distributivitet)

(xiii) $A(B+C) = AB + AC$

(xiv) $IA = AI = A$

(xv) $\mathbb{0}A = A\mathbb{0} = \mathbb{0}$

Underförstått att alla matriser här har typ så att add. och mult. är definierade.

Obs: $AB \neq BA$ i allmänhet

Bevis

använd def av addition och multiplikation (med skalär) + motsvarande räknelagar för reella tal övn.

Bevis av (xi): Visa att $(AB)C = A(BC)$

Obs: om produkterna är def. så A, B, C vara av typ $m \times p$, $p \times q$, resp $q \times n$, för några $m, p, q, n \in \mathbb{N}$

$$((AB)C)_{ij} \underset{\text{def } (AB)C}{=} \sum_{k=1}^{q} (AB)_{ik} c_{kj} \underset{\text{def } AB}{=} \sum_{k=1}^{q} \left(\sum_{l=1}^{p} a_{il} b_{lk} \right) c_{kj} =$$

ändliga summor, ordn. spelar ingen roll

$$= \sum_{l=1}^{p} a_{il} \left(\sum_{k=1}^{q} b_{lk} c_{kj} \right) \underset{\text{def } BC}{=} \sum_{l=1}^{p} a_{il} (BC)_{lj} \underset{\text{def } A(BC)}{=} (A(BC))_{ij}$$

$\square$

Transponat

Def: Transponat av $(m \times n)$-matriser

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} — & \alpha_1 & — \\ & \vdots & \\ — & \alpha_m & — \end{bmatrix}$$ är

$n \times m$-matrisen

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_m \\ | & & | \end{bmatrix}$$

Moraliskt: rader blir kolonner och vice versa

Om $A^T = A$ sägs A vara <u>symmetrisk.</u>

Ex:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

kallas <u>radvektor</u> kallas <u>kolonnvektor</u>

Ex: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ symmetrisk

Sats (2, s. 124)

(i) $(A^T)^T = A$

(ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(iii) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$

Bevis: Övn

Ex: Visa att $A^T A$ är symmetrisk!

$$(A^T A)^T \underset{(iv)}{=} A^T (A^T)^T \underset{(i)}{=} A^T A$$

Alltså $(A^T A)^T = A^T A$

Alltså $A^T A$ symmetrisk.

Matriser och linjära ekvationssystem (kap 7.4)

Påstående: Följande är ekvivalenta sätt att beskriva ett linjärt ekvationssystem.

Ekv. System:

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Vektorekvation:

(**) $x_1 \mathbb{a}_1 + \dots + x_n \mathbb{a}_n = \mathbb{b}$

där $\mathbb{a}_j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})$

A's kolonner, $\mathbb{b} = (b_1, \dots, b_m)$

Matrisekvationer: $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$, där

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \dots & & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbb{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (***)$$

<u>Bevis</u> (*) $\Leftrightarrow$ (***)

$$A\mathbb{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}}^{A\mathbb{x}}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \mathbb{b}$$

Varje matriselement motsvarar en ekv. i (*)

(**) $\Leftrightarrow$ (***)

Obs: $A\mathbb{x} = x_1 \mathbb{a}_1 + x_2 \mathbb{a}_2 + \dots + x_n \mathbb{a}_n$

om identifierar $\mathbb{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$ etc.

Alltså $\underset{(***)}{A\mathbb{x} = \mathbb{b}} \Leftrightarrow \underset{(**)}{x_1 \mathbb{a}_1 + \dots + x_n \mathbb{a}_n = \mathbb{b}}$

Fö 12

$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$

$\Leftrightarrow \quad x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = \mathbb{b}$

om $A = \begin{bmatrix} | & & | \\ a_1 & \dots & a_n \\ | & & | \end{bmatrix}$

<u>När är LES $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ lösbara? A $m \times n$</u>

Låt $A = \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ a_1 & \dots & a_n \\ | & & | \end{bmatrix}}_{n} \Big\} m$

<u>Obs 1:</u> $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ lösbart för alla $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^m$

$\Leftrightarrow \quad a_1, \dots, a_n$ spänner upp $\mathbb{R}^m$

<u>Obs 2:</u> $A\mathbb{x} = \mathbb{0}$ har endast den triviala lösn. $\mathbb{x} = \mathbb{0}$

$\Leftrightarrow x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = \mathbb{0}$ har endast trivial lösning

$\Leftrightarrow a_1, \dots, a_n$ linjärt oberoende.

Detta ger oss en omformulering av bassatsen.

<u>Sats</u> (s 127, huvudsatsen)

Låt A vara $m \times m$-matris.

Då $A\mathbb{x} = \mathbb{0}$ har endast triv. lösn $\mathbb{x} = 0$

$\Leftrightarrow A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ lösbart $\forall \mathbb{b} \in \mathbb{R}^m$

$\Leftrightarrow$ A's kolonner $a_1, \dots, a_n$ bas för $\mathbb{R}^m$

$\Leftrightarrow a_1, \dots, a_m$ spänner upp $\mathbb{R}^m$ Obs 1!

$\Leftrightarrow a_1, \dots, a_m$ linjärt oberoende. Obs 2!

Bevis: bassatsen

Att lösa $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ - matrisinvers

- om har $ax = b$, $a \neq 0$
  så är lösn. $x = \frac{b}{a}$

- För att lösa $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ vill "dela med" A

$$\mathbb{x} = \frac{1}{A}\mathbb{b}$$

invers till A

Definition:

En kvadratisk matris A sägs vara <u>inverterbar</u> om det finns en matris B så att

$$AB = BA = I$$

B sägs vara (multiplikativ) <u>invers</u> till A, betecknas A^{-1}

<u>Obs:</u> om A är typ $n \times n$ så är A^{-1} av typ $n \times n$

Ex: Är

$A = [7]$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

inverterbara? Bestäm isf inversen

- A: $A^{-1} = \left[\frac{1}{7}\right]$

B: $B^{-1} = B$, ty $BB = I \cdot I = I$

C: ej inv.bar. För att se det; antag $\exists C^{-1}$
Då är $C^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ för några $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Nu $C \cdot C^{-1} = I$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obs: på plats 2,2 har ekv. $0 = 1$
alltså lösn saknas
Alltså C ej invertbar

Påstående (Lemma 2, s. 129)

Om A har en invers, så är den entydigt bestämd.

Bevis

Antag B och B' är invers till A

Då $B = BI \underset{\substack{I = AB' \\ \text{ty } B' \text{ invers till } A}}{=} B(AB') \underset{\substack{\text{matrismult.} \\ \text{associativ}}}{=} (BA)B' = IB' = B'$

Alltså inversen till A entydigt bestämd.

$\square$

Sats (4, s. 130)

Om A, B inverterbara, så är A^{-1}, A^T, AB inverterbara.

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$

(ii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

(iii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Bevis (iii)

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$

på samma sätt $(B^{-1}A^{-1})AB = I$

Alltså är $B^{-1}A^{-1}$ är AB's invers

$\square$

Invers och LES

Sats $\overset{(n\times n)}{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ lösbar alla $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$
$\Leftrightarrow$ A inverterbar

Bevis:

$\Leftarrow$ om A inverterbar så har $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ lösningen
$[\mathbb{x} = I\mathbb{x} = A^{-1}A\mathbb{x} = A^{-1}\mathbb{b}]$

$\square$

För beviset av $\Rightarrow$, behöver

Vänster- och högerinvers

Def: A typ $m \times n$
V vänsterinvers till A om $VA = I$

H högerinvers till A om $HA = I$

? Vari har V och H för typ?

V typ $n \times m$
H typ $n \times m$

$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad V = [1\ 0\ 0]$ $\quad V = [3\ -2\ 0]$

$VA = [1\ 0\ 0]\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [1]$ $\quad VA = [3\ -2\ 0]\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [1]$

Obs: Vänster- och högerinvers ej unik i allmänhet.

H:3 Antag $H = [a\ b\ c]$

$$AH = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [a\ b\ c] = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\| $$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ekv. ej lösbar

Alltså högerinvers saknas!

<u>Proposition:</u> (Lemma 3, s. 132)

A $m \times n$

① A har vänsterinvers

$\Rightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har endast lösn. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

② $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbar $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ A har högerinvers

<u>Bevis</u> ①

Multiplicera ekv. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ med vänsterinversen V.

Då $\underbrace{VA}_{= I\mathbf{x} = [\mathbf{x}]}\mathbf{x} = V\mathbf{0} \; [= \mathbf{0}]$

<u>Bevis</u> ②

Behöver följande OBS:

A $m \times n$ B $n \times p$

$$AB = \begin{bmatrix} — & \alpha_1 & — \\ & \vdots & \\ — & \alpha_m & — \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbb{b}_1 & \cdots & \mathbb{b}_p \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \cdot b_1 & \cdots & \alpha_1 \mathbb{b}_p \\ \vdots & & \\ \alpha_m b_1 & \cdots & \alpha_m \mathbb{b}_p \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \cdot \mathbb{b}_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \cdot \mathbb{b}_1 \end{bmatrix} = A\mathbb{b}_1 = \begin{bmatrix} — & \alpha_1 & — \\ & \vdots & \\ — & \alpha_m & — \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ \mathbb{b}_1 \\ | \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Beviset

Antag $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ lösbar för alla $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^m$

Låt $\mathbb{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ← plats i

Lös $A\mathbb{x} = \mathbb{e}_i$, $i = 1, \dots, m$ (dvs $A\mathbb{h}_i = \mathbb{e}_i$)

Kalla lösn. $\mathbb{h}_i$

Låt

$$H = \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbb{h}_1 & \cdots & \mathbb{h}_m \\ | & & | \end{bmatrix}$$

Nu $AH \overset{\text{obs}}{=} \begin{bmatrix} | & & | \\ A\mathbb{h}_1 & \cdots & A\mathbb{h}_m \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbb{e}_1 & \cdots & \mathbb{e}_m \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} = I$

Alltså A har en högerinvers. $\square$

Proposition

Antag att A $n \times n$

① A har vänsterinvers V

$\Rightarrow$ A inverterbar

$A^{-1} = V$

② A har högerinvers H

$\Rightarrow$ A inverterbar

$A^{-1} = H$

Bevis

① Antag A har vänsterinvers V

Då ger tidigare proposition att $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har endast lösning $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$\Leftrightarrow$ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbart alla $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$

lösbarhetssatsen matrisform

$\Rightarrow$ A har högerinvers H

tidigare prop.

Obs: $\boxed{V = VI = V(AH) = (VA)H = IH = H}$

Alltså $VA = I = AH = AV$

Alltså V invers till A

② Antag nu att A har högerinvers H.

Då $AH = I$

Detta kan ses som att A är en vänsterinvers till H.

Enligt ① är H inverterbar och $H^{-1} = A$,

dvs $AH = HA = I$

Alltså är A inverterbar med invers H. $\square$

Fö 13

Sats A $n \times n$

Då $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ lösbar $\forall \mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow$ A inverterbar

Bevis

($\Leftarrow$ Torsdags: $\mathbb{x} A^{-1} \mathbb{b}$)

Återstår $\Rightarrow$:

Minns: (del av) Prop. A

A $m \times n$: $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ lösbart $\forall \mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ A högerinvers

(del av) Prop B:

A $n \times n$: A högerinvers

$\Rightarrow$ A inverterbar

Bevis $\Rightarrow$

$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ lösbart $\forall \mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$

$\overset{\text{prop A}}{\Longrightarrow}$ A högerinvers

$\overset{\text{prop B}}{\Longrightarrow}$ A inverterbar

$\square$

Alltså är A inverterbar med invers H. $\square$

Fö 13

Sats A $n \times n$

Då $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbar $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow$ A inverterbar

Bevis

($\Leftarrow$ Torsdags: $\mathbf{x} A^{-1} \mathbf{b}$)

Återstår $\Rightarrow$:

Minns: (del av) Prop. A

A $m \times n$: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbart $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ A högerinvers

(del av) Prop B:

A $n \times n$: A högerinvers

$\Rightarrow$ A inverterbar

Bevis $\Rightarrow$

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbart $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$

$\overset{\text{prop A}}{\Longrightarrow}$ A högerinvers

$\overset{\text{prop B}}{\Longrightarrow}$ A inverterbar

$\square$

Beräkna A^{-1}:

Antag A $n \times n$

Betrackta ekv.syst. $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

Lös med Gausselimination

- Om lösn. saknas för allmänt, så A ej inverterbar
- Annars får lösningen $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}$

Ex Är $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ inverterbar?

Bestäm i så fall A^{-1}!

Vill lösa $A\mathbf{x} = \mathbf{y} = I\mathbf{y}$, dvs

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_1 & \cdot -3 \\ 3x_1 + 4x_2 = y_2 \end{cases}$$

matrisform

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] = [A \mid I]$$

koeff. framför x_i koeff. framför y_j

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_1 \\ -2x_2 = -3y_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2y_1 + y_2 \\ -2x_2 = -3y_1 + y_2 \quad \cdot -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2y_1 + y_2 \\ x_2 = \frac{3}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 \end{cases}$$

Slutsats

$$x = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} y$$

Alltså är A inverterbar och $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Ex: Är $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ inverterbar?

Bestäm i så fall A^{-1}!

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = y_1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$ - ej lösbart för godtyckligt y!

endast lösbart om $y_2 = 0$, dvs
$Ax = y$ ej lösbart $\forall y \in \mathbb{R}^n$, dvs
A ej inverterbar

Allmänt: skriv $Ax = y$ som

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 1 \end{array}\right]$$

Använd elementära radoperationer

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 \dots & 0 & c_{11} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & & \vdots & & \\ 0 & & 1 & c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{array}\right] = [I \mid A^{-1}]$$

- om ej lyckades $\longrightarrow$ A ej inverterbar
- annars: A inverterbar och $A^{-1} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$

Kolonn- och kolonnrum (kap 7.7)

- lösningar till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Låt A $m \times n$, $\mathbf{b}$ $m \times 1$

Ekvat.syst. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ $(\mathbf{x} = n \times 1)$

sägs vara $\begin{cases} \text{homogent om } \mathbf{b} = \mathbf{0} \\ \text{inhomogent om } \mathbf{b} \neq 0 \end{cases}$

Hur många lösningar har $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$?

Inhomogent: inga

Homogent: Alltid lösbart, den triviala lösn. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ alltid lösning. 1 lösn. / ∞ lösn.

Hur ser lösn. till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ut?

Ex. A: Minns allmänna lösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är på formen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} + s_1 \begin{bmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{1n} \end{bmatrix} + \ldots + s_k \begin{bmatrix} v_{k1} \\ \vdots \\ v_{kn} \end{bmatrix}$$

dvs $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + s_1\mathbf{v}_1 + \ldots + s_k\mathbf{v}_k$

där $s_1, \ldots, s_k \in \mathbb{R}$ parametern

- $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ linjärt oberoende
- $\mathbf{x}_p$ kallas partikulärlösning

Sätt $s_1 = \dots = s_k = 0$

Då $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p$. Alltså är $\mathbf{x}_p$ en lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Obs: $\mathbf{x} - \mathbf{x}_p$ lösning till homogena ekv. syst.

$A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) = A\mathbf{x} - A\mathbf{x}_p = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$

Sats (8, s. 141)

Låt $\mathbf{x}_p$ vara en lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Då $\mathbf{x}$ lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{x}$ är på formen $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_n$ där $A\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$

Bevis: övn.

Obs: I ex. A:

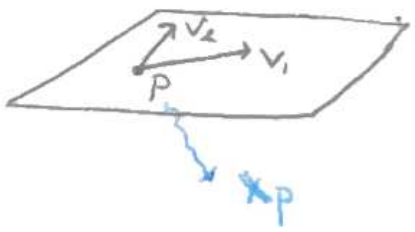
$\mathbf{x}_n = s_1\mathbf{v}_1 + \dots + s_k\mathbf{v}_k$

Def: Mängden av alla lösningar till $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kallas A's nollrum (eller kärnan till A (engelska kernel)), betecknas Noll(A) (Ker(A))

Obs: $\text{Noll}(A) \leq \mathbb{R}^n$

i Ex. A: $\text{Noll}(A) = \text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$

Geometri ex:



span(v_1, v_2)
$\rightsquigarrow$ Null(A)

Ex. B:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Bestäm Null(B)

För att göra det lös $Bx = 0$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{x} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

dvs.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

har lösn.

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = s_1 \\ x_4 = s_2 \end{cases}$$

$$x = s_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R}$$

Alltså $\underline{\text{Null}(B)} = \{\text{lösn. till } B\mathbb{x} = \mathbb{0}\} =$

$$= \left\{ s_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; s_1, s_2 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \underline{\text{span}((0,0,1,0),(0,0,0,1))} = (x_3, x_4 \text{ planet i } \mathbb{R}^n)$$

En delmänga till $\mathbb{R}^n$ på den här formen ($\text{span}(\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_k)$) kallas <u>underrum</u> (eller <u>delrum</u>) (engelska <u>subspace</u>) till $\mathbb{R}^n$.
Dimensionen av ett underrum är max # linjärt oberoende vektorer.
Dimensionen av Null(A) kallas <u>nolldimensionen av A</u>, betecknas <u>nolldim(A)</u>.

<u>Ex A:</u> $\text{Null}(A) = \text{span}(\underbrace{\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_k}_{\text{linj. ober.}})$
$\text{nolldim}(A) = k$

<u>Ex B:</u> $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

<u>nolldim B</u> $= \dim(\text{span}(0,0,1,0),(0,0,0,1)) = 2$

För vilka $\mathbb{b}$ är $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ lösbart?

Minns: $A\mathbb{x} = \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbb{a}_1 & \dots & \mathbb{a}_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | \\ x_1\mathbb{a}_1 + \dots + x_n\mathbb{a}_n \\ | \end{bmatrix}$

Alltså $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ lösbart omm $\mathbb{b}$ är på formen

$\mathbb{b} = x_1\mathbb{a}_1 + \dots + x_n\mathbb{a}_n$, dvs

$\mathbb{b}$ linjärkomb. av $\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_n$, dvs

$\mathbb{b} \in \text{span}(\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_n)$

<u>Definition</u>

- span $(\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_n)$ kallas A's <u>kolonnrum</u>, betecknas <u>Kolonn(A)</u>
- dim (Kolonn(A)) kallas <u>rang</u>, betecknas <u>rang(A)</u>

Obs: $\text{Kolonn}(A) \leq \mathbb{R}^n$, $0 \leq \text{rang}(A) \leq m, n$

$\text{Kolonn}(B) = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \leq \mathbb{R}^3$

$\text{rang}(B) = 2$ (ty 2 st linjärt ober. vektorer)

<u>Dimensionssatsen</u>

A $m \times n$ - matris

element. radop. $\longrightarrow$ T trappformat

Då

1) $\text{rang}(A) = \#$ pivot i T

2) $\text{nolldim}(A) = \text{kolonn i } A - \#$ pivot i T

Fö 14

Dimsatsen

A $m \times n$

T fås från A genom elementära radoperationer.

(säger $T \Leftrightarrow A$)

T trappformad

$\text{rang}(A) = \#\text{pivot i } T$

$\text{nolldim}(A) = n - \#\text{pivot i } T$

Bevis Lemma 1

Antag $A = \begin{bmatrix} | & & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & & | \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow A' = \begin{bmatrix} | & & | \\ a_1' & \cdots & a_n' \\ | & & | \end{bmatrix}$

Låt $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$

Då $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$ linj. ober.

$\Leftrightarrow a_{i_1}', \dots, a_{i_k}'$ linj. ober.

Ex: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$i_1 = 1$, $i_2 = 3$

Lemmat säger $a_{i_1} = (1, 0, 1)$, $a_{i_2} = (1, 1, 1)$ är linjärt oberoende omm

$a_{i_1}' = (1, 0, 0)$, $a_{i_2}' = (1, 1, 0)$

(Lemma 1)

Bevis:

Låt $\tilde{A} = \begin{bmatrix} | & & | \\ a_{i_1} & \dots & a_{i_k} \\ | & & | \end{bmatrix}$, $\tilde{A}' = \begin{bmatrix} | & & | \\ a'_{i_1} & \dots & a'_{i_k} \\ | & & | \end{bmatrix}$

Ex: $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\tilde{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Då klart att om A' fås genom elementär radop. på A så fås $\tilde{A}'$ genom (samma) elem. radop. på $\tilde{A}$.

dvs.

$(A \Leftrightarrow A') \Rightarrow (\tilde{A} \Leftrightarrow \tilde{A}')$

Nu $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$ linjärt ober.

$\Leftrightarrow \tilde{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har endast triv. lösn. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$\Leftrightarrow \tilde{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har endast triv. lösn. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$\Leftrightarrow a'_{i_1}, \dots, a'_{i_k}$ linjärt oberoende.

$\square$

Lemma 2:

Om $A \Leftrightarrow A'$ så $\text{rang}(A) = \text{rang}(A')$

Bevis

$\text{rang}(A) = \max \#$ linjärt oberoende kolonner i $A \overset{\text{Lemma 1}}{=}$

$= \max \#$ linjärt oberoende kolonner i $A' =$

$= \text{rang}(A')$

Bevis av dimsats

Bevis av ①

Betrakta $T = \begin{bmatrix} * & & & & \\ & * & & & \\ & & * & & \\ & & & * & \\ & & & & * \end{bmatrix} \Big\} r$

Antag att # pivot = r

Beteckna pivotkolonnen $\pi_1, \dots, \pi_r$

Ex: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \iff T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \pi_1 \quad \quad \pi_2 \end{array}$

Ska visa att $\pi_1, \dots, \pi_r$ bas för kolonn (T)

Låt $\tau = \begin{bmatrix} | & & | \\ \pi_1 & \dots & \pi_r \\ | & & | \end{bmatrix}$

$$\tau = \begin{bmatrix} * & & & & \\ & * & & & \\ & & * & & \\ & & & * & \\ & & & & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obs: τ pivot i varje kolonn

$\Rightarrow \tau \mathbf{x} = \mathbf{0}$ endast triv. lösn.

$\Rightarrow \pi_1, \dots, \pi_r$ linj. ober.

Obs: $\tau \mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbar för varje $\mathbf{b}$ på formen

$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ speciellt för varje kolonn i T. Alltså kolonn(T)"

span(π_1)

Alltså: $\pi_1, \ldots, \pi_r$ bas för kolonn(T)

$\underline{\text{rang}(A)} = \text{rang}(T) = \dim(\text{kolonn}(T)) =$

lemma 2

$=$ # element i en bas för $T = r = \underline{\text{\# pivot i } T}$

$\square$

Bevis av ②

$\text{Null}(A) = \{\mathbf{x},\ A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{x},\ T\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \text{Null}(T)$

element. radop. förändrar ej lösn. mängd

Minns: $T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ en parameter för varje fri variabel, dvs en parameter för varje kolonn utan pivot.

$\underline{\text{nolldim}(A)} = \text{nolldim}(T)$

$\text{nolldim}(T) = \dim(\text{Null}(T)) =$ # fria variabler $=$

$= \underline{n - \text{\# pivot i } T}$.

$\square$

Basbyte (kap. 2.5, 7.6)

Målet är att lösa uppgifter som

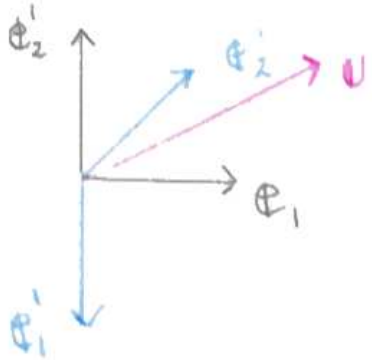
Ex A: Låt e_1, e_2 och e_1', e_2' basen för $\mathbb{R}^2$

Antag: $\begin{cases} e_1' = -e_2 \\ e_2' = e_1 + e_2 \end{cases}$

Antag u har koordinat

$(u_1, u_2) = (2, 1)$ i e_1, e_2

Bestäm us koord. i e_1', e_2'



Låt $e_1, \dots, e_n$ och $e_1', \dots, e_n'$ vara två baser för $\mathbb{R}^n$

Låt $s_j = (s_{1j}, \dots, s_{nj})$ vara koordinater för e_j' i basen $\{e_j\}$, dvs

$$\begin{cases} e_1' = s_{11} e_1 + \dots + s_{n1} e_n \\ e_2' = s_{12} e_1 + \dots + s_{n2} e_n \\ \vdots \\ e_s' = s_{1n} e_1 + \dots + s_{nn} e_1 \end{cases}$$

Minns att vektorekv.

$e_j' = s_{1j} e_1 + \dots + s_{nj} e_n$

kan skrivas:

$$\begin{bmatrix} | \\ \mathbf{e}_j \\ | \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{e}_1 & \dots & \mathbf{e}_n \\ | & & | \end{bmatrix}}_{E} \underbrace{\begin{bmatrix} s_{1j} \\ \vdots \\ s_{nj} \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}_j}$$

Minns också

$$AB = A \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{b}_1 & \dots & \mathbf{b}_p \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ A\mathbf{b}_1 & \dots & A\mathbf{b}_p \\ | & & | \end{bmatrix}$$

Alltså gäller

$$\underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{e}_1 & \dots & \mathbf{e}_n \\ | & & | \end{bmatrix}}_{E} \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{s}_1 & \dots & \mathbf{s}_n \\ | & & | \end{bmatrix}}_{S} = \begin{bmatrix} | & & | \\ E\mathbf{s}_1 & \dots & E\mathbf{s}_n \\ | & & | \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{e}_1' & \dots & \mathbf{e}_n' \\ | & & | \end{bmatrix}}_{E'}$$

Matrisen

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & \dots & s_{1n} \\ \vdots & & \\ s_{n1} & \dots & s_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{s}_1 & \dots & \mathbf{s}_n \\ | & & | \end{bmatrix}.$$

kallas <u>basbytematris</u>

Obs: E och E' inverterbara ty kolonnerna baser.
Alltså är $S = E^{-1} \cdot E'$ inverterbar.

Ex A: $\mathbf{s}_1 = (0, -1)$, $\mathbf{s}_2 = (1, 1)$
(koord. för $\mathbf{e}_1'$ i $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$)

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hur förändras koord. vid basbyte?

Sats (6, s. 137)

Låt $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, $\mathbf{e}_1', \dots, \mathbf{e}_n'$, S vara som ovan. Givet $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, låt $(x_1, \dots, x_n)$ och $(x_1', \dots, x_n')$ vara koord. i basen $\{\mathbf{e}_i\}$ resp. $\{\mathbf{e}_j'\}$

Då $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$

Anm: $\begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = S^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Bevis

Vi har

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{e}_1 & \cdots & \mathbf{e}_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = x_1' \mathbf{e}_1' + \dots + x_n' \mathbf{e}_n' = \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{e}_1' & \cdots & \mathbf{e}_n' \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = E' \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} =$$

minns från ovan

$$= ES \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$$

Alltså $E \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = ES \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Mult. från vänster med E^{-1}. Då får vi

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$$

$\square$

1 x A

Påstående $S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Verifiera detta!

Minns: u hade koord. $(2,1)$ i e_1, e_2

Svar: $\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = S^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}}$

Fö 15

Ortogonala matriser

Def:

A typ $n \times n$ är ortogonal om dess kolonner utgör en ortonormerad bas för $\mathbb{R}^n$.

Karakterisering av ortogonala matriser

Sats (7, s. 139)

A $n \times n$. Följande påståenden är ekvivalenta

(i) A är ortogonal

(ii) radvektorerna i A är en ON-bas för $\mathbb{R}^n$

(iii) $A^T A = I$

(iv) $AA^T = I$

(v) $= A^{-1} = A^T$

Ex: Visa att (i) $\Rightarrow$ (iii)

Skriv $A = \begin{bmatrix} | & & | \\ a_1 & \dots & a_n \\ | & & | \end{bmatrix}$

Då innebär A ortogonal att $a_i \cdot a_j = \begin{cases} 1 & \text{om } i=j \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

$$A^T A = \begin{bmatrix} - & a_1 & - \\ & \vdots & \\ - & a_n & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & | \\ a_1 & \dots & a_n \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot a_1 & \dots & a_1 \cdot a_n \\ \vdots & & \\ a_n \cdot a_1 & & a_n \cdot a_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} = I$$

ex: I är ortogonal, ty vektorerna ON-bas

$I^T I = I I = I$

Ex: $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 2b & 2b \end{bmatrix}$ ortogonal?

$$A^T A = \begin{bmatrix} a & 2b \\ 0 & 2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 2b & 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + 4b^2 & 4b^2 \\ 4b^2 & 4b^2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

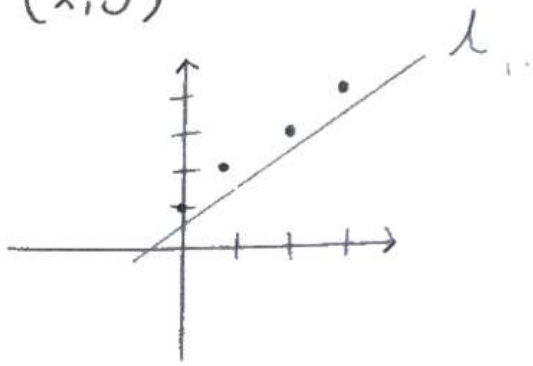
Alltså måste $4b^2 = 0$ och $4b^2 = 1$ Alltså nej!

Minsta kvadratmetoden (kap 7.8)

Approximativ lösning till (överbestämda) ekv.syst. $(m > n)$

$$\begin{bmatrix} | & & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Ex: Hitta en linje som går genom pkt $(0,1), (1,0), (1,2), (2,3)$



Att pkt ligger på en linje $l: y = ax + b$ innebär att ekv.syst.

$$\begin{array}{l} (0,1) \\ (1,0) \\ (1,2) \\ (2,3) \end{array} \begin{cases} 0+b=1 \\ a+b=0 \\ a+b=2 \\ 2a+b=3 \end{cases} \qquad (*)$$

har lösning

Obs: Från $(*)$ eller bilden att lösning saknas

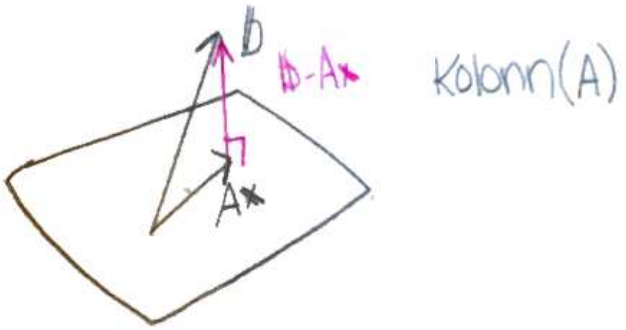
<u>Minsta kvadratmetoden</u> går ut på att hitta $\mathbb{x}$ som minimerar $|A\mathbb{x}-\mathbb{b}|$

i Ex $(*)$ $\Leftarrow$ $\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\mathbb{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbb{b}}$

Obs: $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^m$ (i ex: $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^4$)

$A\mathbb{x} \in \text{Kolonn}(A) \leq \mathbb{R}^m$

(i ex span$((0,1,1,2,), (1,1,1,1))$ geometriskt plan i $\mathbb{R}^4$)



Obs: att $|\mathbb{b}-A\mathbb{x}|$ minimal om $\mathbb{b}-A\mathbb{x}$ ortogonal mot Kolonn(A), dvs om $A\mathbb{x}$ ortoproj. av $\mathbb{b}$ p< Kolonn(A)

Vill hitta $\mathbb{x}$ så att $\mathbb{b} - A\mathbb{x}$ orto. mot kolonn$(A) = \text{span}(\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_n)$, dvs

$\mathbb{a}_i \cdot (\mathbb{b} - A\mathbb{x}) = 0$, dvs

$$\begin{bmatrix} — \mathbb{a}_1 — \\ \vdots \\ — \mathbb{a}_n — \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ \mathbb{b} - A\mathbb{x} \\ | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{a}_1 (\mathbb{b} - A\mathbb{x}) \\ \vdots \\ \mathbb{a}_n (\mathbb{b} - A\mathbb{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

dvs, $A^T(\mathbb{b} - A\mathbb{x}) = \mathbb{0}$

$\iff A^T A\mathbb{x} = A^T \mathbb{b}$

Vill alltså hitta $\mathbb{x}$ som uppfyller $A^T A\mathbb{x} = A^T\mathbb{b}$

Denna ekv. kallas <u>normalekvationen</u>.

Obs: Om A är inverterbar säger en lösning till $A^T A\mathbb{x} = A^T\mathbb{b}$ en lösn. till $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$

<u>Proposition</u>

Om $\bar{\mathbb{x}}$ är en lösn. till $A^T A\mathbb{x} = A^T\mathbb{b} \, (*)$, så är

$|A\bar{\mathbb{x}} - b| = \min_{\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n} |A\mathbb{x} - \mathbb{b}|$

<u>Bevis</u>

Tag $\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n$. Då $|A\mathbb{x} - b|^2 = |\overbrace{(A\mathbb{x} - A\bar{\mathbb{x}})}^{u} + \overbrace{(A\bar{\mathbb{x}} - \mathbb{b})}^{v}|^2 =$

$= |A\mathbb{x} - A\bar{\mathbb{x}}|^2 + 2(A\mathbb{x} - A\bar{\mathbb{x}})(A\bar{\mathbb{x}} - b) + |A\mathbb{x} - \mathbb{b}|^2 = \dots$

$[(A\mathbb{x} - A\bar{\mathbb{x}})(A\bar{\mathbb{x}} - \mathbb{b})] = (A\mathbb{x} - A\bar{\mathbb{x}})^T (A\bar{\mathbb{x}} - \mathbb{b}) =$

$= (A(\mathbb{x} - \bar{\mathbb{x}}))^T (A\bar{\mathbb{x}} - \mathbb{b}) = (\mathbb{x} - \mathbb{x})^T \underbrace{A^T (A\mathbb{x} - \mathbb{b})}_{=0} = 0$

$\bar{\mathbb{x}}$ uppfyller $(*)$

$$\ldots = \underbrace{|A\mathbb{x} - A\bar{\mathbb{x}}|^2}_{\geq 0} + |A\bar{\mathbb{x}} - \mathbb{b}|^2 \geq |A\bar{\mathbb{x}} - \mathbb{b}|^2$$

Alltså $|A\mathbb{x} - \mathbb{b}| \geq |A\bar{\mathbb{x}} - \mathbb{b}|$ $\square$

Ex: Hitta en minsta kvadratlösning till

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Vill alltså lösa $A^T A\mathbb{x} = A^T \mathbb{b}$ där

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Obs: $A^T A$ inv.bar. Kan kolla att

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Alltså

$$\mathbb{x} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbb{b} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} a \\ b \end{array}$$

Detta motsvarar linjen l:

$$y = x + \frac{1}{2}$$

Minsta kvadratmetoden minimerar
$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$

Linjära avbildningar

En fkt $f: X \to Y$ är $(\mathbb{R})$ linjär om

① $f(x+x') = f(x) + f(x')$

② $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Alternativt kan sammanfatta ① och ② som

$f(\lambda x + \lambda' x') = \lambda f(x) + \lambda' f(x')$

Ex: vilka av följande funktioner är linjära?

$f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x+1$

$f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = x^2$

$f_3: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbb{x} \longmapsto A\mathbb{x}$

f_1: ej linjär ty $f_1(x+x') = x + x' + 1$
$f_1(x) + f_1(x') = x + 1 + x' + 1 = x + x' + 2$ $\neq$

f_2: ej linjär ty $f_2(3x) = (3x)^2 = 9x^2 = 9f_2(x) \neq 3f_2(x)$

f_3: linjär!

Fö 16

Ex: Låt F: deriverbara fktionen $\longrightarrow$ fktionen

$F(f) = f'$

Är F linjär?

$F(\lambda f + \tilde{\lambda}\tilde{f}) = (\lambda f + \tilde{\lambda}\tilde{f})' = \lambda f' + \tilde{\lambda}\tilde{f}' =$

$= \lambda F(f) + \tilde{\lambda} F(\tilde{f})$

Ja! Derivering linjär

Ex: $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$\mathbf{x} \longmapsto A\mathbf{x}$

där A $m \times n$-matris

linjär?

räkneregler matrismult + add.

$f(\lambda \mathbf{x} + \lambda' \mathbf{x}') = A(\lambda \mathbf{x} + \lambda' \mathbf{x}') = \lambda A\mathbf{x} + \lambda' A\mathbf{x}' =$

$= \lambda f(\mathbf{x}) + \lambda' f(\mathbf{x}')$

Alltså f linjär!

Bevis första halvan av Satsen

Sats (1, s. 166)

① En avbildning $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ är linjär omm den är på formen $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ för någon $m \times n$-matris A.

② Givet en linjär avbildning f, så

$A = \begin{bmatrix} | & & | \\ f(e_1) & \dots & f(e_n) \\ | & & | \end{bmatrix}$ (*) där $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, ...

A säg s vara f's <u>avbildningsmatris</u>, skriver A_f. Omvänt kan beteckna den linjära avb. vars matris är A, med f_A.

<u>Ex:</u> Bestäm av.bild.matris för den linjära avb. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y) = 7x + 3y$ (övn. visa att den är linjär)

$f(e_1) = f(1,0) = 7 + 0 = 7$

$f(e_2) = f(0,1) = 0 + 3 = 3$

$$A = \begin{bmatrix} | & | \\ f(e_1) & f(e_2) \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Koll: $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 7x + 3y = f(x,y)$

<u>Bevis</u> av sats

Säg i ex ovan att $\mathbf{x} \longmapsto A\mathbf{x}$ är linjär.

För att visa omvändningen, antag f linjär och låt A vara def. genom (*)

Vill visa $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$

Obs 1: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} =$

$= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

Obs 2: $A\mathbf{e}_j = \begin{bmatrix} | & & | & & | \\ \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_j & \dots & \mathbf{a}_n \\ | & & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{plats } j \\ \\ \\ \\ \end{matrix} =$

$$= \begin{bmatrix} | \\ \mathbf{a}_j \\ | \end{bmatrix} \overset{\text{def av } (*)}{=} \begin{bmatrix} | \\ f(\mathbf{e}_j) \\ | \end{bmatrix}$$

Det följer nu att

$$A\mathbf{x} \underset{\text{obs 1}}{=} A(x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) \underset{\substack{\text{räkneregler} \\ \text{för matris}}}{=} x_1 \cdot A\mathbf{e}_1 + \dots + x_n \cdot A\mathbf{e}_n =$$

$$\underset{\text{obs 2}}{=} x_1 f(\mathbf{e}_1) + \dots + x_n f(\mathbf{e}_n) \underset{f \text{ linjär}}{=} f(x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) \underset{\text{obs 1}}{=}$$

$$= f(\mathbf{x})$$

Slutsats:

f linjär $\Rightarrow$ f på formen $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$
där A ges av (A)

$\square$

Ex: linjära avb.

- skalning
- ortogonal projektion
- spegling
- rotation

<u>Skalning:</u>

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\mathbf{x} \longmapsto \lambda \mathbf{x}, \quad \lambda > 0$

Ex: $\mathbf{x} \longmapsto 3\mathbf{x}$

Matris?

$$A = \begin{bmatrix} | & & | \\ f(\mathbf{e}_1) & \dots & f(\mathbf{e}_n) \\ | & & | \end{bmatrix}$$

$$f(\mathbf{e}_1) = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f(\mathbf{e}_2) = \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

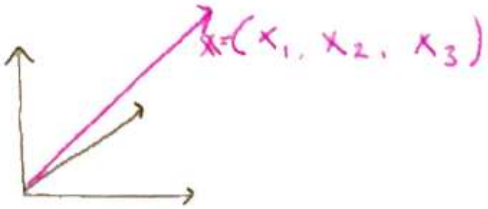
$$f(\mathbf{e}_n) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda \end{bmatrix}$$

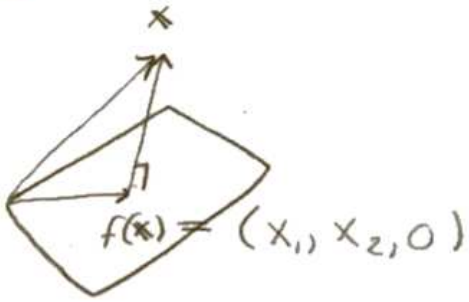
$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda \end{bmatrix} = \lambda I$$

<u>Ortogonal projektion</u> (på plan genom origo)

Ex: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\mathbf{x} \longmapsto$ ortogonal proj. av $\mathbf{x}$ på $(x_1 x_2)$-planet





Matris:

$f(\mathbf{e}_1) = f(1,0,0) = (1,0,0) = \mathbf{e}_1$

$f(\mathbf{e}_2) = f(0,1,0) = (0,1,0) = \mathbf{e}_2$

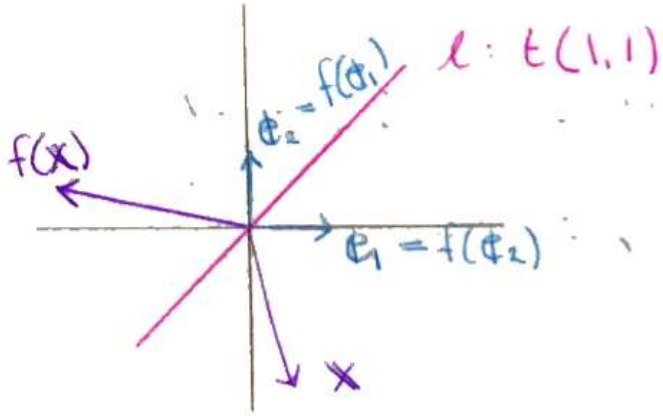
$f(\mathbf{e}_3) = f(0,0,1) = (0,0,0) = \mathbf{0}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Spegling (i linje/plan genom origo)

Ex: $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\mathbf{x} \longmapsto$ speglingen av $\mathbf{x}$ i linjen $l: t(1,1)$ $(t \in \mathbb{R})$

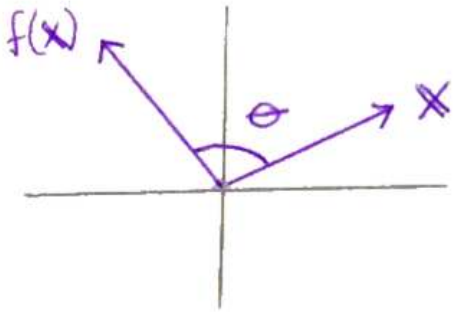


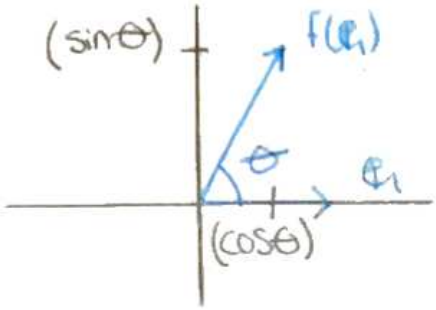
$$\begin{matrix} f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2 \\ f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 \end{matrix} \implies A = \begin{bmatrix} | & | \\ \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Rotation

Ex: $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\mathbf{x} \longmapsto \mathbf{x}$ roterad θ radianer moturs

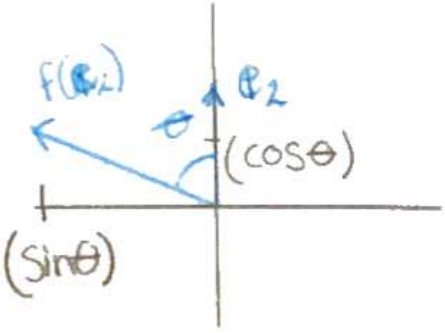




Moturs:

$f(\mathbf{e}_1) = (\cos\theta, \sin\theta)$

$f(\mathbf{e}_2) = (-\sin\theta, \cos\theta)$



$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Definition

En linjär avbildning är en isometri om $|f(\mathbf{x})| = |\mathbf{x}|$, för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

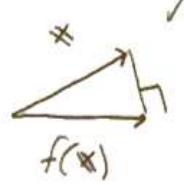
Vi kan visa att f isometri omm A_f ortogonal (se s. 174-175)

Vilka av föregående exempel är isometrier?

- Skalning:

$\mathbf{x} \longrightarrow \lambda\mathbf{x}$ isometri omm $|\lambda| = 1$

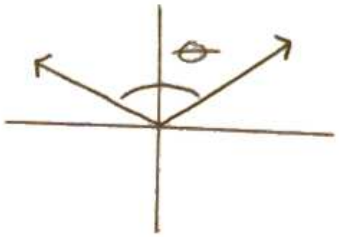
- Orto. proj:



ej isometri

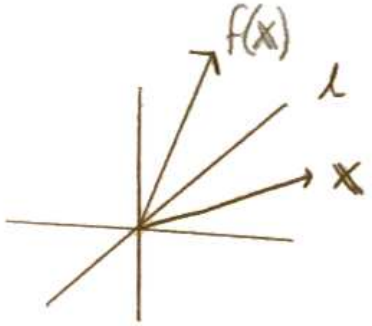
$|f(\mathbf{x})| \leq |\mathbf{x}|$ med likhet omm $\mathbf{x}$ parallell med det vi projicerar på

- Rotation:



isometri!

- Spegling:



isometri!

Basbyten (kap. 8.5)

Def:

Om $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linjär avb.
$\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ bas för $\mathbb{R}^n$ och
$\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m$ bas för $\mathbb{R}^m$
är avb.matrisen för f map baserna $\{\mathbf{e}_j\}, \{\mathbf{f}_j\}$
den matris A som uppfyller

$$f: \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\text{koord. i } \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n} \longmapsto A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}}_{\text{koord. i } \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m}$$

Obs: Avb.matrisen för f (def tidigare) är avb.mat. för f map baserna

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och}$$

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{f}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(standardbaser)

Sats (6, s. 185)

Låt $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ linj. avb.

A avb. mat. map $\{\mathbf{e}_j\}$ och $\{\mathbf{\varepsilon}_j\}$

så är avb. mat. map $\{\mathbf{e}_j'\}$, $\{\mathbf{\varepsilon}_j'\}$

$$A' = S_\varepsilon^{-1} A S_e$$

där S_ε och S_e basbytesmatriser:

$$\left(\begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{e}_1' & \dots & \mathbf{e}_n' \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{e}_1 & \dots & \mathbf{e}_n \\ | & & | \end{bmatrix} S_e \right)$$

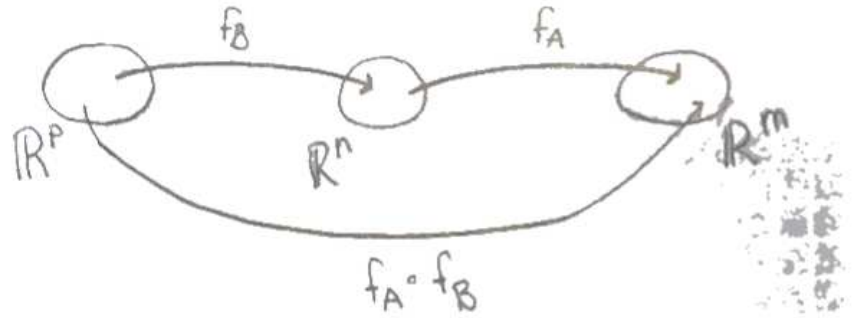
Fö 17

Sammansättning av lin. avb.

Sats (4, s. 180)

Om $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ och
$f_B : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ är lin. avb., så är sammansättn.
$f_A \circ f_B : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ linjär.

Om f_A och f_B har matris A och B,
så gäller att $f_A \circ f_B$ har matris AB.



Anm:

A typ $m \times n$
B typ $n \times p$
AB typ $m \times p$

Bevis

$$f_A \circ f_B(\mathbf{x}) = f_A(f_B(\mathbf{x})) = f_A(B\mathbf{x}) = A(B\mathbf{x}) = (AB)\mathbf{x}$$

Alltså $f_A \circ f_B$ linjär och dess matris är AB

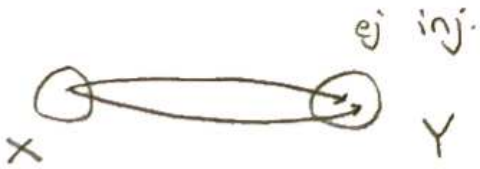
$\square$

Injektiva, surjektiva, bijektiva linj. avb.

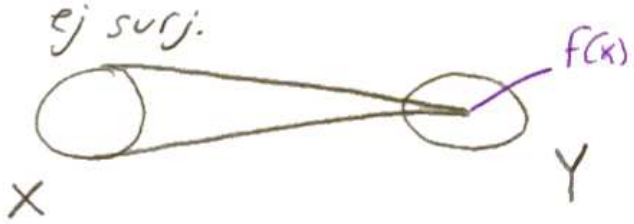
Minns: att

$f: X \longrightarrow Y$

- injektiv om $\forall y \in Y$ finns högst ett $x \in X$ så att $f(x) = y$



- Surjektiv: $f(X) = Y$,
dvs $\forall y \in Y$ finns åtminstone ett $x \in X$ så att $f(x) = y$



- bijektiv (eller inverterbar) om injektiv och surjektiv, dvs $\forall y \in Y$, så finns exakt ett $x \in X$ så $f(x) = y$

Inversen till $f: X \to Y$ är en fkt $f^{-1}: Y \to X$ som uppfyller att $f \circ f^{-1}: Y \longrightarrow Y$ är id Y
$f^{-1} \circ f: X \to X$ är id X

- f^{-1} entydigt bestämd om den finns
- f har en invers omm f bijektiv

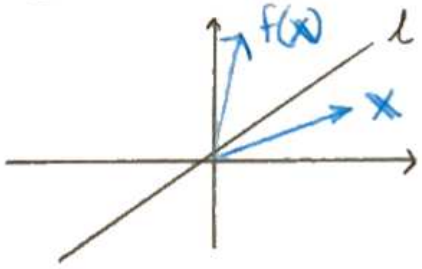
Ex: Vilka linjära avb. är inj/surj./bij.? Om bij. bestäm f^{-1}.

Avbild

- Skalning: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$
  med $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \mathbf{x} \longmapsto \lambda \mathbf{x}$

- Projektion: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
  på (x_1, x_2)
  planet $(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1, x_2)$

- Spegling i l: $t(1, 1, 1)$



- parametrisering av linjen l: $t\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^3$
  $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$
  $t \longmapsto t\mathbf{v} = t(v_1, v_2, v_3)$

Matris

- Skalning: $\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}$ $n \times n$

- projektion: $\begin{bmatrix} | & | & | \\ f\mathbf{e}_1 & f\mathbf{e}_2 & f\mathbf{e}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 2×3

- Spegling i l: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

- parametrisering av linjen: $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$

$$\left([t] \mapsto \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} [t] = \begin{bmatrix} tv_1 \\ tv_2 \\ tv_3 \end{bmatrix} \right)$$

<u>Injektiva:</u>

- Skalning: Ja
- proj.: Nej, $f(x_1, x_2, 1) = f(x_1, x_4, 2)$
- Spegl. i l: Ja
- param. av l: Ja

<u>Surjektiva:</u>

- Skalning: Ja
- proj: Ja, ty tag ett godtyckl. $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Då $f(y_1, y_2, 0) = (y_1, y_2)$
- Spegling: Ja
- parametr: Nej, $f(\mathbb{R})$ är en linje i $\mathbb{R}^3 \neq$ hela $\mathbb{R}^3$

$f(\mathbb{R}^3)$ linje

Bijektiv:

- Skalning
- spegling i l

Invers f^{-1}

- Skalning: skaln. med $\frac{1}{\lambda}$

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\mathbf{x} \longmapsto \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

- spegling i l:

$f^{-1} = f$, kallas involution

När är $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ injektiv?

f_A inj

$\Leftrightarrow$ $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ högst en lösn.

$f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$

$\Leftrightarrow$ $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har endast triv. lösn. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Minns: om $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har en lösn. $\mathbf{x}_p$ varje lösn. till $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ på formen $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$, där $\mathbf{x}_h$ löser $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Null}(A) = \{0\}$

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{nulldim}(A) = 0$

$\Leftrightarrow$ A's kolonner linjärt oberoende

Speciellt:

$A = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \quad n \leq m$

<u>Vad är bilden (värdemängden) av $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$?</u>

$\mathbb{b} \in \mathbb{R}^m$ är i bilden $f_A(\mathbb{R}^n)$

$\Leftrightarrow f_A(\mathbb{x}) = A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ lösbart

$\Leftrightarrow \mathbb{b} \in \text{Kolonn}(A)$

dvs $f_A(\mathbb{R}^n) = \text{Kolonn}(A)$ (speciellt $\text{rang}(A) = \dim(f_A(\mathbb{R}^n))$)

<u>När är $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ surjektiv?</u>

f_A surj. om $f_A(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^m$

$\Leftrightarrow A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ lösbar $\forall \mathbb{b} \in \mathbb{R}^m$

$\Leftrightarrow \text{Kolonn}(A) = \mathbb{R}^m$

$\Leftrightarrow \text{rang}(A) = m$

Speciellt:

$A: \begin{bmatrix} & \end{bmatrix} \quad n \geq m$

<u>När är $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bijektiv?</u>

inj ger $n \leq m$

surj ger $n \geq m$

$\Rightarrow$ bij ger $n = m$, om f_A bij.

Minns: bassatsen på matrisform

Om A $n \times n$ så

$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ endast lösn. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ $\iff$ f_A inj.

$\Updownarrow$

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbart $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ $\iff$ f_A surj

$\Updownarrow$

A inverterbar

<u>Slutsats</u> (Sats 5, s. 184)

- f_A bijektiv $\iff$ A inverterbar
- Om $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, dvs A $n \times n$
  f_A inj. $\iff$ f_A surj. $\iff$ f_A inverterbar

(ny variant av bassatsen)

<u>Påstående</u>

$(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}$ $\qquad A : n \times n$

<u>Bevis</u>

$f_{A^{-1}} \circ f_A(\mathbf{x}) = f_{A^{-1}}(A\mathbf{x}) = A^{-1}A\mathbf{x} = I\mathbf{x} = \mathbf{x}$

Alltså $f_{A^{-1}} \circ f_A$ identiteten på $\mathbb{R}^n$

Kolla att $f_A \circ f_{A^{-1}}$ = identiteten på $\mathbb{R}^n$

Alltså f_A inverterbar med inversen $f_{A^{-1}}$ $\square$

Determinanter (kap 9)

Antag A $n \times n$

Determinanten av A betecknas $\det(A)$, eller $|A|$ är ett tal $\in \mathbb{R}$ som är ett mått på A's "storlek"

- $\det(A) = \pm$ (n-dim volymen av den n-dim parallellepipeden som $a_1, \dots, a_n$ spänner upp) =

$= \pm$ Volym ()

- $\det(A)$ = volymförändring (med tecken) under f_A

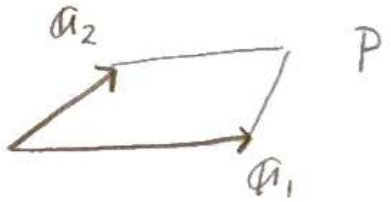
$$\mathrm{Vol}(f_A(S)) = \pm \det(A) \cdot \mathrm{Vol}(S)$$

Definition

$n=1$; $A = [a]$, $\det(A) = a$

$n=2$; $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

a_1 och a_2 spänner upp ett parallellogram P



$\text{area}(P) = |a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}|$

alltså: $|\det(A)| = \text{area}(P)$

- $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \geq 0$
  om a_1, a_2 pos. orient
- $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} < 0$
  om a_1, a_2 neg. orient

Fö 19

Sats

det linjär i kolonnen

Specialfall: ($n = 2$, linjär i första kolonnen)

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} + \lambda' a'_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} + \lambda' a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \lambda' \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Bevis

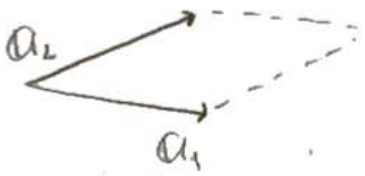
$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} + \lambda' a'_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} + \lambda' a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (\lambda a_{11} + \lambda' a'_{11}) a_{22} - a_{12}(\lambda a_{21} + \lambda' a'_{21}) =$$

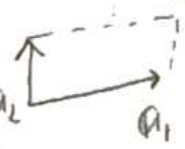
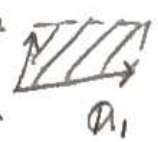
$$= \lambda a_{11} a_{22} + \lambda' a'_{12} a_{21} - \lambda a_{12} a_{21} - \lambda' a_{12} a'_{21}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \lambda' \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Geometriskt:

Ex: $\lambda > 0$ $\quad n = 2$

$$|A| = \begin{vmatrix} | & | \\ a_1 & a_2 \\ | & | \end{vmatrix} = \pm \text{area}\Big($$  $$\Big)$$

$$\begin{vmatrix} | & | \\ \lambda a_1 & \lambda a_2 \\ | & | \end{vmatrix} = \pm \text{area}\Big($$  $$\Big) = \pm \lambda \text{area}\Big($$  $$\Big) =$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} | & | \\ a_1 & a_2 \\ | & | \end{vmatrix}$$

Ex: $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$

$= 27\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Ex: A $n \times n$

$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

<u>Sats</u> (sats 3c, s. 200, sats 12)

Om två kolonner byter plats så ändrar determitanten tecken, dvs

$$\begin{vmatrix} \cdots & a_j & \cdots & a_k \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \cdots & a_k & \cdots & a_j & \cdots \end{vmatrix}$$

$\uparrow$ platsj $\quad$ $\uparrow$ platsk

<u>Specialfall $n=2$:</u>

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$$

<u>Bevis specialfall:</u>

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_{+} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

$$\|$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}$$

Eftersom $\det(A^T) = \det A$ så

Sats

- det linjär i varje rad

rad $i \rightarrow$ $\begin{vmatrix} - \\ \lambda a_i + \lambda' a_i' \\ - \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} - \\ a_i \\ - \end{vmatrix} + \lambda' \begin{vmatrix} - \\ a_i' \\ - \end{vmatrix}$

- det alternerande i rader

$$\begin{vmatrix} - & a_j & - \\ - & a_k & - \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} - & a_k & - \\ - & a_j & - \end{vmatrix}$$

Följdsats (sats 3 och e)

① Om två rader/kolonner är lika så $|A| = 0$

② Adderar man en multipel av en rad/kolonn till en annan så ändras ej det

③ A ej inv. bar
$\Rightarrow \det A = 0$

Bevis ①

Antag $a_j = a_k$

$$|A| = \begin{vmatrix} \cdots & a_j & \cdots & a_j & \cdots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \cdots & a_j & \cdots & a_j & \cdots \end{vmatrix} = -|A|$$

byt plats

Alltså

$|A| = -|A|$

$\rightarrow |A| = 0$

$\square$

Elementära radoperationer (kolonnoperationer)

Följd (av linjär i rad/kolonn, alternativt i rad/kolonn)

Sats A:

- byt plats på 2 rader/kolonner
  $\rightsquigarrow$ det byter tecken
- mult. rad/kolonn med λ
  $\rightsquigarrow$ det mult. med λ
- lägg till multipel av rad/kolonn till annan rad/kolonn
  $\rightsquigarrow$ det oförändrad

Detta ger oss en metod att räkna ut/förenkla determinanten.

Ex:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{bryt ut 5} \\ \text{från rad 2,} \\ \text{3 från rad 3}}}{=} 5 \cdot 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{byt rad} \\ \text{1 och rad 2}}}{=} -15 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 & -1 \end{matrix}$$

$$\underset{\substack{\text{lägg} \\ \text{multiplar} \\ \text{av rad 1 till rad 2, rad 3}}}{=} -15 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{a_{11}}{=} -15 \cdot 1 = -15$$

Sats (sats 4, s. 203, sats 12)

$\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Bevis

(behöver: det linjär i kolonn/rad alt. kolonn/rad
$\det(I) = 1$)

Bevisplan:

① • elem. radop. motsvarar mult. med speciella matriser E

• visa $\det(EA) = \det E \cdot \det A$ för dessa E

② använd för att visa att
$\det(AB) = \det A \cdot \det B$ i allmänhet

Elementära radoperationer

• mult. rad i med λ

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & 1 & \\ 0 & & & & & \ddots \; 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & \alpha_1 & - \\ - & \alpha_j & - \\ - & \alpha_n & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & \alpha_1 & - \\ - & \lambda\alpha_j & - \\ - & \alpha_n & - \end{bmatrix}$$

Koll: $n = 2$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{bmatrix}$

Obs:

$|E'| = 1 \cdot \ldots \cdot \lambda \cdot \ldots \cdot 1$

$|E'A| \underset{\text{sats } A}{=} \left| - \lambda\alpha_j - \right| = \lambda \left| - \alpha_j - \right| = \lambda |A| = |E'||A|$

$$(E')^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \frac{1}{\lambda} & & \\ & & & & 1 & \\ 0 & & & & & \ddots \; 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{plats } j$$

(mult. rad j med $\frac{1}{\lambda}$) så av samma typ

- byt plats på rad j och rad k

$$\begin{matrix} \text{plats } j = \\ \text{plats } k = \end{matrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ - e_k - \\ - e_j - \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ - \alpha_j - \\ - \alpha_k - \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \alpha_k - \\ - \alpha_j - \end{bmatrix}$$

Koll: $n = 2$ $\begin{bmatrix} - e_2 - \\ - e_1 - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$$

$$|E''| = \begin{vmatrix} - e_k - \\ - e_j - \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} - e_1 - \\ - e_2 - \\ - e_j - \\ - e_k - \end{vmatrix} = -|I| = -1$$

$$|E''A| = \begin{vmatrix} - \alpha_k - \\ - \alpha_j - \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} - \alpha_j - \\ - \alpha_k - \end{vmatrix} = -|A| = \underline{\underline{|E''||A|}}$$

$(E'')^{-1} = E''$ (byt tillbaks rad $j = k$)

speciellt av samma typ som E''

• lägg multipel $\lambda \cdot$ rad j till rad k

$$\text{rad } k \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ \lambda & & 1 \end{bmatrix}}_{E'''} \begin{bmatrix} - & \alpha_j & - \\ - & \alpha_k & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & \alpha_j & - \\ - & \lambda\alpha_j + \alpha_k & - \end{bmatrix}$$

$\uparrow$ kolonn j

Koll: $n = 2$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{11} + a_{21} & \lambda a_{12} + a_{22} \end{bmatrix}$

$|E'''| = 1$

$$\underline{\underline{|E'''A|}} = \begin{vmatrix} - & \alpha_j & - \\ - & \lambda\alpha_j + \alpha_k & - \end{vmatrix} \underset{\text{sats}}{=} \begin{vmatrix} - & \alpha_j & - \\ - & \alpha_k & - \end{vmatrix} = |A| = \underline{\underline{|E'''||A|}}$$

$$(E''')^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ -\lambda & & 1 \end{bmatrix}$$

$\uparrow$ plats (k, j)

lägg $-\lambda$ rad j till rad k. Samma typ som E''.

Matriser av typ E', E'', E''' kallas elementära.
Har visat att

<u>Lemma</u>

- E elementär
  $\Rightarrow E^{-1}$ elementär
- $\det(EA) = \det(E)\det(A)$

② Antag A ej inv. Då

- $|A| = 0$
- AB ej invert.

($f_A \circ f_B$ ej bij. om f_A ej bij.)

$\Rightarrow \underline{|AB|} = 0 = \underline{|A||B|}$

Antag A inv.

Då kan transformera mha elem. radop. A till I

$[A \mid I] \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow [I \mid A^{-1}]$

dvs $\exists$ elementära matriser $E_1, \dots, E_s$ s.a.

$E_1, \dots, E_s A = I$

$\Leftrightarrow A^{-1} = E_s^{-1} \dots E_1^{-1}$

$|A| \underset{\text{Lemma}}{=} |E_s^{-1}| \cdot \ldots \cdot |E_1^{-1}|$

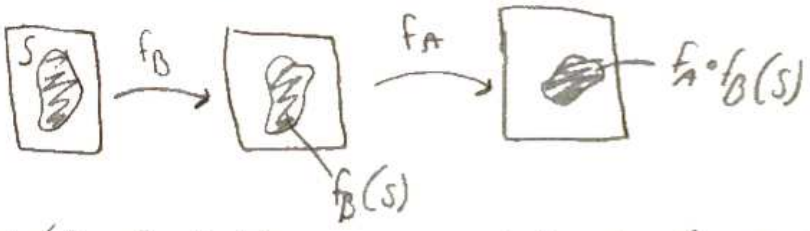
$|AB| = |E_s^{-1} \cdot E_1^{-1} B| \underset{\text{Lemma}}{=} |E_s^{-1}| \cdot \ldots \cdot |E_1^{-1}||B| = |A||B|$

$\square$

Fö 20

$\det(AB) = \det(A)\det(B)$

geometriskt:



$\underline{\mathrm{Vol}(f_A \circ f_B(S))} = \pm \det A \, \mathrm{Vol}(f_B(S)) = \underline{\pm \det A \det B \, \mathrm{vol}(S)}$

Har också $f_A \circ f_B = f_{AB}$ så $\underline{\mathrm{Vol}(f_A \circ f_B(S))} = \underline{\pm \det(AB)\mathrm{Vol}(S)}$

Gäller alla mängder S.

$\Rightarrow \det A \det B = \det(AB)$

Ex: Visa att A ortogonal $\Rightarrow |A| \pm 1$

A ortogonal $\Leftrightarrow AA^T = I$

$1 = |I| = |AA^T| \underset{\text{sats}}{=} |A||A^T| \underset{|A^T| = |A|}{=} |A|^2$

Följdsats: Om A inverterbar så $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

Bevis:

Om A inv.bar $A^{-1}A = I$

$1 = |I| = |A^{-1}A| \underset{\text{sats}}{=} |A^{-1}||A|$

$\Rightarrow |A^{-1}| \neq 0 \quad |A \neq 0|$

och $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

$\square$

Följdsats 2:

A inv.bar $\iff |A| \neq 0$

Bevis:

i måndags: A ej inv.bar $\Rightarrow \det A = 0$

nu: A inv.bar $\Rightarrow \det A \neq 0$ $\square$

Följd: Huvudsatsen (9, s. 212)

Låt A $n \times n$-matris. Då är följande päst. ekv.

(a) A's kolonner bas för $\mathbb{R}^n$

(a') A's rader bas för $\mathbb{R}^n$

(b) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ endast triviala lösn. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

(c) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbart $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$

(d) A inverterbar

(e) f_A bijektiv

(f) $\det A \neq 0$

Underdeterminanten

Låt $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$

En underdeterminant till A av ordning r är den det vi får om vi stryker $n-r$ kolonner, $m-r$ rader i A.

Ex:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & -3 & 11 \\ 12 & 3 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ $m=3$ $n=4$ $3-2=1$ $4-2=2$

Underdet: $\begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ till A av ordn. 2

Kan ha ordning $1, 2, \ldots, \min(m, n)$ i ex = 3

underdet ordn. 3:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & 11 \\ 12 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Om A kvadratisk, låter vi D_{ij} beteckna underdet där stryker rad i, kolonn j

Ex:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad D_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Sats (6 och 12, s. 206):

Låt A $n \times n$. Då gäller

- $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} D_{ij}$

  utveckling längs kolonn j

- $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} D_{ij}$

  utveckling längs rad i

Ex:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Utveckling längs kolonn 3

$$\det A \sum_{i=1}^{3} a_{i3} (-1)^{i+3} D_{i3} = 2(-1)^{3+1} \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}_{3 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 4} + 0 =$$

$a_{i3} = 0$ för $i = 2, 3$

$= 2 \cdot 1 \cdot 4 = \underline{\underline{8}}$

Utv. längs rad 2:

$$\det A = 3(-1)^{2+1}\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}_{-6} + 1(-1)^{2+2}\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}}_{-10} =$$

$$= (-3)(-6) - 10 = 18 - 10 = 8$$

<u>Ex:</u> En matris på formen

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ & \ddots & * & * \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

dvs $a_{ij} = 0$ om $i > j$

kallas <u>uppåt triangulär</u>

$$\det A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & * \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \text{utv. längs kolonn 1}$$

$$\lambda \underbrace{(-1)^{1+1}}_{1} = \begin{bmatrix} \lambda_2 & & & \\ & \lambda_3 & & * \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \begin{bmatrix} \lambda_3 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

Adjunkt

Def: A $n \times n$

Adjunkten till A är den $n \times n$-matris vars ij-element är $(-1)^{i+j} D_{ji}$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} D_{11} & -D_{21} & D_{31} & \cdots \\ -D_{12} & D_{22} & \cdots & \\ D_{13} & & & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

Sats (7, s. 207)

$$A(\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A)A = (\det A)\, I$$

Obs: om $\det(A) \neq 0$

så $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$

Ex: $n = 2$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} D_{11} & -D_{21} \\ -D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Ex: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{1\cdot 4 - 2\cdot 3}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Cramers regel:

Uttrycker lösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ i termer av determinanter.

Sats (8, s. 210)

Antag $A = \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_n \\ | & & | \end{bmatrix}$ $n \times n$, $\det A \neq 0$

Då har $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ den entydiga lösningen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

plats j

där

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} | & & | & & | \\ \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{b} & \dots & \mathbf{a}_n \\ | & & | & & | \end{vmatrix}}{|A|}$$

Bevis $n = 2$, $j = 1$

Antag $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ lösn. till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_2 \end{bmatrix}$

Då $\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2$

$$\begin{vmatrix} | & | \\ \mathbf{b} & \mathbf{a}_2 \\ | & | \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} | & | \\ x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_2 \\ | & | \end{vmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{vmatrix} | & | \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \\ | & | \end{vmatrix}}_{|A|} + x_2 \underbrace{\begin{vmatrix} | & | \\ \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_2 \\ | & | \end{vmatrix}}_{=0}$$

det linjär i kolonn 1

ty 2 lika kolonner

Slutsats

$$\begin{vmatrix} | & | \\ \mathbf{b} & \mathbf{a}_2 \\ | & | \end{vmatrix} = x_1 \, |A|$$

Eftersom $|A| \neq 0$ så

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} | & | \\ \mathbf{b} & \mathbf{a}_2 \\ | & | \end{vmatrix}}{|A|}$$

Determinanter och rang

Ex:

A 3x3	$f_A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$	$f_A(\mathbb{R}^3) = \text{kolonn}A$	rang$A$	det$A$	max $\neq 0$ underdet
$I = \begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{bmatrix}$	$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$ $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, x_3)$	$\mathbb{R}^3$	3	1	$\begin{vmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{vmatrix}$ ordn. 3
$A = \begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&0 \end{bmatrix}$	orto. proj på (x_1x_2)-planet $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, 0)$	(x_1, x_2)-planet $\text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$	2	0	$D_{33} = \begin{vmatrix} 1&0 \\ 0&1 \end{vmatrix}$ ordn. 2
$A = \begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{bmatrix}$	orto. proj på x_1-axeln $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, 0, 0)$	x_1-axeln $\text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$	1	0	$\lvert 1 \rvert$ ordn. 1
$\mathbb{0} = \begin{bmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{bmatrix}$	$\mathbf{x} \mapsto \mathbb{0}$ "orto proj" på origo	$\{\mathbb{0}\}$	0	0	finns ingen nollskild underdet "ordn. 0"

Sats (13, s. 230)

A mxn matris rang A = ordningen av största nollskilda underdetermitant.

Fö 21

Ex: Tenta 150807. 1a

Låt

$$|A| = \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 7 & 6 & 2 \\ 6 & 4 & -2 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \\ -6 & 7 & 7 & 7 & 0 \end{vmatrix}}_{=0,\ \text{ty 2 rader lika}} \qquad |B| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 6 & 2 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 \\ \downarrow \\ 1 \\ \downarrow \end{matrix}$$

utveckla

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 6 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} + 0 =$$

$$= (-1)\cdot 6 \cdot (-1)^{2+1} \underbrace{\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}_{-9+10=1} = 6$$

Ex: Tenta 150807. 1b

Bestäm en bas för kolonn(A)
rang(A), nolldim(A)

$|B|$ är underdetermitant (D_{42}) till A
$|B| \neq 0$, underdet till A av ordn. 4 $\Rightarrow$ rang(A) ≥ 4

det(A) = 0 $\Rightarrow$ rang(A) < 5
Alltså rang(A) = 4

$$A = \begin{bmatrix} | & | & | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ | & | & | & | & | \end{bmatrix}$$

$$\text{Kolonn}(A) \underset{\text{def}}{=} \text{span}(a_1, a_2, \ldots, a_5)$$

det $A = 0 \iff a_1, \dots, a_5$ linjärt beroende

$|B| \neq 0 \Rightarrow a_1, a_3, a_4, a_5$ linjärt oberoende.

Alltså bas för kolonn$(A) = \{a_1, a_3, a_4, a_5\}$

nolldim$(A) = 5 - \text{rang}(A) = 5 - 4 = 1$

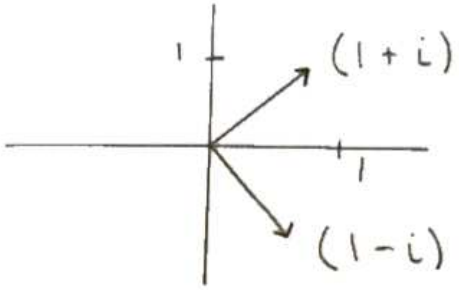
Komplexa tal (Persson-Böiers, Appendix A)

Ex: $(x-1)^2 = -1$ saknar reella lösn.

För att lösa: introducera i som uppfyller $i^2 = -1$
Då har $(x-1)^2 = -1$ lösn.
$x = 1 \pm i$

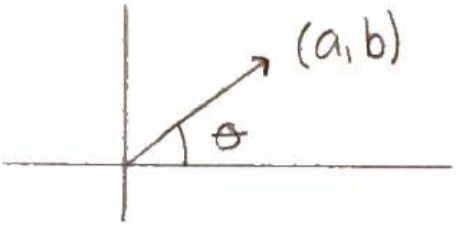
Ett komplext tal z är på formen $a + bi$, där $a, b \in \mathbb{R}$, kan identifieras med $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

Ex:



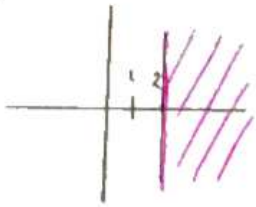
- a kallas realdelen av z
- b kallas imaginärdelen av z
- $|(a,b)|$ kallas absolutbeloppet av z

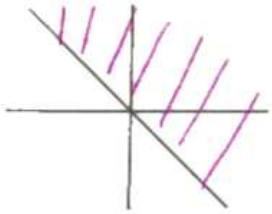
$= \sqrt{a^2 + b^2}$



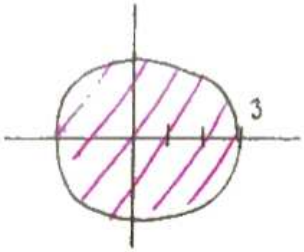
- vinkeln θ mellan y-axeln och (a,b) kallas <u>argumentet</u> av z, skrivet $\arg(z)$

Ex: $\{\operatorname{Re} z \geq 2\}$ $\{\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z \geq 0\}$

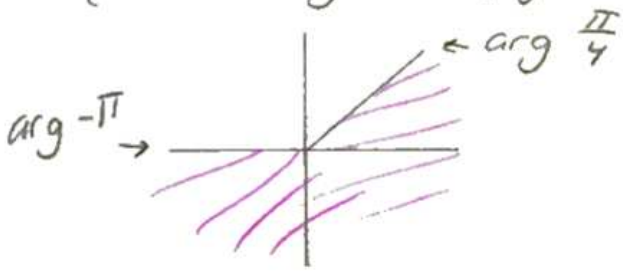




$\{|z| \leq 3\}$

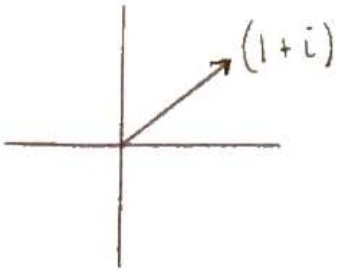


$\{-\pi \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}\}$



Obs: $\arg z$ ej entydigt bestämt.
2 arg. skiljer sig med multipel av 2π

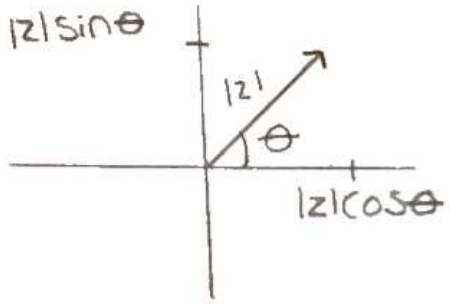
Ex:



$\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$ eller $\frac{\pi}{4} + 2\pi$

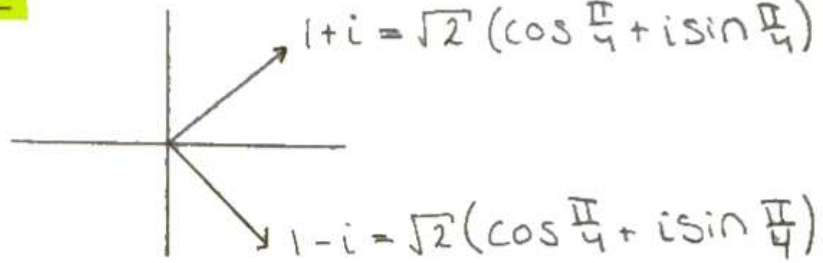
$\frac{\pi}{2}, 4\pi$

Obs: z kan alternativt skrivas
$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$



· polär form

Ex:

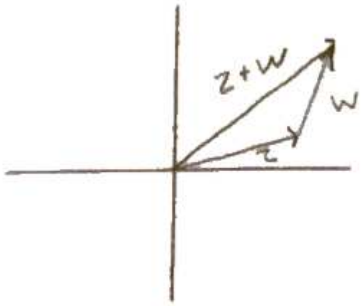


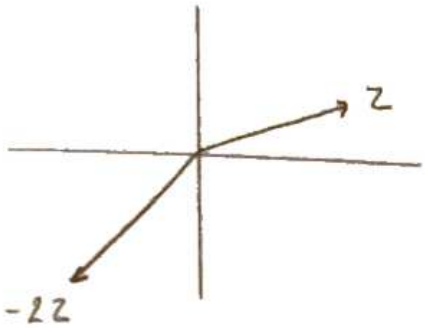
Räkneoperationer

Addition, mult. med reell skalär, mult, div.

Def: Om $z = x + yi$, $w = u + vi$, $\lambda \in \mathbb{R}$
så är
- $z + w = x + u + (y + v)i$
- $\lambda z = \lambda x + \lambda y i$

Geometriskt:
add. och mult. med λ i $\mathbb{R}^2$





Samma räkneregler som för vektorer i $\mathbb{R}^2$
(sats 1, s. 464)

Multiplikation

Minns: har ingen multiplikation
$\mathbb{U}, \mathbb{V} \in \mathbb{R}^2 \longmapsto$ vektor i $\mathbb{R}^2$

- den komplexa strukturen på
  $\mathbb{C} = \{\text{komplexa tal}\}$ ger oss en multiplikation

Def. om $z = x + yi$, $w = u + vi$, så
$z \cdot w = (x + yi)(u + vi) = xy - yv + (xv + yu)i$
(sats 1, s. 464)

Kommentar: mult. med ett komplext tal kan ses som en linjär avb.

Ex: Tenta 141027

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$
$(x, y) \longmapsto x + yi$ - linjär

$f^{-1}: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$z = x + yi \longmapsto (x, y)$ - linjär

$g: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$
$z \longmapsto (3 + i)z$. $\mathbb{C}$ linjär

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] \arrow[rrr, bend right, "F = f^{-1} \circ g \circ f \text{ linjär}"'] & \mathbb{C} \arrow[r, "g"] & \mathbb{C} \arrow[r, "f^{-1}"] & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

Bestäm avb.-matris till F

$$A_f = \begin{bmatrix} | & | \\ F(e_1) & F(e_2) \\ | & | \end{bmatrix}$$

$F(e_1) = F(1,0) = f^{-1}(g(f(1,0))) = f^{-1}(g(1)) =$
$= f^{-1}(3+i) = (3,1)$

$F(e_2) = f^{-1}(g(f(0,1))) = f^{-1}(g(i)) = f^{-1}((3+i)i) =$
$= f^{-1}(3i-1) = (-1,3)$

$\Rightarrow A_f = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

<u>Division</u>

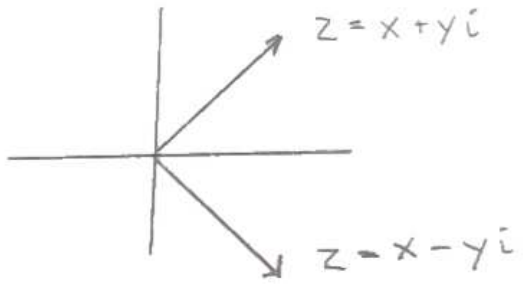
Hur tolka $\frac{z}{w}$?

Okej om $w = v \in \mathbb{R}$. Då $\frac{x+yi}{v} = \frac{x}{v} + \frac{y}{v} i$

Trick: förläng med ngt så att nämnaren blir reell.

<u>Def:</u> <u>Konjugatet</u> till $z = x + yi$ är det komplexa talet

$\bar{z} = x - yi$



Obs: Om $z = x \in \mathbb{R}$ så $\bar{z} = x = z$

Nu kan def $\frac{1}{w}$ som $\frac{\overline{w}}{w\overline{w}} = \frac{\overline{w}}{|w|^2}$

<u>Obs:</u> $z\overline{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2 + y^2 = |z|^2$

och $\frac{z}{w} = \frac{\overline{w}z}{|w|^2}$

Ex: $\frac{2+3i}{i} = \frac{-i(2+3i)}{|i|^2} = \frac{3-2i}{1} = 3-2i$

Den komplexa exponentialfunktionen

Om $z = x+yi$ så def den komplexa exponentialfunkt. e^z som

$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$

<u>Obs:</u> om $z = x$ reellt så $e^z = e^x$ den "vanliga" reella exp. fkt.

<u>Obs:</u> $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$, $r = |z|$

$\bar{z} = r(\underbrace{\cos\theta - i\sin\theta}_{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)}) = re^{-i\theta}$

<u>Sats</u> $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ (Sats 5, s. 474)

<u>Bevis</u>

Antag $z = x+yi$, $w = u+vi$

Då $e^z \cdot e^w \overset{\text{def}}{=} e^x(\cos y + i\sin y) \cdot e^u(\cos v + i\sin v) =$

$= \underbrace{e^x e^u}_{e^{x+u}}(\underbrace{\cos y\cos v - \sin y\sin v}_{\cos(y+v)} + i\underbrace{(\cos y\sin v + \sin y\cos v)}_{\sin(y+v)}) =$

$$= e^{x+u}\left(\cos(y+v) + i\sin(y+v)\right) =$$

$e^x e^u = e^{x+u}$ för den reella exp-funktionen + trig.

$$= e^{x+u+i(u+v)} = e^{(x+iy)+(u+iv)} = e^{z+w}$$

$\square$

$$= e^{x+u}\left(\cos(y+v) + i\sin(y+v)\right) =$$

$e^x e^u = e^{x+u}$ för den reella exp-funktionen + trig.

$$= e^{x+u+i(u+v)} = e^{(x+iy)+(u+iv)} = e^{z+w}$$

$\square$

Fö 22

Mult. och div. på polär form

$z = re^{i\theta}$, $w = \rho e^{i\varphi}$

$zw = r\rho e^{i(\theta+\varphi)}$

$\frac{z}{w} = \frac{r}{\rho} e^{i(\theta-\varphi)}$

Polynomekvationer

Minns: ett polynom är en fkt

$p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$

där $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$

- Om $a_n \neq 0$ så $p(z)$ har grad n
- om $p(z)$ har 2 termer sägs det vara ett binom

Plan lösa $p(z) = 0$

- p grad 2 (kap A.8)
- p binom (kap A.9)
- allmänt p (kap A.10)

p grad 2:

Vill lösa $cz^2 + bz + a = 0$ (*)

där $a, b, c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$

$\iff z^2 + \frac{b}{c} + \frac{a}{c} = 0$

Kvadratkomplettera:

$\left(z + \frac{b}{2c}\right)^2 - \left(\frac{b}{2c}\right)^2 + \frac{a}{c} = 0$

sätt $\tilde{z} = z + \frac{b}{2c}$

$\tilde{a} = \left(\frac{b}{2c}\right)^2 - \frac{a}{c}$

Då (*) $\iff \tilde{z}^2 = \tilde{a}$, binomekv.

Slutsats: alla andragradsekv kan reduceras till binomekv.

lösa ekv. $z^2 = a$

Metod 1: (rektangulär form)

$\begin{cases} \text{Skriv } a = u + iv \\ \text{ansätt } z = x + iy \end{cases}$

Då $z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$

så (*) $\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = u & (1) \\ 2xy = v & (2) \end{cases}$ $\quad (\operatorname{Re} z^2 = \operatorname{Re} a)$ $\quad (\operatorname{Im} z^2 = \operatorname{Im} a)$

Kan också använda att

$|z^2| = |a|$, dvs.

$x^2 + y^2 = \sqrt{u^2 + v^2}$ (3)

$|z^2| = |z|^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = x^2 + y^2$

Ex: Lös $z^2 = -i$ $(*)$

Ansätt $z = x + iy$

Då $(*) = \begin{cases} x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(-i) = 0 & (1) \\ 2xy = \mathrm{Im}(-i) = -1 & (2) \end{cases}$

Har dessutom $x^2 + y^2 = 1$ (3)

$(1) + (3)$:

$2x^2 = 1$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

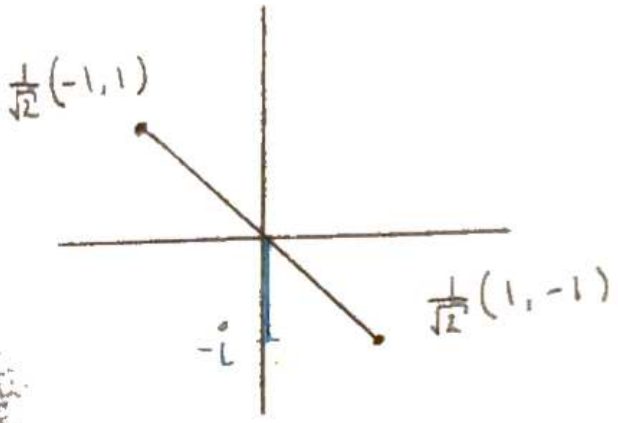
(1): $y^2 = x^2 = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

De x, y som också uppfyller (2) är

$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$, $\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

<u>Slutsats</u> Lösn. till $(*)$ är $z = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$



Metod 2: (ansats på polär form)
kommer senare

Binomekvationer

p binom om två termer

(*) $a_n z^n + a_k z^k = 0$, $a_n \neq 0$, $a_k \neq 0$

Faktorisera VL:

$z^k(a_n z^{n-k} + a_k) = 0$

$\Leftrightarrow$ $z = 0$ eller $a_n z^{n-k} + a_k = 0$ $\Leftrightarrow z^{n-k} + \frac{a_k}{a_n} = 0$
(med mult. k)

Alltså kan reducera varje binomekv. till $z^n = a$

- Löses med ansats på polär form:
  - Skriv a på polär form
    $a = \rho e^{i\varphi}$
  - Ansätt $z = re^{i\theta}$
    Då $z^n = r^n e^{i\theta n}$

(*) $\Leftrightarrow \begin{cases} r^n = \rho \\ n\theta = \varphi + 2\pi k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$ $\quad (|z^n| = a)$ $\quad (e^{i\theta} = e^{i\varphi})$ $\quad r \geq 0$

Ex: lös $z^n = -i$ (*)

- Ansätt $z = re^{i\theta}$
- Skriv $-i = e^{\frac{3\pi}{2}i}$

Nu (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} r^n = 1 \\ n\theta = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$ $\quad (|z^n| = |-i|)$ $\quad (e^{in\theta} = e^{i\frac{3\pi}{2}})$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{3\pi}{2n} + \frac{2\pi k}{n} \end{cases}$

Alltså har (*) lösn.

$z = 1 \cdot e^{i\theta} = e^{i\left(\frac{3\pi}{2n} + \frac{2\pi k}{n}\right)}$, $k \in \mathbb{Z}$

Obs: $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ ger olika lösningar.

Dock: $k, k+n$ ger samma z.

Alltså n st lösningar.

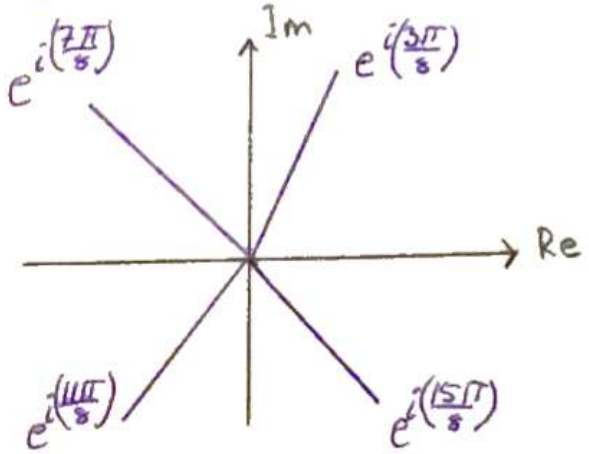
<u>ex:</u> $n = 4$

$k = 0$: $z = e^{i\left(\frac{3\pi}{2\cdot 4} + 0\right)} = e^{i\frac{3\pi}{8}}$

$k = 1$: $z = e^{i\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{2\pi}{4}\right)} = e^{i\left(\frac{7\pi}{8}\right)}$

$k = 2$: $z = e^{i\left(\frac{11\pi}{8}\right)}$

$k = 3$: $z = e^{i\left(\frac{15\pi}{8}\right)}$



Allmänna polynomekvationer:

Ex: $z^4 = -i$

lösningar: 4 st (komplexa) (0 st reella lösningar)

I allmänhet har $p(z) = 0$ grad p lösningar.

Algebrans fundamentalsats (Sats 8 s. 486)

Låt $p(z)$ vara ett komplext polynom av grad ≥ 1.
Då har $p(z)$ åtminstone ett nollställe.

Följdsats (sats 9 / följdsats 1 s. 486)

Låt $p(z)$ vara ett komplext polynom av grad ≥ 1. Då har p n st komplexa nollställen $\{\alpha_1, \dots \alpha_n\}$ och

$p(z) = c(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_n)$, för något $c \in \mathbb{C}$

Bevis (Följdsats)

Använder faktorsatsen.

Faktorsatsen

p polynom av grad $n \geq 1$
Antag $p(a) = 0$
Då är p på formen
$p(z) = (z-a)\,q(z)$, för något polynom av grad $n-1$

- Enligt algebrans fundamentalsats har $p(z)$ åtminstone ett komplext nollställe α_1

- Enligt faktorsatsen är $p(z)$ på formen
$p(z) = (z-\alpha_1)\,p_1(z)$
där $p_1(z)$ poly av grad $n-1$

Upprepa:

- Enligt alg. fund. sats har $p_1(z)$ åtminstone ett nollställe α_2
- Enligt faktorsatsen $p_1(z) = (z-\alpha_2)p_2(z)$ där $p_2(z)$ har grad $n-2$

...

Upprepa: $p_2 = (z-\alpha_2)p_3$ ... p_3 grad $n-3$

...

$p_{n-1} = (z-\alpha_n)p_n$, där p_n grad 0 (= nollskilld konst.

dvs $p_n(z) = C$, för ngt $C \in \mathbb{C}$, $C \neq 0$

Slutsats:

$$p(z) = (z-\alpha_1)p_1(z) = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)p_2(z) =$$
$$= (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_n)p_n(z) =$$
$$= C(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_n)$$

$\square$

Sats

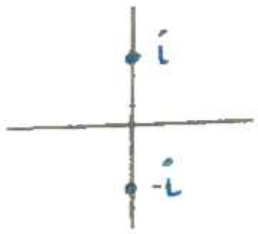
Låt $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_n z + a_0$,
där $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

Då gäller att om $p(\alpha) = 0$, så $p(\bar{\alpha}) = 0$

Ex: $p(z) = z^2 + 1$

$p(z) = 0$

$\Leftrightarrow z^2 = \pm i$



Följd:

Låt p vara ett polynom med reella koeff. grad $p \geq 1$.
Då kan p skrivas som en produkt av reella polynom av grad högst 2.

Moral: $p(z) = \underbrace{(z-\alpha)(z-\bar{\alpha})}_{\text{reellt polynom grad 2}} q(z)$

Fö 23

Vektorer

def.

- geometriskt: $u = \{$riktade sträckor$\}$
- $a \in \mathbb{R}^n$

  $a = (a_1, \dots, a_n) \quad a_i \in \mathbb{R}$

Operationer

- addition
- mult med $\lambda \in \mathbb{R}$
- skalär prod: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
- vektorprod: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

Ska kunna

- def.
- räkneregler

  ($a \times b = -b \times a$, $(a \times b) \times c \neq a \times (b \times c)$ i allmänhet)

Viktiga begrepp/resultat

- linjärkomb.
- linjärt beroende/oberoende
- spänner upp
- bas
- koordinater
- basbyte
- bassatsen
- ortogonalitet

  ($u \perp v \iff u \cdot v = 0$)

- ON-bas
- skalär-/vektorprod. i ON-bas (sarrus)

Typiska uppgifter

- avgör om vektorer linjärt oberoende/spänner upp $\mathbb{R}^n$/ /bas/ON-bas
- räkning med vektorer
  - ex: tyngdpunktsformeln, pythagoras sats
  - ex: beräkna skalärprod., kryssprod.
  - ex: visa x-prod. ej associativ
- bestäm kood. i viss bas
- hitta (HON)-bas med vissa egenskaper

Geometri

Viktiga begrepp/resultat/problem

- koordsystem
- linjens ekv.
  - parameterform $P+tv$
  - affin form $\{ax+by=c\}$
- planets ekv.
  - $P+tv+sv$
  - $\{ax+by+cz=d\}$
  - normalvektor (a,b,c)
- geometrisk tolkning av lösn. till ekv. syst.
- ortogonal proj.
  - på vektor/linje (proj. formeln)
  - på plan
- spegling i pkt/linje/plan

- avstånd mellan pkter / linjer / plan

- orientering
- geometrisk tolkning av
  - kryssprod.
  - skalära trippelprod.
    $a_1 \cdot (a_2 \times a_3)$
  - determinant $\begin{vmatrix} | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ | & | & | \end{vmatrix}$
    $\pm$ Volym parallelleppiped

<u>Typiska geometriuppg.</u>

- beskriv geom. lösn. till ekv.syst.
- skärning mellan linjer/plan
- bestäm ekv. för viss linje / visst plan
  - ex: plan genom P, Q, R
  - ex: linje genom P (possitiv) med v
- avgör om linjer/plan parallella/vinkelräta
- beskriv/använd proj-/spegling
- beräkna <u>area</u> av triangel/parallellepiped
  <u>Volym</u> av tetraeder / parallellepiped
  - ex: Volym tetraeder = $\frac{1}{6}$ Volym parallellepiped

Matriser och LES

- def:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & a_{mn} \\ a_{m1} & & \end{bmatrix} \quad \text{typ } m \times n$$

Operation

- addition
- mult. med skalär
- mult. $\underset{m \times n}{A} \underset{n \times p}{B}$

Ska kunna

def + räkneregler

Obs: $AB \neq BA$ i allm.

Viktiga exempel/begrepp

- $I = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$ enhetsmatrisen.
- $\mathbb{O} = [0]$ noll matrisen
- $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ triangulär
- transponat $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$
- A <u>ortogonal</u> om kolonner ON-bas
- Inversen A^{-1} uppfyller

  $A^{-1}A = AA^{-1} = I$

  - Vänsterinvers $VA = I$
  - Högerinvers $HA = I$

- Linjärt ekv. system

$\Leftrightarrow x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = b$

$\Leftrightarrow Ax = b$, där

$$A = \begin{bmatrix} | & & | \\ a_1 & \dots & a_n \\ | & & | \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- homogent LES
  - en/∞ - lösn.
  - $\{x, Ax = 0\} = \text{Null}(A)$ <u>nollrum</u>
  - $\dim(\text{Null}(A)) = \text{nolldim}(A)$
- inhomogent LES om $b \neq 0$
  - inga/en/∞ lösn.
  - lösbart omm $b \in \text{Kolonn}(A) = \text{span}(a_1, \dots, a_n)$
  - $\text{rang}(A) = \dim(\text{kolonn}(A))$

<u>Lösa $Ax = b$</u>

- lösn. $x = x_p + x_n$ ← lösn. $Ax = 0$

  partikulär lösn.

- Gauselim.
  - elementära radop
    (mult. med elementära matriser)

$\rightsquigarrow A \Leftrightarrow T$ trappformad

- en parameter per fri variabel
  - -> nolldim = # fria variabler = n - # pivot (# kolonner)
  - -> rang = # pivot
- $x = A^{-1}b$

- Cramers regel $x_j = \left[\frac{b}{a}\right]$

- Minsta kvadrat
  - approximativ lösn. minimerar $|Ax-b|$
    lös $A^TAx = A^Tb$

<u>Typiska uppg.</u>

- lös LES / # lösn. / beskriv lösn. geometriskt
- hitta minsta kvadratlösn. till $Ax=b$
- lös matrisekv. $AX + XB = C$
- beräkna A^{-1}, hitta höger-/vänster-inverser / avgör om A^{-1}, H. V $\exists$
- bestäm bas för nollrum/kolonnrum/rang/nolldim.
- ge ex. på matriser med olika egenskaper
  - ex: hitta A och B s.a. $AB = 0$
- visa matrisprod. ej kommutativ

<u>Linjära avb.</u>

- <u>def</u>: f linjär omm
  $f(\lambda u + \lambda' u') = \lambda f(u) + \lambda' f(u')$
- <u>sats</u> f linjär omm
  $f(x) = \underset{\text{avb matris}}{A}x$
- sammansättn. $f_A \circ f_B = f_{AB}$
- invers $(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}$

- $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ surjektiv omm kolonn$(A) = \mathbb{R}^m$
  värdemänga $f(A)$
- f_A injektiv omm Null$(A) = \{0\}$
- f_A bijektiv omm A inverterbar
- f <u>isometri</u> om $|f(x)| = |x| \ \forall x$

<u>Viktiga exempel</u>

- skalning
- rotation
- ortogonal proj. linje/plan
- spegling i pkt/linje/plan
  obs: genom origo
- $\mathrm{Vol}(f_A(S)) = \pm |A| \mathrm{Vol}(S)$

<u>Typiska uppgifter</u>

- avgör om f linjär
- avgör om f inj/surj./bij.
- bestäm f^{-1} $f \circ g$
- bestäm avb. matris
  $A = \begin{bmatrix} | & & | \\ f\mathbf{e}_1 & \dots & f\mathbf{e}_n \\ | & & | \end{bmatrix}$
- ge exempel på linjära avb. med vissa egenskaper
- vad är arean/volymen av ex: $f_A(T)$
  tetraeder, triangel mm

Determinanter

A $n \times n$

def:

$$\det A = |A| = \sum_{p \in S_n} \sigma(p)\, a_{1p_1} \cdot a_{2p_2} \cdot \ldots \cdot a_{np_n}$$

- geometrisk tolkn:
  - Volym parallellepiped
  - Volym förändring f_A
- $\begin{bmatrix} | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} > 0$ omm a_1, a_2, a_3 pos. orient

Egenskaper

$\det A^T = \det A$

Sats
(1) det linjär i rader/kolonner
(2) det alternerande i rad/kolonn
(3) $\det(I) = 1$

(1) och (2) $\Rightarrow$ 2 rader/kolonner lika $\Rightarrow \det = 0$

- $\begin{vmatrix} - a_j - \\ - a_k - \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} - a_j - \\ - \lambda a_j - a_k - \end{vmatrix}$

(1), (2) och (3) $\Rightarrow$ $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

def: underdet / adjunkt

Beräkna det

- $n = 3$ $(n = 2)$ Sarrus regel
- Obs funkar ej för $n \geq 4$

- använd elem. kolonn/rad-operation för att förenkla

$$\xrightarrow{ex} \begin{vmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

- utveckla längs rad/kolonn

<u>Sats A</u> (följdsats)

A inv.bar $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A)$$

<u>Typiska uppgifter</u>

- beräkna det A
- beräkna adj A
- använd det A för
  - avgöra om A inv.bar
  - avgöra om vektorer linj. beroende
  - beräkna A^{-1}
  - beräkna area triangel/parallellepiped
    volym —— " ——

Komplexa tal

$z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, kan identifieras m. vektorn $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$z = re^{i\theta}$, $r \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$

Begrepp:

$a = \operatorname{Re} z$

$b = \operatorname{Im} z$

$|z| = r$

$\arg z = \theta$

$\bar{z} = a - bi = re^{-i\theta}$

Operationer

- addition
- mult m. $\lambda \in \mathbb{R}$ } som för vektorer i $\mathbb{R}^2$
- mult.
  - kan ses som lin. avb. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
- division
  $\left(\frac{1}{w} = \frac{\bar{w}}{|w|^2} \right)$
- exp.-fkt: $e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \sin b)$

Polynomekv.

$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_n z + a_0 = 0$

$p(z)$ grad n

- Lösa $p(z) = 0$
  - grad 2 / binomekv. (två termer)
  $\rightsquigarrow$ reducera till $z^k = a$
  Lös genom
  $\begin{cases} \text{ansätt } z = x + iy \text{ (kvadratiskt) (bra då } z = k) \\ z = re^{i\theta} \end{cases}$
  - högre grad
  gissa rot, faktorisera (ex: polynomdiv.)
  $\rightsquigarrow$ reducera till grad 2 (binom)

Algebrans fundamentalsats

$\forall$ polynomekv. har lösn.

Följd: $p(z) = C(z - \alpha_1) \dots (z - \alpha_n)$,
där $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ nollställen till $p(z)$

- $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$
Då $p(\alpha) = 0 \Rightarrow p(\bar{\alpha}) = 0$

Typiska uppgifter

- Lös $p(z) = 0$
- Faktorisera $p(z)$
- Beskriva/rita mängden av komplexa tal
  - ex: $\{p(z) = 0\}$
- Hur många reella/komplexa nollställen har $p(z)$